Das Verhalten quantenmechanischer Teilchen in der Umgebung eines Schwarzen Loches

Die Mathematik und Physik haben sich immer wieder gegenseitig inspiriert und in ihrer Entwicklung fruchtbar beeinflusst. Ein frühes Beispiel für eine fächerübergreifende Zusammenarbeit ergab sich aus dem klassischen Problem der Planetenbewegung: die Newton'sche Gravitationstheorie führte auf die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung, welche fortan das mathematische Fundament für die Formulierung physikalischer Theorien bildeten. In heutiger Zeit ist der Kontakt zwischen der Mathematik und der Theoretischen Physik viel enger, und die Disziplin der Mathematischen Physik, die in Deutschland traditionell der Mathematik zugerechnet wird, ist ganz dem spannungsvollen Grenzbereich zwischen Mathematik und Physik gewidmet. Die Mathematische Physik gliedert sich in viele Teilgebiete. Wir beschränken uns im Folgenden auf physikalische Anwendungen in der Quantenmechanik und der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die verwendeten mathematischen Methoden kommen aus der Differentialgeometrie, der Funktionalanalysis und den partiellen Differentialgleichungen.

Für sehr große physikalische Systeme wie Sternhaufen oder Galaxien ist die Newton'sche Gravitationstheorie nicht mehr gültig. Anstatt dessen ist die Allgemeine Relativitätstheorie zu verwenden, die aufgrund genauester experimenteller Tests allgemein anerkannt ist und darüber hinaus astrophysikalische Phänomene wie Schwarze Löcher vorhersagt. Auch in sehr kleinen Systemen wie Atomen, Molekülen oder Atomkernen versagt die klassische Mechanik. Im Gegensatz zur klassischen Physik zeigen Teilchen in solchen Systemen nämlich auch Eigenschaften einer Welle und verhalten sich nicht mehr deterministisch. Diese Beobachtung wird in der Quantenmechanik berücksichtigt, wo man ein Teilchen durch eine Wellenfunktion beschreibt, deren Absolutquadrat die Wahrscheinlichkeit des Teilchens angibt, sich an einem bestimmten Ort aufzuhalten. In der Quantenfeldtheorie geht man einen Schritt weiter und versucht, zusätzlich zu den Teilchen auch die Felder zu quantisieren. Trotz intensiver Bemühungen (Stringtheorie, Ashtekar-Programm) gibt es bisher noch keine befriedigende Theorie der Quantengravitation. Doch immerhin kann man die Quantenmechanik ohne Probleme mit der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie verbinden und erhält so Gleichungen, die das Verhalten quantenmechanischer Teilchen in einem klassischen Gravitationsfeld unter Berücksichtigung aller relativistischen Effekte beschreiben. Das Studium dieser Gleichungen ist mathematisch sehr reizvoll und liefert neue Erkenntnisse über die Struktur der fundamentalen physikalischen Wechselwirkungen. Ein aktueller Forschungsschwerpunkt am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften ist die Untersuchung quantenmechanischer Teilchen in der Umgebung eines Schwarzen Loches. Im Folgenden sollen einige Ergebnisse dieser Untersuchungen anschaulich beschrieben werden.

Doch werfen wir zunächst einen Blick auf den mathematischen und physikalischen Hintergrund. Einsteins revolutionierende Idee bei der Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie war es, die Gravitationskraft über die Krümmung einer vierdimensionalen Raumzeit zu beschreiben. Beispielsweise wird die Bewegung der Erde im Schwerefeld der Sonne so erklärt, dass die Sonne die Geometrie der Raumzeit verändert, während sich die Erde in der resultierenden gekrümmten Raumzeit längs einer Geodäten (also einer Kurve minimaler Länge) bewegt. Bei der mathematischen Formulierung seiner Ideen konnte Einstein auf grundlegende Arbeiten von Carl Friedrich Gauß und Bernhard Riemann zurückgreifen. Gauß hatte sich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit der Theorie zweidimensionaler Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum beschäftigt. Er stellte fest, dass es zur Bestimmung von Abständen auf der Fläche nicht auf die genaue Lage der Fläche im Raum ankommt, sondern nur auf die intrinsische Geometrie der Fläche selbst. Als „Abstand“ zweier Punkte der Fläche verwendete er dabei einfach die Länge der kürzesten Kurve, welche die beiden Punkte miteinander verbindet und ganz auf der Fläche verläuft. Außerdem machte Gauß die wichtige Beobachtung, dass eine bestimmte Krümmungsgröße, die heute Gaußkrümmung genannt wird, ebenfalls intrinsisch ist, also unabhängig von der Einbettung der Fläche in den umgebenden Raum definiert ist. Riemann vereinheitlichte und verallgemeinerte den Begriff der intrinsischen Krümmung auf Flächen beliebiger Dimension. Dieser Krümmungsbegriff wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie verwendet. Aus dem Programm von Gauß und Riemann entwickelte sich die moderne Differentialgeometrie, die heute eines der aktivsten Gebiete mathematischer Forschung ist.

Die geometrische Beschreibung der Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie führt auf eines der wohl erstaunlichsten und mysteriösesten astrophysikalischen Phänomene: das Schwarze Loch. Wird eine sehr große Masse auf ein sehr kleines Volumen komprimiert (beispielsweise durch den Gravitationskollaps eines massiven Sterns oder Galaxienkerns), so kann die Raumzeit so stark gekrümmt werden, dass aus einer Umgebung der Masse kein Beobachter, keine Materie, ja nicht einmal Licht nach außen dringen kann. Die Masse im Schwarzen Loch kann also nicht beobachtet werden, sie ist hinter einem so genannten Ereignishorizont verborgen. Materie kann aber von außen in einem irreversiblen Prozess in ein Schwarzes Loch „hineinfallen“. Den ersten Hinweis auf ein Schwarzes Loch erhielt bereits Karl

Schwarzschild im Jahre 1916 kurz nach Aufstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Er bestimmte nämlich das Gravitationsfeld außerhalb einer ruhenden Punktmasse und stellte fest, dass die resultierende Raumzeit einen Ereignishorizont besitzt. Dieser Effekt wurde allerdings zunächst in der Physik nicht ernst genommen. Im Jahre 1965 gelang es Kerr und Newman, das Gravitationsfeld außerhalb einer rotierenden, elektrisch geladenen Punktmasse zu berechnen. Die erhaltene Raumzeit ist wesentlich allgemeiner als die von Schwarzschild, doch auch sie hat einen Ereignishorizont. Anfang der 70er-Jahre konnten Hawking und Penrose zeigen, dass Singularitäten der Raumzeit, und damit auch Schwarze Löcher, unter generischen Bedingungen auftreten. Seitdem gehen die meisten Physiker davon aus, dass es in unserem Kosmos tatsächlich Schwarze Löcher gibt. Diese Vorstellung wird mittlerweile sogar von vielen experimentellen Hinweisen gestützt. Insbesondere wird im Zentrum unserer Milchstraße ein Schwarzes Loch vermutet.

Die Quantenmechanik geht in den Anfängen auf Max Planck zurück und wurde in ihrer heutigen Form wesentlich von Bohr, Schrödinger und Pauli entwickelt. Paul Dirac stellte 1927 die nach ihm benannte Wellengleichung des Elektrons auf, die den Schlüssel für die relativistische Verallgemeinerung der Quantenmechanik darstellte. Ihren ersten großen Erfolg hatte die Quantenmechanik in der Atomphysik, doch wird sie heute in fast allen Bereichen der Physik angewendet. In der Quantenmechanik gibt es den Welle-Teilchen-Dualismus, nach dem sich ein quantenmechanisches Teilchen in manchen Situationen wie eine Welle verhält, während eine Welle umgekehrt auch einen Teilchencharakter haben kann. Der Wellencharakter hat zur Folge, dass, ähnlich wie eine Wasserwelle nur auf eine Größe etwa ihrer Wellenlänge lokalisiert werden kann, der Aufenthaltsort eines quantenmechanischen Teilchens nicht beliebig genau festgelegt werden kann. Genauer besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation, dass das Produkt aus der Orts- und Impulsunschärfe immer größer ist als $h/4\pi$, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist. Der Teilchencharakter zeigt sich dagegen z. B. beim „Belichten" eines fotographischen Films mit einem Elektronenstrahl. Dabei regen die Elektronen nämlich ganz wie punktförmige Teilchen einzelne Atome des Films an. Die auf den ersten Blick konträr erscheinenden Konzepte eines Teilchens und einer Welle sind in der Quantenmechanik über die probabilistische Interpretation konsistent miteinander verknüpft: Die physikalischen Gleichungen der Quantenmechanik sind deterministische Gleichungen für die Wellenfunktion. Die Wellenfunktion selbst ist aber in dem Sinne unphysikalisch, dass sie nicht direkt beobachtbar ist. Nur das Absolutquadrat der Wellenfunktion hat als Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen bei Messungen an einem bestimmten Ort anzutreffen, eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Dadurch, dass für den Messprozess nur Wahrscheinlichkeiten vorhergesagt werden können, geht für das Verhalten des Teilchens der Determinismus verloren.

Ähnlich wie bei der Allgemeinen Relativitätstheorie stand auch bei der Entwicklung der Quantenmechanik der mathematische Rahmen schon vorher bereit. So bildet der Zustandsraum der Wellenfunktionen einen unendlich-dimensionalen Skalarproduktraum, und solche Räume waren bereits Anfang des 20. Jahrhunderts von David Hilbert eingeführt und genau untersucht worden. Die Quantenmechanik warf ihrerseits eine Vielzahl mathematischer Probleme auf, mit deren Lösung sich Mathematiker wie von Neumann und Kato beschäftigten. So entwickelte sich die Disziplin der Funktionanalysis, die noch heute ein Gebiet lebendiger mathematischer Forschung ist.

Die Quantenmechanik führt auf eine Reihe seltsam anmutender Effekte. Wir erwähnen hier nur einen davon: den Tunneleffekt. Dazu betrachten wir ein Teilchen in einem eindimensionalen Potential, das zwei Minima besitzt (siehe **Abb. 1**). Für ein klassisches Teilchen ist jedes der Minima ein stabiler Gleichgewichtspunkt; d. h. ein Teilchen, das sich zu Beginn in einem Minimum befindet und eine genügend kleine Anfangsgeschwindigkeit hat, wird sich für alle Zeiten in der Nähe dieses Minimums aufhalten. Insbesondere kann ein klassisches Teilchen nicht von einem Minimum in das andere gelangen, weil die dazwischenliegende Potentialbarriere aus energetischen Gründen nicht überwunden werden kann. Für quantenmechanische Teilchen ist die Situation jedoch grundlegend anders. Zwar ist auch für ein quantenmechanisches Teilchen die Potentialbarriere energetisch verboten, doch kann das Teilchen aufgrund seiner Ortsunschärfe die Barriere „durchtunneln" und so von einem Minimum zum anderen übergehen. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist umso kleiner, je höher die Barriere ist, aber sie ist für eine Barriere endlicher Höhe immer strikt positiv.

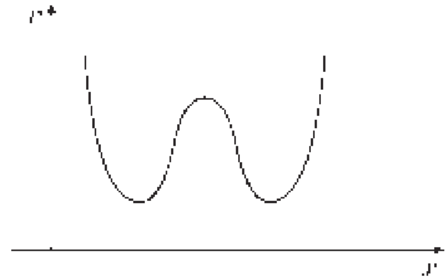
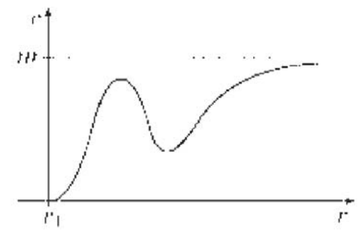


Abb. 1

Abb. 2



Wir kehren nun zurück zur Dynamik quantenmechanischer Teilchen in der Umgebung eines Schwarzen Loches. Um in einem möglichst allgemeinen Rahmen zu arbeiten, betrachten wir eine Raumzeit mit Kerr-Newman-Geometrie. In dieser Raumzeit lässt sich die Diracgleichung formulieren; sie beschreibt das Verhalten eines massiven quantenmechanischen Teilchens (beispielsweise eines Elektrons) in der Gegenwart eines rotierenden, elektrisch geladenen Schwarzen Loches. In großer Entfernung des Schwarzen Lochs ist das Gravitationsfeld schwach und kann in guter Näherung durch ein Newton'sches Zentralpotential beschrieben werden. Ein klassisches Punktteilchen kann sich in dieser Newton'schen Näherung auf einer stabilen Bahn, nämlich einer Keplerellipse, um das Schwarze Loch im Zentrum bewegen. Bei exakter Behandlung des Gravitationsfelds (also ohne Newton'sche Näherung) gibt es für ein klassisches Teilchen immer noch stabile Bahnen, die aber aufgrund des relativistischen Effektes der Periheldrehung nicht mehr geschlossen, sondern rosettenförmig sind. Quantenmechanische Teilchen verhalten sich dagegen ganz anders. In einer Arbeit von Finster, Kamran, Smoller und S.-T. Yau wird nämlich folgendes Resultat bewiesen (der erste Autor war 2001 wissenschaftlicher Mitarbeiter, der zweite und dritte Autor regelmäßiger Besucher am Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften): Wir betrachten ein beliebiges beschränktes Raumgebiet außerhalb des Ereignishorizonts. Dann strebt die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Diracteilchen in diesem Gebiet aufhält, nach null, wenn die Zeit nach unendlich geht. Anschaulich gesagt, muss das Teilchen also jedes noch so große beschränkte Gebiet irgendwann verlassen! Dies bedeutet, dass es im Gegensatz zur klassischen Situation keine stabile Bewegung um das Schwarze Loch geben kann. Ein quantenmechanisches Teilchen muss für große Zeiten entweder in das Schwarze Loch „hineinfallen“ oder sich immer weiter von ihm entfernen.

Der Unterschied zwischen klassischem und quantenmechanischem Verhalten kann mithilfe des Tunneleffekts veranschaulicht werden. Nach Abseparieren der Winkelabhängigkeit kann der Radialteil der Diracgleichung nämlich als Wellengleichung für ein Teilchen in einem effektiven Potential der typischen Form wie in **Abbildung 2** aufgefasst werden (r_1 bezeichnet den Ereignishorizont und m die Ruhemasse). Das lokale Minimum des Potentials entspricht der klassischen stabilen Bahn um das Schwarze Loch. Ein quantenmechanisches Teilchen kann die Potentialbarriere „durchtunneln“ und auf diese Weise vom Minimum in das Schwarze Loch gelangen. Befindet es sich erst im Schwarzen Loch, so ist es dort gefangen und kann nicht wieder entweichen. Deshalb nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen außerhalb des Schwarzen Lochs befindet, mit der Zeit monoton ab und strebt nach null, wenn die Zeit nach unendlich geht.

Dieses Tunnelargument ist leider zu einfach, um den genauen, für das Langzeitverhalten verantwortlichen physikalischen Effekt aufzudecken. Zu diesem Zweck muss man die Dynamik der Wellenfunktion genauer untersuchen. In einer nachfolgenden Arbeit der genannten Autoren wird gezeigt, dass die Wellenfunktion für große Zeiten generisch zur Potenz $t^{-\frac{5}{6}}$ abfällt, und zwar durch folgenden Mechanismus. Ähnlich wie sich eine Schallwelle nach Frequenzen, nämlich in die Grund- und Obertöne, aufspalten lässt, kann man auch das Frequenzspektrum der Wellenfunktion betrachten. Über die Planck'sche Formel $E = h\nu$ kann die Frequenz in der Quantenmechanik mit der Energie identifiziert werden, und wir erhalten somit eine Zerlegung der Wellenfunktion in Komponenten unterschiedlicher Energie. Die Komponente mit hoher Energie wird durch die Gravitationskraft nur wenig beeinflusst und wandert nahezu ungestört ins Unendliche; der zugehörige Beitrag zur Wellenfunktion fällt folglich schnell in der Zeit ab. Die Komponente kleiner Energie wird dagegen durch die Gravitationskraft rasch in das Schwarze Loch „hineingezogen". Der interessante Teil des Spektrums ist der Zwischenbereich, wenn die Energie etwa so groß wie die Ruhemasse des Teilchens ist. In diesem Fall gibt es nämlich zwei miteinander konkurrierende Effekte: auf der einen Seite hat die Welle das Bestreben, sich im Raum auszubreiten, auf der anderen Seite versucht die Gravitationskraft, die Welle in einer Umgebung des Schwarzen Loches zu lokalisieren. Das Wechselspiel dieser beiden Effekte führt auf die relativ langsame Abfallrate von $t^{-\frac{5}{6}}$.

Wie hier an einem Beispiel illustriert wurde, ermöglicht die Mathematische Physik durch exakte Rechnungen und logische Schlussfolgerungen, physikalische Vorstellungen über Abläufe in unserem Universum zu überprüfen und zu erhellen. Das Zusammenspiel von physikalischer Anschauung und abstrakten mathematischen Argumenten ist dabei besonders reizvoll (*Finster*).