# Die Optimierung von Formen und Gestalten

Jürgen Jost[*][†]

28. August 2002

Aristoteles *de caelo* B13, 295b11: εἰσὶ δέ τινες οἳ διὰ τὴν ὁμοιότητά φασιν αὐτὴν (*sc.* τὴν γῆν) μένειν, ὥσπερ τῶν ἀρχαίων Ἀναξίμανδρος. μᾶλλον μὲν γὰρ οὐθὲν ἄνω ἢ κάτω ἢ εἰς τὰ πλάγια φέρεσθαι προσήκει τὸ ἐπὶ τοῦ μέσου ἱδρυμένον καὶ ὁμοίως πρὸς τὰ ἔσχατα ἔχον· ἅμα δ᾽ ἀδύνατον εἰς τἀναντία ποιεῖσθαι τὴν κίνησιν, ὥστ᾽ ἐξ ἀνάγκης μένειν.

Es gibt aber auch einige – so etwa von den Alten Anaximander –, die sagen, sie [die Erde] ruhe aufgrund ihres Gleichgewichts. Denn wenn etwas in der Mitte errichtet werde und zu den Außenpunkten durchweg in derselben Beziehung stehe, dann könne es sich füglich um nichts mehr nach oben als nach unten oder als nach den Seiten hin bewegen; außerdem sei es unmöglich, daß es die Bewegung zugleich in entgegengesetzte Richtungen mache, so daß es notwendigerweise ruhe.

Das vorstehende Argument (zitiert nach [10], p.146) des vorsokratischen Philosophen Anaximander[1] charakterisiert eine Ruheposition als eine Gleichgewichtslage, die sich aus einer geometrischen Symmetrie ergibt. Zwar wird nicht mit physikalischen Kräften argumentiert, und die Ruhelage kann daher noch nicht als ein Ausgleich zwischen in entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften aufgefasst werden, aber die Begründung einer Ruheposition aus einem Symmetrieargument ist ein sehr bemerkenswerter Ansatz. Manches von dem Inhalt dieses Vortrages kann als eine Präzisierung der Reichweite dieses Ansatzes angesehen werden. Eine solche Präzisierung ist allerdings, wie wir sehen werden, erst auf der Grundlage der abstrakten und formalen Methoden der modernen Mathematik möglich.

---

[*]Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstr.22-26, 04103 Leipzig, jost@mis.mpg.de

[†]Santa Fe Institute, 1399 Hyde Park Road, Santa Fe, NM 87501, USA, jost@santafe.edu

[1]ungefähre Lebensdaten wohl etwa 610-545 v.Chr., siehe [10]

# 1 Einleitung: Optimale Formen und Gestalten in der Natur, Optimierungsprobleme in Technik und Wirtschaft

Lichtstrahlen finden den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten. Molekülkonfigurationen nehmen den energetisch günstigsten Zustand ein. Diese und andere physikalische Optimierungsphänomene sind Ausdruck unwandelbarer Naturgesetze. Auch biologische Formen stellen oft optimale oder beinahe optimale Lösungen bestimmter technischer Probleme dar, von der Gestalt der Bienenwaben, die mit möglichst wenig Material möglichst viel Raum umschließen, bis zur aerodynamischen Form des Falkenflügels, die den Luftströmungswiderstand minimiert. Hier handelt es sich um durch gnadenlosen Verdrängungswettbewerb zwischen verschiedenen Lebewesen erzwungene Anpassungen. In der menschlichen Gesellschaft maximieren beispielsweise Wirtschaftsunternehmen ihren Gewinn, und Untereinheiten minimieren ihre Kosten. Ingenieure entwickeln bestmögliche Lösungen für die ihnen gestellten Probleme, von der aerodynamisch günstigsten Form eines Flugzeugflügels oder einer ähnlich optimierten Form eines Schiffsrumpfes bis hin zu Materialien mit beispielsweise größter Reißfestigkeit. Hier handelt es sich um die Ergebnisse absichtsvoller Planung, oftmals allerdings auch durch Konkurrenzdruck in Gang gesetzt. Auch architektonische Formen werden von ihren Planern häufig nicht allein nach ästhetischen, sondern insbesondere nach Optimalitätskriterien entworfen, nach größtmöglicher Stabilität oder Belastbarkeit, optimaler Raumausnutzung, nach geringstmöglichem Material- oder Energieaufwand, Baugeschwindigkeit usw. entworfen. Hierbei müssen neben der Funktion, die das Bauwerk erfüllen soll, natürlich immer bestimmte Rand- oder Rahmenbedingungen berücksichtigt oder eingehalten werden, von der Beschaffenheit des Bauplatzes bis zur Verfügbarkeit der Materialien und dem Kenntnisstand und der Erfahrung der Bauleute. Als konkrete Motivation für unsere Darlegungen wollen wir auch mit einem Beispiel aus der Architektur beginnen, und zwar dem Dach des Olympiastadiums in München, welches von dem Stuttgarter Architekten Frei Otto entworfen wurde (Abb. 1). Dieses Dach hat die Gestalt einer Minimalfläche; es minimiert daher den Materialverbrauch unter den Zwängen der gewählten geometrischen Randkonfiguration. Das zugrundeliegende Optimalitätsprinzip hat auch einen internen Spannungsausgleich und Stabilität gegen Wind zur Folge. Interessanterweise beruht der architektonische Entwurf auf Experimenten mit Seifenfilmen (siehe [17]) (Abb. 2, 3). Solche Seifenfilme stellen Beispiele von Minimalflächen dar – wie wir noch erläutern werden –, und die Formen, die sich in geeignete in Seifenlauge getauchte Drahtschlingen eingespannt haben, sind dann in die wesentlich größeren Abmessungen der Architekturform übertragen worden. Die Abbildungen 4, 5, 6 und 7 zeigen einige weitere experimentell erzeugte Minimalflächen. Minimalflächen treten übrigens auch als Trennflächen zwischen Atomgittern in der Chemie und als Modelle für einige biologische Formen auf (Abb. 8 zeigt eine Kieselalgenschale; man beachte die Ähnlichkeit der Form zu Abb 5).– In diesem Vortrag wollen wir nun die mathematische Modellierung und Analyse von Minimalflächen vorstellen, einmal wegen des konzeptionellen Reichtums und der visuell anschaulichen Aussagekraft der mathematischen Theorie, zum anderen auch als ein Modellbeispiel für die mathematische Behandlung physikalischer und technischer Optimierungsprobleme. Es wird sich nämlich zeigen, dass die mathematische Untersuchung dieses konkreten Problems zu weit über den ursprünglichen Anlass hinausgreifenden Abstraktionen führt, die dann auch sehr nützliche Methoden und Erkenntnisse für große Klassen anderer Probleme liefern. Überhaupt scheinen sich die großen mathematischen Entwicklungen immer in einem Wechselspiel von konkreten, aber schwierigen und herausfordernden Problemen einerseits und der Herausbildung sehr abstrakter Konzepte und Argumentationsweisen andererseits zu vollziehen, die oft das Ausgangsproblem weit hinter sich lassen und dafür allgemeine Einsichten mit manchmal überraschenden neuen Anwendungen vermitteln. So soll uns hier das Minimalflächenproblem nicht nur ein Modell eines Optimierungsproblems bilden, sondern die vorgeführte mathematische Struktur soll auch ein Modell für das Vorgehen der Mathematik schlechthin darstellen.

## 2 Optimalität und Variationsprinzipien

Wir betrachten Probleme mit kontinuierlichen Variablen und Freiheitsgraden, lasssen also wie schon bei der Auswahl unserer Beispiele diskrete Optimierungsprobleme außer Acht. Damit begeben wir uns in das mathematische Gebiet der Variationsrechnung, welches übrigens hier in Leipzig eine sehr bedeutende Tradition besitzt, die von Carl Neumann, Adolph Mayer und Sophus Lie über Leon Lichtenstein und Ernst Hölder bis zu Herbert Beckert und seiner Schule reicht. Das grundlegende Prinzip der Variationsrechnung besagt, dass ein Gebilde, das in seiner Gesamterstreckung eine skalare Größe, irgendeine Art von physikalischer Wirkung optimiert, auch in allen Teilen notwendigerweise optimal sein muss, denn eine Verbesserung in einem Teil dieses Gebildes würde auch das betrachtete Gebilde als Ganzes im Hinblick auf das untersuchte Wirkungsfunktional verbessern. Die globale Optimalität führt also zu einer lokalen oder genauer sogar infinitesimalen Gleichgewichtsbedingung. Man geht hier also davon aus, dass die Teile in dem Sinne unabhängig voneinander sind, dass eine Verbeserung an einer Stelle nicht eine Verschlechterung an einer anderen Stelle nach sich zieht. Dieses Prinzip ist üblicherweise bei physikalischen Problemen, bei denen es keine Fernwirkungen gibt, sondern alle Einflüsse und Kräfte infinitesimal übertragen werden, anwendbar und gerechtfertigt, nicht aber unbedingt in komplexer strukturierten hierarchischen Situationen, wo Einflüsse auf mehreren Skalen miteinander in Wechselwirkung treten können. Das genannte Prinzip erlaubt dann die Übersetzung der globalen Optimalitätsbedingung in ein infinitesimales Kriterium, welches üblicherweise durch Differentialgleichungen ausgedrückt werden kann. Die Lösungen dieser Differentialgleichungen beschreiben Gleichgewichtslagen für die betrachtete physikalische Wirkung. Dies bedeutet, dass sich die Wirkung in erster Näherung nicht ändert, wenn man das Gebilde an einer Stelle variiert. In Nichtgleichgewichtssituationen kann man dagegen stets Variationen finden, die die Wirkung verändern. Variiert man in eine Richtung, so wird sie beispielsweise vergrößert, aber variiert man in die entgegengesetzte Richtung, so wird sie dann entsprechend verkleinert (Abb. 9). In einer Gleichgewichtslage passiert dagegen in beiden Richtungen jeweils das Gleiche, wie in der von Anaximander beschriebenen Situation (Abb. 10). So gesehen gibt es also keinen Grund, von der Gleichgewichtslage abzuweichen, weil keine Richtung vor ihrer Gegenrichtung ausgezeichnet ist, und dies war der Gedanke des Anaximander. Allerdings zeigen sich Effekte erst in höherer Ordnung, sind also in einer Gleichgewichtslage um eine Größenordnung kleiner als außerhalb. Je nachdem ob diese Effekte alle positiv sind oder nicht, ob also die Wirkung vergrößert wird, ist die untersuchte Gleichgewichtslage stabil oder nicht. Eine Lage, die ein Minimum beschreibt, muss natürlich in einem geeigneten Sinne stabil sein, da es nach der Natur des Minimums keine Möglichkeit einer Verkleinerung der Wirkung mehr geben kann. Es ist allerdings für unsere nachfolgenden Zwecke wichtig, dass nicht alle derartigen Gleichgewichtslagen stabil oder gar minimierend sind, denn auch wenn Variationen in einander entgegengesetzte Richtungen den gleichen Effekt haben, so ist damit noch nicht festgelegt, ob dieser Effekt das untersuchte Wirkungsfunktional vergrößert oder verkleinert. Würde sich also die Erde in der von Anaximander konzipierten Situation in einem instabilen Gleichgewicht befinden, so gäbe es zwar keinen inneren Grund für eine Abweichung, aber wenn beispielsweise durch eine äußere Störung oder Fluktuation einmal eine beliebig kleine Abweichung einträte, so würde diese Abweichung dann weiter vergrößert, wenn sie zu einer Verbesserung der Lage führte, und die Symmetrie wäre gebrochen.

# 3 Minimalflächen als Beispiel eines geometrischen Optimierungsproblems

Wir kehren zu den vorgestellten Seifenfilmen zurück und wollen ein mathematisches Modell zu deren Beschreibung und Analyse entwickeln, welches uns dann die numerische Approximation und Simulation von Lösungen und damit schließlich auch die Ersetzung des konkreten physikalischen Experimentes durch ein abstraktes mathematisches Verfahren zur Berechnung von Lösungen erlauben soll. Der Ausgangspunkt des Modells ist die physikalische Beobachtung, dass die Seifenfilme aufgrund der innewohnenden Molekularkräfte die Tendenz haben, sich soweit wie möglich zusammenzuziehen, also unter den gegebenen Zwangsbedingungen – hier repräsentiert durch den festen und starren Rand, in den sie eingespannt werden – eine möglichst kleine Oberfläche einzunehmen. Dies ist der dominante physikalische Effekt, der die Form des Seifenfilmes prägt, und andere physikalische Eigenschaften spielen nur eine untergeordnete Rolle. In unserem mathematischen Modell gehen wir deswegen davon aus, dass wir zur Erfassung der wesentlichen physikalischen Phänomene die Dicke des Seifenfilms vernachlässigen können, und betrachten in mathematischer Idealisierung Objekte von verschwindender Dicke. Wir idealisieren also den Seifenfilm als ein zweidimensionales Objekt, als eine Fläche. Auch das Gewicht des Seifenfilms ist derart klein, dass Gravitationseffekte keine wesentliche Rolle spielen, und wir sehen daher unsere Modellobjekte als gewichtslos an. Als Wirkungsfunktional betrachten wir in unserem Modell das Maß der Oberfläche, den Flächeninhalt. Wir suchen also Flächen kleinstmöglicher Oberfläche zu vorgegebenem Rand. Bevor wir uns nun diesem mathematischen Problem genauer zuwenden, wollen wir an dieser Stelle schon dieser genaueren Analyse vorgreifend sagen, dass, obwohl wir in unserem mathematischen Modell die physikalische Situation deutlich vereinfacht haben, die aus diesem Modell gewonnenen Resultate und die auf seiner Grundlage möglichen numerischen Konstruktionen sehr gut mit den Ergebnissen der physikalischen Experimente übereinstimmen. Ein Aspekt der Modellbildung ist also die Reduktion der real vorliegenden Komplexität auf wenige und mathematisch idealisierte Aspekte. Dass nun umgekehrt ein solches, die physikalische Situation stark vereinfachendes Modell trotzdem nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ richtige Resultate hervorbringen kann, sollte auch für die Modellbildung in anderen wissenschaftlichen Bereichen hoher faktischer Komplexität ermutigend sein, auch wenn dies weder die konkrete Begründung im Einzelfall ersetzt noch die Reflektionsstufe eines allgemeinen Prinzips erreicht. Durchaus mögliche Überlegungen zu Letzterem würden uns nun aber zu weit von unserem gewählten Thema abbringen, und es soll stattdessen vorgreifend auf einen anderen, komplementären Aspekt der mathematischen Modellbildung hingewiesen werden, dass nämlich die mathematische Analyse ihre ganze Kraft erst dadurch entfalten kann, dass sie auch rein ideale Objekte, die kein physikalisches Gegenstück mehr besitzen, konstruiert und einbezieht, und dass erst durch diesen Abstraktionsschritt eine vertiefte Einsicht in die konkrete und reale physikalische Situation ermöglicht wird.

Wir betrachten also das Problem, den Oberflächeninhalt in der Klasse aller Flächen mit festem, vorgebenem Rand zu minimieren. Entsprechend dem oben formulierten Grundprinzip der Variationsrechnung lässt sich nun dieses globale Optimalitätskriterium in eine infinitesimale Bedingung übersetzen, und zwar in eine Differentialgleichung, die eine minimierende Fläche notwendigerweise in jedem ihrer Punkte erfüllen muss. Dieses Kriterium lässt sich geometrisch motivieren und formulieren:
Wir gehen von der bekannten Tatsache aus, dass die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der euklidischen Ebene gerade ist; anders ausgedrückt, lässt sich jede Kurve in der Richtung verkürzen, in der sie gekrümmt ist (Abb. 11). Ein ähnliches Prinzip gilt für Flächen im dreidimensionalen Raum. Auch hier lassen sich Verkleinerungen in den Richtungen erzielen, in denen die Fläche gekrümmt ist. Allerdings folgt hieraus nicht, dass eine Fläche kleinsten Flächenmaßes notwendigerweise eben, also gerade im zweidimensionalen Sinne ist, denn wenn die Krümmungen in zwei zueinander senkrechten, die Flächensenkrechte enthaltenden Ebenen stets betragsgleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, so wird eine Verkürzung eines der beiden Ebenenschnitte durch eine gleich große Verlängerung des anderen Ebenenschnittes kompensiert, und der Flächeninhalt bleibt (in erster Näherung) unverändert (Abb. 12). Die durch die

Krümmungen hervorgerufenen Spannungen in den Ebenenschnitten kompensieren sich dann, und die Fläche ist im Spannungsgleichgewicht. Eine Fläche, die sich überall in einem solchen Spannungsgleichgewicht befindet, heißt **Minimalfläche**. Jede Fläche, die den Flächeninhalt minimiert, ist also eine Minimalfläche. Allerdings minimiert nicht jede Fläche im Spannungsgleichgewicht, also jede Minimalfläche, den Flächeninhalt zu vorgegebener Berandung. Derartige nicht minimierende Minimalflächen stellen keinen stabilen, physikalisch realisierbaren Gleichgewichtszustand dar und sind daher nicht experimentell beobachtbar. Wie wir sehen werden, ist ihr Verständnis trotzdem für die vertiefte mathematische Einsicht unerläßlich.
In geometrischer Terminologie lautet das Minimalflächenkriterium, dass die mittlere Krümmung, also der Mittelwert der Krümmungen der verschiedenen Ebenenschnitte, verschwindet. Stellt man die Fläche als Abbild einer Referenzfläche dar, so ergeben sich die gesuchten Differentialgleichungen, die wir allerdings an dieser Stelle nicht explizit niederschreiben wollen (siehe z.B. [4]). Wir werden stattdessen die wesentlichen Phänomene anschaulich anhand von Bildern erläutern und besprechen.

## 4 Symmetrie und Symmetriebrechung

Wie schon formuliert, wollen wir nun zu einer vorgegebenen Randkurve $\gamma$ – der Drahtschlinge im Seifenfilmexperiment – eine Minimalfläche finden, also das mathematische Objekt, das den Seifenfilm modelliert. Dies ist das sog. Plateausche Problem, benannt nach dem belgischen Physiker, der im 19. Jahrhundert durch seine Seifenfilmexperimente, die seinerzeit große Popularität erlangten, dieses Problem aufwarf.

Ist die Kurve $\gamma$ in einer Ebene enthalten, so berandet sie nur eine einzige, und zwar ebenfalls ebene Minimalfläche. Ist $\gamma$ insbesondere eine ebene Kreislinie, so ist die zugehörige Minimalfläche eine ebene Kreisscheibe D (vgl. Abb. 13).
Ein solches $\gamma$ ist rotationssymmetrisch, und die Lösung D übernimmt alle Symmetrien von $\gamma$. Wir wollen nun untersuchen, was mit der Minimalfläche passiert, wenn wir die Randkurve $\gamma$ verbiegen. Man wird nun erwarten, dass sich bei stetiger Veränderung von $\gamma$ die zugehörige Minimalfläche ebenfalls in stetiger Weise verändert – wir werden uns noch damit auseinandersetzen müssen, inwieweit dieses Prinzip gültig ist.

Wir verbiegen also die ebene Kreislinie beispielsweise in die in Abb. 14 gezeichnete Kurve $\gamma'$.

$\gamma'$ ist nun zwar nicht mehr rotationssymmetrisch, hat aber immer noch bestimmte Symmetrien. Es gibt auch eine - in Abb. 15 dargestellte - Minimalfläche mit Rand $\gamma'$, die alle Symmetrien von $\gamma'$ aufweist.

Jedoch hat diese Minimalfläche nicht mehr die kleinstmögliche Oberfläche. Die kleinste Oberfläche wird vielmehr von der in Abb. 16 dargestellten Minimalfläche realisiert.

Diese Minimalfläche ist nun im Gegensatz zu der ersten unsymmetrisch. Wir stellen also fest, dass die symmetrische Fläche, also diejenige, die durch das Argument des Anaximander ausgewählt würde, nicht immer die für unser Wirkungsfunktional optimale und daher auch nicht immer die physikalisch realisierte ist. Im mathematischen Sinne allerdings existiert sie als Lösung der Gleichungen.

Betrachtet man auch alle Zwischenstufen zwischen den Kurven $\gamma$ und $\gamma'$, so sind anfangs die minimierenden Flächen noch symmetrisch. Irgendwo zwischendurch findet dann eine Lösungsverzweigung mit Symmetriebruch statt, d.h. es entstehen mehrere Lösungen, und die minimierenden Lösungen verlieren die Symmetrie. Eine Konsequenz des Symmetrieverlustes der minimierenden Lösung ist, dass es nun mehr als eine derartige Lösung gibt, denn zu jeder Lösung können wir dann eine zu ihr symmetrische gleicher kleinster Oberfläche finden. Allgemein folgt also, dass, je mehr Symmetrien gebrochen werden, es auch umso mehr Lösungen gibt. – Die theoretische Analyse derartiger Symmetriebrüche ist auch in der Physik sehr wichtig, beispielsweise in zeitgenössischen Theorien über die Entstehung des Universums.

# 5 Mehrfache Lösungen

Im vorstehend diskutierten Beispiel haben wir schon gesehen, daß es zu einer Randkurve mehr als eine Minimalfläche geben kann. Dieses Phänomen tritt auch unabhängig von Symmetriebrüchen auf. Die in Abb. 17 gezeichnete Kurve berandet z.B., wie in Abb. 18 und 19 zu sehen, zwei minimierende Flächen von ganz unterschiedlicher Gestalt. Es gibt sogar Randkonfigurationen, die unendlich viele Minimalflächen beranden. Einige Beispiele ([13, 2]) beruhen auf dem Brechen einer kontinuierlichen Familie von Symmetrien, während ein anderes Beispiel ([5]) eine Folge von immer instabiler werdenden Minimalflächen hervorbringt, aufbauend auf weiter unten angedeuteten theoretischen Erkenntnissen.

# 6 Wechsel des topologischen Typs

Wir wollen zunächst eine Randkonfiguration diskutieren, die aus mehr als einer Randkurve besteht, und zwar aus zwei parallelen Kreisen (Abb. 20). Sind die beiden Kreise genügend nahe zusammen, so beranden sie neben der offensichtlichen zweikomponentigen Minimalfläche, die aus zwei Kreisscheiben besteht (Abb. 21), noch zwei weitere Minimalflächen, sogenannte Kettenflächen, welche die Gestalt von eingeschnürten Zylindern haben. In den Abbildungen können wir auch einen wesentlichen Grundzug der numerischen Konstruktionsverfahren für Minimalflächen erkennen, nämlich die Approximation durch Flächen, die aus kleinen standardisierten Teilstücken, hier ebenen Dreiecken, zusammengesetzt sind.

Die erste Kettenfläche (Abb. 22) minimiert hierbei die Oberfläche, während die zweite (Abb. 23) größeren Flächeninhalt als die erste oder die beiden Kreisscheiben hat und - in einem noch genauer zu diskutierenden Sinne - instabil ist. Bewegt man aber die beiden Kreisscheiben auseinander, so verschwinden diese beiden Kettenflächen, wenn ein bestimmter Abstand überschritten wird, und übrig bleibt nur die Kreisscheibenfläche. Dieses Problem zeigt sich dann natürlich auch in den numerischen Algorithmen, wie in den Abb. 24, 25 zu sehen ist. Werden die beiden Randkurven zu weit auseinandergezogen, so werden die in unserem Approximationsverfahren verwandten Dreiecke immer weiter auseinandergezogen und verzerrt. Die numerisch berechnete Fläche sieht dann immer weniger wie eine Minimalfläche aus, d.h. die Güte der numerischen Lösung wird immer schlechter. Da es die gesuchte ringförmige Minimalfläche gar nicht mehr gibt, ist dies nicht verwunderlich. Hiermit haben wir auch schon die wesentliche Schwierigkeit für die numerische Konstruktion von Minimalflächen identifiziert, dass nämlich die zugrundegelegte Geometrie in flexibler Weise an die Gestalt der zu erzeugenden Fläche angepasst werden muss. Überhaupt ist dies ein grundsätzliches Problem bei der numerischen Berechnung optimaler geometrischer Formen.

Die Kettenflächen haben eine andere topologische Gestalt als die beiden Kreisflächen, und ihre Existenz hängt in unstetiger Weise von einem Parameter, hier dem Abstand der beiden Kreislinien, ab.

Als nächstes Beispiel einer Randkurve betrachten wir die sogenannte Kleeblattschlinge (Abb. 26). Man erhält zunächst die in Abb. 27 dargestellte Minimalfläche, welche übrigens wieder die Symmetrien der Randkurve verletzt. Es gibt auch eine symmetrische Lösung (Abb. 28), welche aber wieder nicht minimiert, sondern instabil ist. Beide dieser Lösungen weisen Selbstdurchschneidungen auf und sind deshalb im Seifenfilmexperiment nicht physikalisch realisierbar. Das mathematische Modell liefert uns weitere Lösungen, von denen einige frei von Selbstdurchschneidungen sind. Diese Minimalflächen sind allerdings von komplizierter topologischer Gestalt.

Anschaulich lässt sich das Phänomen, dass durch Übergang zu einem komplizierteren topologischen Typ Selbstdurchschneidungen der Flächen vermieden werden können, aber wohl besser in etwas einfacheren Situationen erläutern. Wir betrachten hierzu eine Randkonfiguration, die aus zwei miteinander verschlungenen Kreislinien besteht. Spannt man in jeden dieser Kreise eine Kreisscheibe als Minimalfläche ein, so schneiden sich die beiden Flächen. Ein komplizierter aussehendes Gebilde von der Art eines verdrehten Kreisringes vermeidet diese Selbstdurchschneidungen (in den Abb. 29, 30 und 31 aus verschiedenen Richtungen und mit unterschiedlicher Feinheit der numerischen Approximation zu sehen) und führt deswegen auch zu einem kleineren Flächeninhalt. Die minimierende Fläche entwickelt also Löcher, allerdings nicht in dem Sinne, dass ein Stück herausgeschnitten wird – was zu einer weiteren Randkomponente führen

würde, was aber in unserem Kontext nicht zulässig wäre –, sondern dadurch, dass die Teile auf neue Weise zusammengeheftet werden, so dass man anschaulich die Hand durch die Fläche hindurchstecken kann.
Auch für nicht verknotete oder verschlungene Randkonfigurationen werden Selbstschnitte der eingespannten Minimalfläche manchmal erst durch Übergang zu einer komplizierteren Gestalt vermieden, wie in Abb. 32 und 33 zu sehen. Aber auch in Fällen, wo keine Selbstschnitte auftreten, kann ein komplizierterer topologischer Typ der Minimalfläche zu einem kleineren Flächeninhalt führen als bei einem einfacheren Typ möglich, wie die Gegenüberstellungen in den Abb. 34, 35 und 36, 37 zeigen.

# 7 Stabile und instabile Lösungen

In den vorstehend diskutierten Beispielen sind mehrfach Minimalflächen aufgetreten, die der Oberfläche kein Minimum verleihen. Es stellt sich heraus, dass es theoretisch sinnvoller und für das Studium zugehöriger dynamischer Aspekte sogar unerlässlich ist, nicht nur Anzahl und mögliche Typen der minimierenden Flächen zu untersuchen, sondern die Struktur der Menge aller Minimalflächen zu jeweils vorgegebener Berandung zu studieren, auch wenn manche dieser Minimalflächen instabil und daher experimentell nicht realisierbar sind. Ein wesentlicher Grund dafür, in diesem Sinne über das, was experimentell realisierbar ist, hinauszugehen, ist, dass wir zwar Lösungsfamilien finden können, die in stetiger Weise von der Randkurve abhängen, dass dies aber nicht unbedingt für die minimierende Fläche gilt. Welche von den mathematisch möglichen Lösungen das absolute Minimum realisiert, kann sich bei einer stetigen Variation der Randkurve sprunghaft ändern.
Wir wollen das Phänomen der Existenz instabiler Lösungen durch eine einfache und anschauliche Überlegung erläutern. Wir betrachten den Graphen einer differenzierbaren Funktion $z = f(x)$ mit zwei lokalen Minima $x_1$ und $x_2$ (Abb. 38). Zunächst hängt es von der relativen Höhe der Funktionswerte in diesen beiden Punkten ab, in welchem von ihnen das absolute Minimum realisiert wird, und durch Verschiebungen dieser Höhen gegeneinander kann sich die Position dieses absoluten Minimums sprunghaft ändern.
Es ist dann anschaulich plausibel, dass zwischen diesen beiden Minima noch ein weiterer kritischer Punkt $x_3$ von $f$ (d.h. ein Punkt mit $f'(x_3) = 0$) liegen muss, und zwar in diesem eindimensionalen Fall ein lokales Maximum (Abb. 39). Hat man eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$, so muss bei zwei lokalen Minima wiederum (unter gewissen hier nicht weiter präzisierten Bedingungen) ein weiterer instabiler kritischer Punkt auftreten, bei dem diesmal allerdings der Graph von $f$ eine sattelförmige Gestalt besitzt. Bildhaft gesprochen: Will man von einem Gebirgstal über eine Bergkette in ein anderes Tal gelangen, so wählt man in der Regel einen Pass, also einen Weg, bei dem die größte auftretende Höhe so gering wie möglich ist. Der Passpunkt, also der höchste Punkt auf einem solchen optimalen Weg, entspricht dann dem instabilen kritischen Punkt des Graphen. In dieser zweidimensionalen Situation gibt

es außerdem lokale Maxima, also Berggipfel in unserem anschaulichen Bild, als weitere kritische Punkte. Je höher die Dimension wird, desto mehr mögliche Typen von instabilen kritischen Punkten können auftreten.
Die Kenntnis der Lage derartiger instabiler kritischer Punkte ist u.a. aus dem folgenden Grunde wichtig: Bewegt sich beispielsweise ein Teilchen unter dem Einfluss einer nach unten gerichteten Kraft, beispielsweise der Schwerkraft, auf dem Graphen der Funktion $f(x)$ in der Abb. 39, so hängt es davon ab, ob sich die Anfangsposition links oder rechts von dem instabilen kritischen Punkt befindet, welchem der beiden Minima der Punkt schließlich zustrebt. Der instabile kritische Punkt grenzt also die Einflussbereiche zweier lokaler Attraktoren (Anziehungspunkte) voneinander ab.

Bei unserem Minimalflächenproblem ist nun die betrachtete Funktion das Maß der Oberfläche. Diese Funktion hängt im Gegensatz zu dem gerade diskutierten Beispiel nicht mehr von endlich vielen Variablen ab, sondern von unendlich vielen, da wir nun alle unendlich vielen Punkte auf einer Fläche variieren können. Die Analysis wird deswegen ungleich schwieriger. Nichtsdestoweniger kann eine vollständige Theorie aller kritischen Punkte des Oberflächenfunktionals, also aller Minimalflächen, und zwar von beliebiger topologischer Komplexität, durchgeführt werden ([9, 5, 6]). Wir wollen versuchen, einige wichtige konzeptionelle Aspekte dieser Theorie zu erläutern, soweit dies im Kontext dieses Beitrags angemessen und möglich ist.

# 8 Lösungsverzweigungen und das Prinzip der stetigen Veränderung der Lösungen

Im Vorstehenden haben wir anscheinend allerlei Diskontinuitäten und sprunghafte Gestaltänderungen gesehen. Dies sieht wenig ermutigend für eine systematische Behandlung aus. Eine tiefer eindringende mathematische Analyse erweist jedoch, dass Lösungen nicht aus dem Nichts entstehen oder spurlos verschwinden können. Vielmehr ändert sich der Lösungsraum in kontrollierter Weise bei einer stetigen Variation der relevanten Parameter, hier also der Gestalt des Randes. Das scheinbar unstetige Verschwinden von Minimalflächen eines bestimmten Typs bei einer Veränderung der Randkurve, wie im Beispiel der Kettenfläche, findet dann seine Erklärung als Lösungsverzweigung verbunden mit einem Übergang zu einem anderen topologischen Typ. Dies erschließt sich allerdings erst vermittels abstrakterer mathematischer Konzepte. Wenn ein Lösungstyp bei einer Veränderung der Randdaten instabil wird, so zweigt beim Übergang zur Instabilität eine andere Lösungsfamilie ab. Diese Familie wiederum endet auch nicht bei diesem Übergangspunkt, sondern setzt sich ebenfalls darüber hinaus fort, mit der Konsequenz, dass bei diesem Übergang nicht nur eine, sondern mindestens zwei stabile Lösungen abzweigen. So entstehen also bei der kritischen Variation des Randparameters aus einer stabilen mindestens eine instabile und zwei stabile Lösungen. Im Parameterraum kreuzen sich zwei Lösungsfamilien, und die beidseitig stabile Familie wendet sich am Übergangspunkt. Vor diesem Übergangspunkt gibt es dann beispielsweise nur die ursprüngliche, in diesem Bereich stabile Lösung, während es danach die instabile Lösung und die beiden stabilen aus der zweiten Lösungsfamilie gibt. Dies lässt sich einerseits aus abstrakten Argumenten erschließen, andererseits aber auch in konkreten Situation wie der anfangs diskutierten des Symmetriebruches im Detail nachrechnen ([15]). Dies liefert dann ein anschauliches Beispiel einer Lösungsbifurkation. (Solche Bifurkationsprozesse sind insbesondere in der von R. Thom propagierten Katastrophentheorie ([18]) systematisch klassifiziert und dann als Entfaltungsprozesse gedeutet und auf entwicklungsbiologische und andere Fragestellungen angewandt worden.) Die grundlegende Erkenntnis in diesem Kontext ist, dass bestimmte Erhaltungssätze für die Lösungszahlen und -typen gelten. Zieht man beispielsweise in der skizzierten Situation die Anzahl der instabilen von derjenigen der stabilen Lösungen ab, so ergibt sich vor der Bifurkation das gleiche Resultat wie danach, nämlich 1 - 0 bzw. 2 - 1 = 1. Auch der Wechsel des topologischen Typs wird in einer abstrakteren Sichtweise kontinuierlich, wenn sich beispielsweise die Konfiguration aus zwei Kreisscheiben als Grenzsituation von zylindrischen, ringförmigen Gebilden deuten lässt. Dies führt allerdings in einen ganz anderen Zweig der Mathematik, die algebraische Geometrie, die sich mit den Lösungsgebilden algebraischer Gleichungen in komplexen Räumen beschäftigt. Es ist eine im Wesentlichen auf den großen Mathematiker Bernhard Riemann (1826 – 1866) zurückgehende Erkenntnis, dass sich die für das Minimalflächenproblem allein relevante Struktur der auftretenden Referenzflächen, ihre sog. konforme Struktur, durch derartige algebraische Gleichungen beschreiben lässt. Das genaue Verständnis der Übergänge zwischen den verschiedenen topologischen Gestalten beruht allerdings wesentlich auf mathematischen Entwicklungslinien der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Auf diese Weise führt das Minimalflächenproblem auf die Formulierung und den Nachweis bestimmter Erhaltungssätze für Verzweigungsprozesse in den abstrakten Räumen der algebraischen Geometrie. Die zugrundeliegende Mathematik gewinnt ihre Inspiration aus der geometrischen und physikalischen Anschauung, aber sie entfaltet ihre ganze Kraft erst dadurch, dass sie sich über diese Anschauung erhebt und auch bestimmte physikalisch nicht mehr realisierbare, ideale Gestalten in ihre Analysen und Konstruktionen einbezieht. Der dahinterstehende konzeptionelle Reichtum der modernen Mathematik konnte allerdings hier nur sehr vage angedeutet werden.

# 9 Beziehung zu aktuellen Feldtheorien: Stringtheorie als Quantisierung des Minimalflächenproblems

Abschließend soll kurz die Beziehung des Minimalflächenproblems zu den aktuellen physikalischen Feldtheorien angeschnitten werden. In einem stark idealisierten physikalischen Modell geht man von als punktförmig vorgestellten Teilchen aus, die sich klassisch (bei Abwesenheit äußerer Kräfte) geradlinig bewegen. Schneiden sich zwei solche Bahnen, kommt es zu einer Wechselwirkung, s. Abb. 40.

Ein Ansatz, dem Teilchen eine innere Struktur zu verleihen, besteht nun darin, es als geschlossene Kurve aufzufassen. Bewegt sich eine solche Kurve in der Zeit, so ist die Bahn eine Fläche, und klassisch sollte sich eine Minimalfläche ergeben. Wechselwirkungen werden nun nicht mehr durch Überkreuzungen, sondern durch Änderungen des topologischen Typs beschrieben, wie in Abb. 41 angedeutet.

Beim Übergang von der klassischen zur Quantenmechanik müssen die Teilchenbahnen quantisiert werden. Die Bahn eines punktförmigen Teilchens ist jetzt nicht mehr genau bestimmbar, insbesondere also nicht unbedingt geradlinig. Eine Bahn wird aber mit umso größerer Wahrscheinlichkeit durchlaufen, je kürzer sie ist. Dies ist der Grundgedanke der Feynmanschen Pfadintegrale aus der theoretischen Physik. Die geradlinige klassische Bahn hat also auch quantenmechanisch als kürzestmögliche Bahn noch eine gewisse herausgehobene Rolle. Zu jeder anderen Bahn, die in einer Richtung von dieser geradlinigen Bahn abweicht, gibt es eine zu ihr symmetrische in der anderen Richtung mit gleicher Wirkung, und nach dem Prinzip des Anaximander, wenn eine solche Übertragung einer Betrachtungsweise aus der Anfangszeit der spekulativen Kosmologie in die moderne Elementarteilchenphysik erlaubt ist, kompensieren sich solche symmetrischen Paare gegenseitig, und übrig bleibt nur die partnerlose, zu sich selbst symmetrische, geradlinige Bahn. Dies ist allerdings nur im sog. klassischen Limes richtig, und quantenmechanisch müssen tatsächlich alle Bahnen berücksichtigt werden, mit umso kleinerem Gewicht, je länger sie sind. In der sogenannten Stringtheorie wird nun analog das Oberflächenfunktional quantisiert, d.h. ein kreisförmiges Teilchen kann wiederum alle möglichen Bahnen durchlaufen, mit umso größerer Wahrscheinlichkeit, je geringer die Oberfläche ist. Die Stringtheorie liefert einen vielversprechenden und in der Physik derzeit intensiv untersuchten Zugang zum zentralen Problem der theoretischen Physik, der Vereinheitlichung aller bekannten Feldkräfte (Gravitation, elektromagnetische Wechselwirkung, schwache Zerfallsprozesse und starke Kernbindungskräfte). Es spannt sich auch ein bogen von dem ersten tieferen Ansatz zum Ursprung des Universums, dem ἄπειρον des Anaximander, zu den Modellen und Spekulationen der Stringtheorie, die übrigens den uns mittlerweile vertrauten Urknall durch einen durch eine Symmetrie, die sog. T-Dualität, vermittelten Übergang in ein anderes Universum ersetzen. – Ich hoffe, dass ich nun diesen Bogen hier nicht überspannt habe, und kehre deswegen noch einmal kurz zu meinem Hauptthema zurück. Die klassischen kritischen Punkte, also die Minimalflächen, spielen nämlich wiederum eine ausgezeichnete Rolle, und in unserem Forschungsprojekt wird die Stringtheorie unter diesem Gesichtspunkt, also als Quantisierung des Minimalflächenproblems, analysiert. Umgekehrt können dabei die neuen in der theoretischen Physik entdeckten Symmetrien, die sog. Supersymmetrien, auch die klassische Theorie der Minimalflächen und die geometrische Variationsrechnung neu befruchten.

## Quellen- und Abbildungsnachweis:

Die wesentlichen Quellen und einiges Hintergrundmaterial zur Theorie der Variationsrechnung und Optimierung im Allgemeinen und derjenigen der Minimalflächen im Besonderen sind in der nachfolgenden Bibliographie aufgeführt. Die Minimalflächenbilder stammen aus den Untersuchungen von X. Li-Jost [11, 12] zur numerischen Konstruktion von Minimalflächen am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften.

Die Aufnahme des Münchener Olympiadachs und die Fotographien der Seifenfilmexperimente gehören dem Institut für leichte Flächentragwerke der Universität Stuttgart, und zwar sind die entsprechenden Abbildungen mit freundlicher Genehmigung entnommen aus [17],

p. 111 (Abb. 2),

p. 109 (Abb. 3, 7)

p. 13 (Abb. 8) (ähnliche Abbildungen sind mir auch von Herrn J. G. Helmcke vor ca. 20 Jahren zur Verfügung gestellt worden)

sowie aus [3],

p. 172 (Abb. 1)

p. 130 (Abb. 4)

p. 167 (Abb. 5, 6)

## Literatur


[1] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, Minimal Surfaces I, II, Springer, Berlin etc., 1992

[2] R. Gulliver, S. Hildebrandt, Boundary configurations spanning continua of minimal surfaces, manuscripta mathematica 54, pp. 323–347, 1986

[3] S. Hildebrandt, A. Tromba, Kugel, Kreis und Seifenblasen. Optimale Formen in Geometrie und Natur, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1996

[4] J. Jost, Differentialgeometrie und Minimalflächen, Springer, Berlin etc., 1994

[5] J. Jost, Orientable and nonorientable minimal surfaces, pp. 819–826 in: World Congress of Nonlinear Analysts '92 (Hrsg. V. Lakshmikantham), Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1996

[6] J. Jost, Minimal surfaces and Teichmüller theory, pp.149–211 in: Tsing Hua Lectures on Geometry and Analysis (Hrsg. S.T. Yau), International Press, Cambridge, Mass., 1997

[7] J. Jost, Bosonic Strings: A Mathematical Treatment, Amer. Math. Soc. und International Press, Providence, R.I., 2001

[8] J. Jost, X. Li-Jost, Calculus of Variations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998

[9] J. Jost, M. Struwe, Morse-Conley theory for minimal surfaces of varying topological type, Inventiones mathematicae 102, pp. 465–499, 1990

[10] G. S. Kirk, J. E. Raven, M. Schofield, Die vorsokratischen Philosophen: Einführung, Texte und Kommentare, aus dem Englischen übersetzt von K. Hülser, Metzler, Stuttgart, Weimar, 1994/2001

[11] X. Li-Jost, The numerical construction of doubly connected minimal surfaces, erscheint demnächst

[12] X. Li-Jost, The numerical construction of minimal surfaces of higher topological type, in Vorbereitung

[13] F. Morgan, A smooth curve in $R^3$ bounding a continuum of minimal manifolds, Archive of Rational Mechanics and Analysis 75, pp.193–197, 1980

[14] J. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer, Berlin etc., 1975

[15] J. Nitsche, Non-uniqueness for Plateau's problem. A bifurcation process, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.2, pp.361–373, 1976

[16] J. Nitsche, Lectures on minimal surfaces, vol.1: Introduction, fundamentals, geometry and basic boundary problems, Cambridge Univ. Press, Cambridge etc., 1989

[17] Prozeß und Form "Natürlicher Konstruktionen", K. Teichmann u. J. Wilke (Hrsg.), Ernst & Sohn, Berlin, 1996

[18] R. Thom, Stabilité Structurelle et Morphogénèse, InterEditions, Paris, $^2$1977