**Christian Schöner**
ch.schoener1@web.de
FernUniversität Hagen (M. Sc. Mathematik)
Betreuer: Jun.-Prof. Dr. Steffen Kionke, LG JP Algebra

1. Juli 2022

## Abstract: Gruppen mit links-invarianter Totalordnung, die nicht auf $\mathbb{R}$ wirken

Unter Annahme der Kontinuumshypothese gilt in Konsequenz der Hausdorff'schen Theorie der $\eta_\alpha$-Mengen mithilfe von Ultrapotenzen, dass eine Gruppe $G$ mit $|G| \leqslant \aleph_1$ genau dann (ordnungserhaltend) treu auf auf die hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ wirkt, wenn eine links-invariante Totalordnung $\preceq$ auf $G$ existiert. Wirkung auf $\mathbb{R}$ ist selektiver: Es ist ein bekanntes Ergebnis, siehe z.B. Ghys, [2], Theorem 6.8, dass eine abzählbare Gruppe $G$ genau dann treu auf $\mathbb{R}$ wirkt, wenn auf $G$ eine $\preceq$ existiert. Aufgrund bekannter Ergebnisse von Hölder und Hahn wirkt eine Gruppe $G$ genau dann frei auf $\mathbb{R}$, wenn sie abelsch und torsionsfrei mit $|G| \leqslant |\mathbb{R}|$ ist. Zudem gilt für alle Familien von Gruppen $(G_r)_{r\in\mathbb{R}}$ mit treuer Wirkung auf $\mathbb{R}$, dass ihr freies Produkt $\ast_{r\in\mathbb{R}} G_r$ wieder treu auf $\mathbb{R}$ wirkt; weiter wirkt jedes höchstens abzählbare direkte Produkt von Gruppen, die treu auf $\mathbb{R}$ wirken, wieder treu auf $\mathbb{R}$. Es existieren aber auch Gruppen $G$ mit $\preceq$ und $\aleph_1 \leqslant |G| \leqslant |\mathbb{R}|$, die nicht auf $\mathbb{R}$ wirken: Uns bekannte Beispiele sind zu finden unter freien amalgamierten Produkten; unter überabzählbaren, beschränkten direkten Produkten nicht-abelscher Gruppen; unter einer überabzählbaren Verallgemeinerung der Fundamentalgruppe der Klein'schen Flasche. Weiter wirkt die Gruppe der Keime, eine einfache Faktorgruppe von $\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})$, nicht auf $\mathbb{R}$. Außerdem existiert für alle Gruppen $G$ mit $|G| \leqslant |\mathbb{R}|$ und $\preceq$ eine Gruppe $K$ mit $\preceq$, die nicht auf $\mathbb{R}$ wirkt, und zudem $|K| \leqslant |\mathbb{R}|$, sowie $G \hookrightarrow K$ genügt. Dieser Einbettungssatz basiert auf Ergebnissen von Bludov und Glass, [1], Corollary 6.7, sowie dem bekannten Satz über die Einbettung einer torsionsfreien Gruppe in eine Gruppe, die in genau 2 Konjugationsklassen zerfällt, siehe Higman, Neumann und Neumann, [3], Theorem III.

Das Thema dieser M. Sc. Abschlussarbeit baut auf der Schrift [4] von K. Mann auf, deren Ergebnisse wir durch Literaturrecherche ergänzt und weitergeführt haben.

## Literatur


[1] V. V. Bludov und A. M. W. Glass. “Word problems, embeddings, and free products of right-ordered groups with amalgamated subgroup”. In: *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 99.3 (2009), S. 585–608.

[2] É. Ghys. “Groups acting on the circle.” In: *Enseign. Math. (2)* 47.3-4 (2001), S. 329–407.

[3] G. Higman, B. H. Neumann und H. Neumann. “Embedding theorems for groups”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 24 (1950), S. 247–254.

[4] K. Mann. “Left-orderable groups that don’t act on the line”. In: *Math. Z.* 280.3-4 (2015), S. 905–918.