Max-Planck-Institut
für Mathematik
in den Naturwissenschaften
Leipzig

Laminations dans les espaces projectifs complexes

by

Bertrand Deroin

Preprint no.: 84 2004

LAMINATIONS DANS LES ESPACES PROJECTIFS COMPLEXES

BERTRAND DEROIN

Résumé. Dans ce travail, nous étendons le Théorème de plongement de K. Kodaira aux variétés complexes hermitiennes non compactes et aux laminations par variétés complexes.

Table des matières

1. Introduction.
2. Énoncé des résultats.
3. Section à décroissance exponentielle.
4. Séries fuchsiennes.
5. Immersion d'une variété complexe non compacte.
6. Continuité des séries fuchsiennes.
7. Séries fuchsiennes sur une lamination.
8. Immersion de laminations par variétés complexes.
9. Le cas de la dimension 1.
Références.

1. Introduction

Ce travail est une extension aux cas des variétés hermitiennes non compactes et des laminations par variétés complexes du Théorème de plongement de K. Kodaira [15]. Ce dernier affirme que parmi les variétés complexes *compactes* les variétés projectives complexes sont celles qui admettent un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne dont la courbure est strictement positive. La courbure d'une métrique hermitienne lisse $|.|$ est définie par

$$\Omega = i\overline{\partial}\partial \log |s|, \qquad i = \sqrt{-1}$$

où s est une section holomorphe locale ne s'annulant pas.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 32W10,(57R30,30F).
Key words and phrases. Complex manifold, lamination, projective geometry, $\overline{\partial}$-operator.
Ce travail a été partiellement supporté par la JSPS et le Fond National Suisse.

Nos motivations proviennent de l'étude qualitative des feuilletages holomorphes singuliers sur les variétés projectives complexes. Considérons par exemple une distribution de dimension d sur $\mathbf{C}^{N+1}$, définie par des formes holomorphes polynomiales homogènes. Si elle est intégrable, ce qui est toujours le cas si $d = 1$, ses variétés intégrales dessinent un feuilletage holomorphe singulier invariant par l'action des homothéties et se projette donc en un feuilletage holomorphe singulier sur l'espace projectif $\mathbf{C}P^N$. En fait, tous les feuilletages holomorphes singuliers sur les variétés projectives sont définis par des équations algébriques, d'après le célèbre Théorème GAGA de J. P. Serre [24].

La structure géométrique et dynamique de ces feuilletages est très riche. Leurs variétés intégrales, souvent appelées *feuilles*, sont des variétés complexes généralement non compactes immergées dans la variété ambiante. Leur géométrie d'une part, et la manière dont elles se comportent à l'infini d'autre part, ne sont pas encore bien comprise. En fait, en dehors des feuilletages définis par une équation de Riccati, ou de leurs dérivés, nous manquons d'exemples de feuilletages holomorphes singuliers que nous savons décrire qualitativement.

L'*ensemble limite* d'une feuille d'un feuilletage holomorphe est l'ensemble des points d'accumulation des lacets tendant à l'infini dans la feuille. Il hérite d'une structure de *lamination par variétés complexes* en dehors de l'ensemble singulier. Par exemple, les feuilletages de Riccati possèdent un unique ensemble limite *exceptionnel*, les autres étant des feuilles algébriques. L'ensemble limite est dans ce cas le lieu où la dynamique est concentrée.

Il y a de nombreux exemples de laminations par variétés complexes abstraites, provenant de la théorie de l'itération, des pavages, ou de l'arithmétique (voir le survol d'É. Ghys [10] sur les laminations par surfaces de Riemann, et le paragraphe 8.3). Réaliser l'une d'entre elles comme l'ensemble limite d'une feuille d'un feuilletage holomorphe sur une variété projective complexe donnerait de nouveaux exemples intéressants de feuilletages holomorphes.

Nous n'avons malheureusement pas pu réaliser ce "rêve". Cependant, l'existence de feuilletages holomorphes sur les variétés projectives montrent qu'il y a de nombreuses sous-variétés complexes et laminations par variétés complexes dans les espaces projectifs complexes. Ceci est tout à fait intéressant en soi, et nous nous proposons de les caractériser.

2. Énoncé des résultats

2.1. **Sous-variétés complexes holomorphiquement immergées dans un espace projectif complexe.** Nous nous intéressons d'abord au cas des variétés hermitiennes non compactes à géométrie bornée.

Définition 2.1. Soit (M, g) une variété complexe hermitienne. Une immersion $\pi : (M, g) \to \mathbf{C}P^N$ est dite *localement bilipschitzienne* si il existe un réel $r > 0$ et une constante $K \geq 1$ telle que la restriction de π à une boule de rayon r est un plongement K-bilipschitzien.

Cette définition ne dépend pas de la métrique utilisée sur $\mathbf{C}P^N$, puisque ce dernier est compact.

Théorème 2.2 (Cas d'une variété non compacte)**.** *Soit (M, g) une variété hermitienne complète et $E \to M$ un fibré en droites holomorphe admettant une métrique hermitienne à géométrie bornée dont la courbure ω vérifie des inégalités du type*

$$\frac{1}{C} g(u) \leq \Omega(u, \sqrt{-1}u) \leq C g(u)$$

pour une constante $C \geq 1$ ne dépendant pas du vecteur tangent u. Alors il existe un entier N et une immersion holomorphe localement bilipschitzienne $\pi : (M, g) \to \mathbf{C}P^N$.

Dans le cas des surfaces riemaniennes orientées, qui héritent d'une structure de surface de Riemann hermitienne d'après le Théorème d'Ahlfors-Bers [2], nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.3 (Cas des surfaces riemanniennes orientées)**.** *Une surface riemannienne à géométrie bornée s'immerge holomorphiquement et localement bilipschitziennement dans un espace projectif complexe.*

Le Théorème 2.2, ainsi que la Définition 2.1 apparaissent dans le travail [13] de M. Gromov. La démonstration fait usage de la méthode des *séries fuchsiennes*, élaborée par H. Poincaré [19], et qui consiste à sommer des sections holomorphes d'un fibré en droites holomorphes $E \to M$ qui ont de bonnes propriétés de décroissance à l'infini. M. Gromov utilise des sections holomorphes de norme L^1 finie, mais il nous semble que la convergence des séries fuchsiennes correspondantes n'est établie que dans le cas où la variété M est le revêtement universel d'une variété projective. Notre contribution est l'emploi de sections holomorphes à décroissance exponentielle, qui assure la convergence des séries fuchsiennes associées en toute généralité. Nous montrons néanmoins la convergence de certaines séries fuchsiennes considérées par M. Gromov, mais qui ne suffisent pas pour démontrer 2.2 (voir Remarque 4.4).

2.2. **Laminations par variétés complexes projectives.** Une lamination par variétés complexes d'un espace topologique X est un atlas complet $\mathcal{L}$ d'homéomorphismes $\varphi : U \to B \times T$ définis sur des ouverts U de X et à valeurs dans le produit de la boule unité B de $\mathbf{C}^n$ par un espace topologique T, en sorte que les changements de cartes préservent la fibration horizontale par boules, et soient biholomorphes en restriction aux fibres.

Définition 2.4. Une lamination par variétés complexes $\mathcal{L}$ d'un espace compact X est *projective* si l'ensemble des applications continues $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$ immergeant holomorphiquement les feuilles séparent les points de X.

Voici notre résultat principal dans le cadre des laminations par variétés complexes.

Théorème 2.5 (Cas d'une lamination). *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact n'ayant pas de cycle évanouissant. Si $\mathcal{L}$ admet un fibré en droites holomorphes de courbure strictement positive le long des feuilles, alors $\mathcal{L}$ est projective.*

Un *cycle évanouissant* est un lacet contenu dans une feuille et non homotope à un point dans sa feuille, qui peut être approché dans la topologie uniforme par des lacets contenus dans des feuilles proches qui, eux sont homotopes à un point dans leur feuille. Nous ne savons pas démontrer qu'une lamination projective n'a pas de cycle évanouissant. En revanche les feuilletages holomorphes par courbes d'une variété projective n'ont pas de cycle évanouissant (voir [4]).

En adaptant la méthode des séries fuchsiennes au cas feuilleté, É. Ghys construit des fonctions méromorphes sur les laminations hyperboliques [1] d'un espace compact, ayant une transversale totale [10]. Notre méthode permet de contourner l'hypothèse d'existence d'une transversale totale, et de démontrer qu'une lamination hyperbolique d'un espace compact a toujours une *multi-transversale totale*.

Nous conjecturons qu'une lamination par variétés complexes d'un espace compact de dimension topologique finie et vérifiant les hypothèses du Théorème 2.5 admet un *plongement* holomorphe à valeurs dans un espace projectif complexe. T. Ohsawa et N. Sibony [18] démontrent ce fait pour des feuilletages lisses par variétés complexes de codimension 1 d'une variété compacte. Voici une version symplectique de notre conjecture.

[1]Une lamination *hyperbolique* est une lamination par surfaces de Riemann dont toutes les feuilles sont revêtues par le disque unité.

Théorème 2.6. *Soit $\mathcal{L}$ une lamination compacte par variétés complexes n'ayant pas de cycle évanouissant, et $E \to \mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe positif. Alors si la dimension topologique de X est finie, il existe un plongement symplectique $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$ pour la structure symplectique standard de $\mathbf{C}P^N$.*

Récemment, A. Ibort et D. Martînez Torres ont démontré le résultat analogue pour les feuilletages par variétés symplectiques de codimension 1 [14]. En codimension quelconque et pour des feuilletages par variétés symplectiques non kählériennes il reste ouvert.

Les Théorèmes 2.5 et 2.6 sont démontrés au paragraphe 8. Pour cela nous établissons des propriétés de continuité des séries fuchsiennes aux paragraphes 6 et 7.

2.3. **En dimension** 1. Toute lamination par surfaces riemanniennes orientées est munie d'une structure de lamination par surfaces de Riemann, d'après le Théorème d'Ahlfors-Bers [2]. Signalons par ailleurs que dans [8], il est démontré que l'espace de Teichmüller d'une lamination hyperbolique d'un espace compact est de dimension infinie, si elle admet une feuille simplement connexe. Il y a donc de nombreux exemples de laminations par surfaces de Riemann. Le lecteur pourra se référer au survol d'É. Ghys [10].

Si toutes les surfaces riemanniennes orientées à géométrie bornée sont "projectives", ce n'est plus vrai pour des laminations par surfaces riemanniennes orientées. Il y a deux obstructions à ce fait, essentiellement équivalentes.

La première est le fait que l'intersection d'une lamination projective avec un hyperplan complexe est un *diviseur* : c'est une fonction non nulle $m : X \to \mathbf{N}$ qui est localement donnée par la multiplicité d'annulation d'une fonction holomorphe non constante sur chaque feuille. L'existence d'un diviseur est une condition topologique non triviale. Par exemple, la composante de Reeb du tore plein n'a pas de diviseur passant par sa feuille compacte. Nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2.7. *Une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact qui n'a pas de cycle évanouissant est projective si et seulement si elle possède un diviseur coupant toutes les feuilles.*

Un *solénoïde* est une lamination dont l'espace transverse est totalement discontinu.

Corollaire 2.8. *Un solénoïde par surfaces de Riemann d'un espace compact qui n'a pas de cycle évanouissant est projectif et tendu.*

La seconde obstruction à la projectivité est de nature homologique et a été observée par É. Ghys. L'exemple le plus simple est une lamination par surfaces de Riemann $\mathcal{L}$ d'un espace compact X ayant une feuille compacte M homologue à 0 dans X. Une telle lamination ne peut être projective, car une courbe holomorphe compacte d'un espace projectif complexe n'est pas homologue à 0 (elle intersecte un hyperplan complexe positivement).

Dans le cas général d'une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact, cette obstruction est exprimée en termes de la théorie des cycles feuilletés de D. Sullivan [26]. Un *cycle feuilleté* est un opérateur $T : \Omega^2(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}$ linéaire, fermé et strictement positif sur les formes strictement positives. L'intégration sur une feuille compacte est un exemple de cycle feuilleté. Dans le cas où aucun cycle feuilleté de $\mathcal{L}$ n'est homologue à 0, nous dirons que $\mathcal{L}$ est *tendue*. Nous démontrons alors le résultat suivant : [2]

Théorème 2.9. *Une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact de dimension topologique finie qui n'a pas de cycle évanouissant est projective si et seulement si elle est tendue.*

Des Théorèmes 2.7 et 2.9 découle un résultat de nature complètement topologique.

Théorème 2.10. *Une lamination compacte par surfaces orientées, de dimension topologique finie et n'ayant pas de cycle évanouissant est tendue si et seulement si elle admet une multi-transversale totale.*

S. Schwartzman a démontré ce fait pour des feuilletages de dimension 1 réelle [22], et S. E. Goodman pour des feuilletages de codimension 1 [11]. Cet énoncé a un sens pour des laminations orientées de dimension quelconque, et nous conjecturons qu'il est encore vrai.

Notations. Dans le texte, C désigne une constante universelle. Nous faisons usage de la même notation pour des constantes a priori différentes pour simplifier les notations.

Remerciements. Ce travail est une partie de ma thèse de doctorat [7] effectuée à l'École Normale Supérieure de Lyon. Je remercie chaleureusement É. Ghys pour avoir dirigé mes recherches.

[2]Notons que souvent une lamination tendue n'a pas de cycle évanouissant : par exemple lorsque l'espace total est une variété.

3. Sections à décroissance exponentielle

Soit M une variété complexe et $E \to M$ un fibré en droites holomorphe, muni d'une métrique hermitienne $|.|$. La *courbure* de $|.|$ est la $(1,1)$-forme définie par

$$\Omega := i\overline{\partial}\partial \log |s|^2$$

où s est une section holomorphe locale de E et $i = \sqrt{-1}$. Une $(1,1)$-forme strictement positive en restriction à toute droite complexe est dite strictement positive.

Il est bien connu (voir par exemple [6], p. 307 Proposition 12.10) que si $|.|$ est une métrique hermitienne de courbure strictement positive, alors au voisinage V_x de tout point x de M, il existe une section holomorphe $s : V_x \to E$ dont la norme $|s| = e^{\varphi}$ vérifie

$$\varphi = -|z_1|^2 - \ldots - |z_n|^2 + o(|z|^2),$$

dans un système de coordonnées holomorphes $z = (z_1, \ldots, z_n)$ centré en x. Soit g la métrique *kählérienne* associée à Ω par la formule

$$g(u, v) = 2\Omega(u, \sqrt{-1}v),$$

ou bien, ce qui revient au même

$$g_x = 2(|dz_1|^2 + \ldots + |dz_n|^2).$$

Définition 3.1. Une métrique hermitienne $|.|$ de E de courbure strictement positive est dite à géométrie bornée si son *rayon* $r(|.|)$ est strictement positif : $r(|.|)$ est le supremum des réels $r \geq 0$ tels que

(i) Le rayon d'injectivité de (M, g) est uniformément minoré par r et pour tout point x de M il existe un biholomorphisme

$$z : B_g(x, r) \to U_x \tag{3.1}$$

dans un ouvert U_x de $\mathbf{C}^n$ envoyant x sur 0 et qui est 2-bilipschitzien, U_x étant muni de la métrique euclidienne standard de $\mathbf{C}^n$.

(ii) Pour tout point x de M il existe une section holomorphe $s : B_g(x, r) \to E$ vérifiant pour tout y de $B_g(x, r)$:

$$e^{-2d_g(x,y)^2} \leq |s(y)| \leq e^{-\frac{1}{2}d_g(x,y)^2}. \tag{3.2}$$

(iii) La courbure de Ricci de g est bornée uniformément sur M.

Le principe de renormalisation suivant est bien connu, et a porté ses fruits en géométrie symplectique (voir [28, 9]).

Lemme 3.2 (Renormalisation)**.** *Si $E \to M$ est un fibré en droites holomorphe hermitien de courbure strictement positive et à géométrie* *bornée, alors les rayons des puissances de* $|.|$ *vérifient pour tout entier* $k \geq 0$

$$r(|.|^{\otimes k}) \geq \sqrt{k}r(|.|).$$

De plus, la courbure de Ricci des métriques g_k *induites par* $|.|^{\otimes k}$ *tend uniformément vers* 0 *lorsque* k *tend vers l'infini.*

Démonstration. Pour tout entier $k \geq 1$, les métriques $|.|^{\otimes k}$ de $E^{\otimes k}$ sont de courbures

$$\Omega_k = k\Omega$$

et sont associées aux métriques kählériennes $g_k = kg$ sur M. En tout point x de M, les coordonnées

$$z_k = \sqrt{k}z$$

exercent un biholomorphisme 2-bilipschitzien de $B_{g_k}(x, r\sqrt{k})$ dans l'ouvert $\sqrt{k}U_x$ de $\mathbf{C}^n$, et les sections $s^k : V_x \to E^k$ vérifient

$$e^{-2d_{g_k}(x,y)^2} \leq |s^k(y)| \leq e^{-\frac{1}{2}d_{g_k}(x,y)^2},$$

pour tout y de $B_{g_k}(x, r\sqrt{k})$. Ainsi le rayon $r(|.|^{\otimes k})$ est au moins supérieur à $\sqrt{k}r(|.|)$. De plus la courbure de Ricci de la métrique g_k tend uniformément vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

Ce Lemme motive l'étude des métriques hermitiennes de courbure strictement positive et à géométrie bornée ayant un grand rayon et dont la courbure de Ricci est uniformément petite. Dans ces conditions, nous démontrons l'existence de sections holomorphes à décroissance exponentielle prolongeant un jet donné en un point.

L'idée est de construire un prolongement holomorphe $h : M \to E$ dans $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ si $\alpha > 0$ est assez petit, où la métrique $|.|_{x,\alpha}$ est définie pour tout point x de M et tout réel $\alpha > 0$ par

$$|.|_{x,\alpha} := e^{\alpha d_g(x,.)}|.|.$$

En vertu de la formule intégrale de Cauchy, si $|.|$ est une métrique de courbure strictement positive à géométrie bornée de rayon $r(|.|) = r$, nous avons les *inégalités de Garding uniformes* :

Pour toute section holomorphe $\tau : B_g(y, r) \to E$,

$$|\tau(y)| \leq C(r)\sqrt{\int_{B_g(y,r)} |\tau(z)|^2 dv_g(z)}, \tag{3.3}$$

où $C(r)$ *est une constante ne dépendant que de* r*, et que nous choisirons décroissante de* r*.*

Une section holomorphe $h : M \to E$ de $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ admet alors la décroissance

$$|h(y)| \leq C|h|_{x,\alpha,2}e^{-\alpha d(x,y)},$$

pour tout y de M, où C est une constante ne dépendant que de r. L'existence des sections à décroissance exponentielle découle donc du Lemme suivant.

Lemme 3.3 (Lemme principal)**.** *Il existe des réels $\alpha > 0$ et $r_0 > 0$ tels que si $E \to M$ est un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique $|.|$ de courbure strictement positive à géométrie bornée dont le rayon vérifie $r(|.|) \geq r_0$ et pour laquelle la courbure de Ricci de g est uniformément bornée par $1/4$, alors tout 1-jet j de section holomorphe de M dans E en un point x se prolonge en une section holomorphe $h : M \to E$ de $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ de norme inférieure à $C|j|$ où C est une constante universelle.*

Sa démonstration est organisée sous forme de paragraphes.

3.1. **Perturbation.** On pourra consulter [6], p. 422, Theorem 4.5, pour une démonstration du résultat suivant, dû à L. Hörmander :

Soit $E \to M$ un fibré en droites au dessus d'une variété kählérienne complète (M, g), muni d'une métrique $|.|'$ dont la courbure satisfait la positivité

$$\Omega' - \kappa_M \geq \lambda\Omega,$$

κ_M désignant la courbure de la métrique du fibré canonique K_M de M induite par g et λ une constante strictement positive. Si u est une $(0,1)$-forme à valeurs dans E, lisse, $L^2_g(|.|')$ et $\overline{\partial}$-fermée (c'est à dire que $\overline{\partial}u = 0$), alors il existe une section v de E lisse et $L^2_g(|.|')$ qui vérifie $\overline{\partial}v = u$ et l'estimée

$$|v|'_2 \leq \frac{C}{\lambda}|u|'_2, \tag{3.4}$$

où C est une constante universelle.

Supposons que l'on ait une section s lisse et $L^2_g(|.|')$ qui soit de surcroit *presque holomorphe*, dans le sens où $|\overline{\partial}s|'_2 << 1$. Nous pouvons inverser $u = \overline{\partial}s$ avec les estimées 3.4 : nous obtenons une section v lisse et $L^2_g(|.|')$ telle que $\overline{\partial}(s - v) = 0$ et $|v|'_2 \leq \frac{C}{\lambda}|u|'_2$. La section $h = s - v$ est holomorphe et nous avons $|s - h|'_2 << 1$. Nous avons donc perturbé une section presque-holomorphe en une section holomorphe.

Dans ce paragraphe nous démontrons que l'on peut appliquer les estimées 3.4 de l'inverse du $\overline{\partial}$ aux métriques $|.|_{x,\alpha}$ avec $\lambda = 1/2$ lorsque

$\alpha > 0$ est assez petit (voir Lemme 3.5). Il nous faut donc convenablement lisser ces métriques qui ne sont à priori que continues. C'est le but du Lemme suivant.

Lemme 3.4. *Il existe une constante universelle C telle que les propriétés suivantes soient vérifiées. Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe et $|.|$ une métrique de courbure strictement positive de E à géométrie bornée telle que $r(|.|) \geq 1$. Pour toute fonction 1-lipshitzienne $\psi : (M, g) \to \mathbf{R}$, il existe une fonction lisse $\phi : M \to \mathbf{R}$ vérifiant $|\phi - \psi|_\infty \leq 1$ et $|i\overline{\partial}\partial\phi|_\infty \leq C$.*

Démonstration. La fonction ϕ est construite à partir d'un noyau K

$$\phi(x) = \int_M K(x,y)\psi(y)dv_g(y),$$

où $K : M \times M \to \mathbf{R}$ est une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(i) K est lisse et positive,

(ii) le support de K est inclu dans $\{d(x,y) \leq 1\}$

(iii) les différentielles des fonctions $K(.,y)$ jusqu'au deuxième ordre sont bornées par des constantes universelles,

(iv) en tout point x de M on a $\int_M K(x,y)dv_g(y) = 1$.

Démontrons d'abord qu'avec ces propriétés la fonction ϕ vérifie le Lemme. Nous avons déjà

$$\phi(x) - \psi(x) = \int_M K(x,y)(\psi(y) - \psi(x))dv_g(y),$$

ce qui donne $|\phi(x) - \psi(x)| \leq 1$ d'après les propriétés (ii) et (iv). Pour contrôler les dérivées de ϕ en un point x, observons que pour tout point x_0

$$\phi(x) - \psi(x_0) = \int_M K(x,y)(\psi(y) - \psi(x_0))dv_g(y),$$

si bien que, différentiant et prenant $x_0 = x$ nous obtenons

$$i\overline{\partial}\partial\phi_{|x} = \int_M i\overline{\partial}\partial K(.,y)_{|x}(\psi(y) - \psi(x))dv_g(y).$$

Nous avons donc la majoration

$$|\overline{\partial}\partial\phi_{|x}| \leq C\mathrm{vol}(B_g(x,1)),$$

la constante C étant donnée par (iii). Le résultat résulte du fait que le volume de la boule $B_g(x,1)$ est majoré par le volume de la boule euclidienne de rayon 2.

Pour construire le noyau K nous utilisons des *noyaux centrés* en un point t de M. À partir des coordonnées z_t de 3.1 centrées en t, considérons les fonctions $H_t : M \times M \to \mathbf{R}$ définies par

$$H_t(x, y) = H(z_t(x), z_t(y))$$

où H est une fonction lisse positive des deux variables $z_1 \in \mathbf{C}^n$ et $z_2 \in \mathbf{C}^n$ vérifiant $H(z_1, z_2) = 1$ si z_1 et z_2 sont de norme inférieure à $1/8$ et $H(z_1, z_2) = 0$ si l'une des deux normes de z_1 ou z_2 est supérieure à $1/4$. Comme l'image U_t de $B_g(t, 1)$ par z_t contient $B_{eucl}(0, 1/4)$, la fonction $H_t : M \times M \to \mathbf{R}$ prolongée en dehors de $B_g(t, 1) \times B_g(t, 1)$ par 0 est lisse et positive et vérifie les propriétés suivantes. Si $d(x, t) \leq 1/16$ et $d(y, t) \leq 1/16$, on a $H_t(x, y) = 1$. Si $d(x, t) \leq 1/4$ ou $d(y, t) \leq 1/4$, on a $H_t(x, y) = 1$. A y fixé, $i\overline{\partial}\partial H_t(., y)$ est borné uniformément par une constante universelle.

Une partie 1/32-séparée maximale pour l'inclusion et aussi 1/32-dense. Prenons en une $T \subset M$. La somme

$$H = \sum_{t \in T} H_t$$

est localement finie car la courbure de Ricci est bornée. Plus précisément, pour tout couple (x, y) de points de M, il n'y a au plus que $|T \cap B_g(x, 1/2)|$ points t de T pour lesquels $H_t(x, y) \neq 0$. Mais, puisque T est 1/32-séparée nous avons

$$|T \cap B_g(x, 1/2)| \leq \mathrm{vol}(B_g(x, 1/2 + 1/32))/\mathrm{vol}(B_g(x, 1/32)) \leq 68^{2n}$$

en comparant le volume des boules B_g avec celles des boules euclidiennes de $\mathbf{C}^n$. Ainsi H est une fonction lisse positive sur $M \times M$, dont le support est contenu dans $\{d(x, y) \leq 1/2\}$ et dont les dérivées jusqu'au deuxième ordre (y compris 0) sont bornées par des constantes universelles. D'autre part, si x et y sont deux points de M séparés d'une distance inférieure à 1/32, il existe un point t de T tel que $d(x, t) \leq 1/16$ et $d(y, t) \leq 1/16$. C'est donc que $H(x, y) \geq H_t(x, y) = 1$. Nous pouvons donc poser

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{\int_M H(x, y) dv_g(y)}.$$

C'est le noyau que nous voulons. Les propriétés (i), (ii), (iv) sont claires. Pour démontrer la propriété (iii), il suffit de remarquer que l'intégrale

$$\int_M H(x, y) dv_g(y)$$

est minorée uniformément par une constante strictement positive, et que son $i\overline{\partial}\partial$ est borné par une constante universelle. Le Lemme 3.4 est démontré.

Lemme 3.5. *Il existe $\alpha > 0$ tel que si $|.|$ est une métrique de E de courbure strictement positive à géométrie bornée de rayon $r(|.|) \geq 1$ et pour laquelle la courbure de Ricci de g est majorée par $1/4$, alors pour tout x de M l'estimée suivante est vérifiée. Si u est une $(0,1)$-forme à valeurs dans E, lisse, $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ et $\overline{\partial}$-fermée, alors il existe une section v de E lisse et $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ qui vérifie $\overline{\partial}v = u$ et l'estimée*

$$|v|_{x,\alpha,2} \leq C|u|_{x,\alpha,2},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Considérons la fonction $\psi = d(x,.)$. C'est une fonction 1-lipshitzienne. Le Lemme 3.4 nous donne une fonction ϕ vérifiant $|\phi - d(x,.)|_\infty \leq 1$ et $|i\overline{\partial}\partial\phi|_\infty \leq C$. Regardons alors la métrique de E définie par

$$|.|' = e^{\alpha\phi}|.|.$$

D'une part elle est uniformément équivalente à $|.|_{x,\alpha}$, avec l'estimée

$$e^{-\alpha}|.|_{x,\alpha} \leq |.|' \leq e^{\alpha}|.|_{x,\alpha}.$$

D'autre part elle est lisse de courbure

$$\Omega' = \Omega + \alpha i\overline{\partial}\partial\phi.$$

Si $\alpha > 0$ est choisi assez petit en sorte que $\alpha C \leq 1/4$, où C est la constante universelle donnée par le Lemme 3.4, et si la courbure de Ricci de g est majorée par $1/4$, alors nous avons la positivité de $|.|'$:

$$\Omega' - \kappa_M \geq \frac{1}{2}\Omega.$$

Nous pouvons donc utiliser les estimées de Hörmander 3.4 sur E muni des normes $|.|_{x,\alpha}$, avec la constante $\lambda = 1/2$ et une constante C universelle.

3.2. **Sections presque-holomorphes.** Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe et $|.|$ une métrique de courbure strictement positive à géométrie bornée. Le Lemme suivant est dû à G. Tian [28].

Lemme 3.6 (Tian)**.** *Soit x un point de M et j un 1-jet de section holomorphe de M dans E en x. Il existe une section lisse $\overline{s} : M \to E$ à support compact, holomorphe sur $B_g(x, r/3)$, passant par j, telle que*

$$|\overline{s}|_{x,\alpha,2} \leq C|j| \quad \text{et} \quad |\overline{\partial}\overline{s}|_{x,\alpha,2} \leq \frac{C|j|}{r},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Soit $s : B_g(x,r) \to E$ la section définie en 3.2, et soit P un polynôme linéaire des coordonnées z de 3.1 centrées en x tel que $j = J_1(Ps)(x)$. La section $\overline{s}$ est définie par $\overline{s} = \varphi s$, où $\varphi : B_g(x,r) \to \mathbf{R}$ est une fonction lisse, identiquement égale à 1 sur $B_g(x, r/3)$, nulle à l'extérieur de $B_g(x, 2r/3)$. De plus nous demandons que φ prenne ses valeurs entre 0 et 1 et que

$$|d\varphi|_g \leq C/r,$$

où C est une constante universelle. Nous pouvons par exemple construire φ en prenant une fonction ψ ayant les mêmes propriétés sur la boule euclidienne $B_{eucl}(0, 1/2)$ de $\mathbf{C}^n$ et en considérant $\varphi(y) = \psi(z(y)/2r)$. Nous avons alors

$$|\overline{\partial}\overline{s}|_{x,\alpha,2} = |\overline{\partial}(\varphi)Ps|_{x,\alpha,2} \leq \frac{C}{r}|Ps|_{x,\alpha,2}.$$

Reste à majorer la norme de Ps sur la boule $B_g(x,r)$. Il existe une constante universelle C telle que pour tout y de $B_g(x,r)$

$$|P(y)| \leq C|j|(1 + d(x,y)).$$

Nous en déduisons donc

$$|Ps|_{x,\alpha,2} \leq C|j| \sqrt{\int_{B_g(x,r)} (1 + d(x,y))^2 e^{\alpha d(x,y) - d(x,y)^2} dv_g(y)}.$$

Cette dernière intégrale est majorée par l'intégrale convergente sur $\mathbf{C}^n$

$$2^{2n} \int_{\mathbf{C}^n} (1 + 2|z|)^2 e^{2\alpha|z| - \frac{|z|^2}{2}} dv_{eucl}(z).$$

Le Lemme est démontré.

3.3. **Démonstration du Lemme principal 3.3.** Soit $|.|$ une métrique de E de courbure strictement positive et à géométrie bornée pour laquelle la courbure de Ricci de g est majorée par $1/4$, et dont le rayon $r(|.|)$ est supérieur à 1. Soit x un point de M et j un 1-jet en x de section holomorphe de M dans E. Appliquons le Lemme de perturbation 3.5 à la section $\overline{s}$ construite au Lemme 3.6. Nous obtenons une section holomorphe $H : M \to E$ de $L^2_g(|.|_{x,\alpha})$ vérifiant

$$|H - \overline{s}|_{x,\alpha,2} \leq \frac{C|j|}{r}.$$

La section $H - \overline{s}$ est holomorphe sur la boule $B_g(x, r/3)$, donc les inégalités de Garding 3.3 donnent

$$|J_1 H - j| \leq \frac{C|j|}{r}$$

pour une constante universelle C. Nous choisissons r en sorte que $C/r = 1/2$, où C est la constante apparaissant dans l'inégalité précédente. Puisque d'après le Lemme de Tian nous avons $|\overline{s}|_{x,\alpha,2} \leq C|j|$, nous en déduisons l'estimée :

$$|H|_{x,\alpha,2} \leq C|j|,$$

pour une constante universelle C. Ces inégalités sont le premier pas d'un processus d'approximations successives. Définissons $h_1 = H(j)$ et par récurrence $h_{q+1} = H(j - J_1(h_1 + \ldots + h_q))$ pour $q \geq 2$. Nous avons alors pour tout $q \geq 1$,

$$|J_1(h_1 + \ldots + h_q) - j| \leq (1/2)^q|j|, \quad |h_{q+1}|_{x,\alpha,2} \leq C(1/2)^q|j|.$$

La série $\sum_q h_q$ converge donc vers une section holomorphe $h : M \to E$ de $L^2_g(|.|_{x,\alpha,2})$ passant par j et telle que

$$|h|_{x,\alpha,2} \leq C|j|,$$

où C est une constante universelle. Le Lemme 3.3 est démontré.

4. Séries fuchsiennes

Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique $|.|$ de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Soit g la métrique kählérienne associée à la forme de courbure de $|.|$. Nous supposons que :

(i) la courbure de Ricci de g est uniformément majorée par $1/4$.

(ii) le rayon $r(|.|)$ de $|.|$ est supérieur au réel r_0.

Dans ces conditions, nous avons montré au Lemme 3.3 que tout 1-jet j_x de section holomorphe de M dans E en un point x se prolonge en une section holomorphe de $L^2(|.|_{x,\alpha})$ de norme inférieure à $C|j_x|$, où $C > 0$ est une constante universelle. Soit $m(j_x) : M \to E$ celle de norme minimale.

Définition 4.1. Soit δ un réel strictement positif. Une partie $T \subset M$ est *δ-séparée* si deux points distincts de T sont séparés d'une distance supérieure à δ. Soit $T \subset M$ une partie δ-séparée et $j = \{j_t\}_{t\in T}$ une famille de 1-jets de section holomorphe de M dans E définis aux points de T. La série

$$\sigma(j) := \sum_{t\in T} m(j_t)$$

est la *série fuchsienne* associée à j.

Lemme 4.2 (Convergence des séries fuchsiennes)**.** *Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si la courbure de Ricci de g est bornée uniformément* *par c_0 alors les séries fuchsiennes $\sigma(j)$ convergent uniformément sur tout compact de M vers une section holomorphe de E vérifiant*

$$|\sigma(j)|_{\infty,M} \leq C(\delta)|j|_{\infty,T},$$

pour toute partie δ-séparée T et toute famille bornée j de 1-jets définis sur T. De plus, nous avons

$$|J_1\sigma(j) - j|_{\infty,T} \leq D(\delta)|j|_{\infty,T},$$

où D tend vers 0 lorsque δ tend vers l'infini. [3]

Démonstration. Remarquons que, pour tout point y de M nous avons les inégalités

$$\begin{aligned}\sum_{t\in T} e^{-\alpha d(t,y)} &\leq C(\delta)\sum_{t\in T}\int_{B_g(t,\delta/2)} e^{-\alpha d(z,y)}dv_g(z)\\ &\leq C(\delta)\int_M e^{-\alpha d(z,y)}dv_g(z),\end{aligned}$$

où $C(\delta) = e^{\alpha\delta}/\nu(\delta/2)$ et $\nu(\delta) = \inf_{x\in M}\mathrm{vol}(B_g(x,\delta))$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que si la courbure de Ricci de g est uniformément majorée par c_0, alors la croissance du volume des boules est exponentielle d'exposant inférieur à $\alpha/2$. Plus pécisément il existe une constante universelle C telle que pour tout $r \geq 1$

$$\mathrm{vol}(B_g(x,r)) \leq Ce^{\alpha r/2}.$$

Alors pour tout y de M l'intégrale

$$\int_M e^{-\alpha d(z,y)}dv_g(z)$$

est bornée par une constante universelle. Nous obtenons donc

$$\sum_{t\in T}|h(j_t)(y)| \leq C(\delta)|j|_{\infty,T},$$

ce qui montre déjà que σ converge uniformément sur tout compact de M vers une section holomorphe de E bornée par $C(\delta)|j|_{\infty,T}$.

Supposons maintenant que $\delta \geq 2$. En vertu de l'inégalité de Garding 3.3 nous avons pour tout y de T,

$$|J_1\sigma(y) - j_y| \leq \sum_{t\in T, t\neq y}|J_1h(j_t)(y)| \leq C|j|_\infty\sum_{t\in T,t\neq y}e^{-\alpha d(t,y)}.$$

Nous en déduisons donc

$$|J_1\sigma(y) - j_y| \leq C|j|_\infty\frac{e^\alpha}{\nu(1)}\int_{M-B_g(y,\delta-1)} e^{-\alpha d(z,y)}dv_g(z).$$

[3] $|.|_{\infty,A}$ est la norme uniforme en restriction à la partie A.

Mais les fonctions

$$f_\delta : y \in M \mapsto \int_{M - B_g(y,\delta-1)} e^{-\alpha d(z,y)} dv_g(z)$$

convergent uniformément vers 0 lorsque δ tend vers l'infini. Le Lemme 4.2 est démontré.

Proposition 4.3. *Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique de courbure strictement positive à géométrie bornée dont le rayon $r(|.|)$ est supérieur à r_0 et pour laquelle la courbure de Ricci de g est uniformément majorée par c_0. Alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que toute famille bornée de 1-jets définie sur une partie δ_0-séparée T de M se prolonge en une section holomorphe $\sigma : M \to E$ vérifiant*

$$|\sigma|_{\infty,M} \leq C|j|_{\infty,T},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Nous choisissons $\delta_0 > 0$ tel que $D(\delta_0) \leq 1/2$ et nous reproduisons l'argument d'approximation de 3.3. Définissons $\sigma_1 = \sigma(j)$, et par récurrence $\sigma_{q+1} = \sigma(j - J_1(\sigma_1 + \ldots + \sigma_q))$ pour tout entier q supérieur à 1. Nous avons, pour tout q les inégalités

$$|j - J_1(\sigma_1 + \ldots + \sigma_q)|_{\infty,T} \leq |j|_\infty (1/2)^q, \quad |\sigma_q|_{\infty,M} \leq C(\delta_0)|j|_\infty (1/2)^{q-1}.$$

Ainsi la série $\sum_q \sigma_q$ converge uniformément sur M vers une section holomorphe $\sigma : M \to E$ bornée par $C|j|_\infty$ et prolongeant la famille de jets j. La constante C est universelle car nous pouvons choisir C décroissante de δ.

Remarque 4.4. M. Gromov propose de fabriquer des séries fuchsiennes avec des sections qui sont seulement dans $L^1_g(|.|)$ ([13], p. 387, Corollary 3.3.5). Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Si la courbure de Ricci de g est suffisament petite et si le rayon $r(|.|)$ est suffisament grand alors par tout point e de E passe une section holomorphe h telle que $|h|_2 \leq C|e|$, où C est une constante universelle. Le produit de deux sections de $L^2_g(|.|)$ est une section de $E^{\otimes 2}$ de norme L^1 finie. M. Gromov considére la section holomorphe de norme L^1 minimale prolongeant un élément de $E^{\otimes 2}$. La convergence des séries fuchsiennes obtenues à partir de ces sections est annoncée sans démonstration ([13], p. 389, Interpolation Theorem 3.3.10). Nous en donnons une démonstration ici, avec une variante de la définition de la section minimisante : si $e = e_1 \otimes e_2$ est un élément de $E^{\otimes 2}$ nous définissons $m(e) = m(e_1) \otimes m(e_2)$ où $m(e_i)$ est la section holomorphe de E passant par e_i de norme $L^2_g(|.|)$ minimisante. L'avantage de ces séries fuchsiennes est que le rayon $r(|.|)$ nécessaire pour construire des sections holomorphes L^2 de E est inférieur au r_0 de 3.3 que l'on doit prendre pour construire des sections holomorphes à décroissance exponentielle. Par contre nous ne savons pas démontrer la convergence des séries formées à partir des sections minimisantes L^1 passant par une famille de 1-jets.

Lemme 4.5. *Soit $T \subset M$ une partie séparée, et $\{e_t\}_{t\in T}$ une famille bornée d'éléments e_t de la fibre de $E^{\otimes 2}$ au dessus du point t. Alors la série*

$$\sum_{t\in T} m(e_t)$$

converge uniformément vers une section holomorphe de $E^{\otimes 2}$.

Démonstration. Ce Lemme vient en fait d'une propriété de symétrie des sections minimisantes $m(e)$:

Propriété de symétrie : soient x, x' deux points de M et e, e' deux éléments de E au dessus de x et x' respectivement. Alors on a des inégalités

$$\frac{1}{C}|e||m(e')(x)| \leq |e'||m(e)(x')| \leq C|e||m(e')(x)|,$$

pour une constante C ne dépendant que de g.

Démontrons d'abord que cette propriété entraine le Lemme 4.5. Remarquons qu'elle est aussi vraie pour les sections L^1 de $E^{\otimes 2}$ qui sont les carrés de deux sections minimisantes L^2 de E. Ensuite, prenons un point x dans M et un élément e de $E^{\otimes 2}$ au dessus de x qui est de norme 1. Nous avons alors les majorations

$$\sum_{t\in T} |m(e_t)(x)| \leq C(\sup_{t\in T} |e_t|) \sum_{t\in T} |m(e)(t)|.$$

Mais d'après l'inégalité de Garding nous avons

$$\sum_{t\in T} |m(e)(t)| \leq C(\delta)|m(e)|_1.$$

Ainsi $\sum_{t\in T} |m(e_t)(x)|$ est finie pour tout x et le Lemme 4.5 en découle.

Démontrons maintenant la propriété de symétrie. Si $\{s_\nu\}_\nu$ est une base orthonormée topologique de l'espace des sections holomorphes et L^2 de E, les sections $m(e)$ ont une expression très simple donnée par (voir [3]) :

$$m(e) = \frac{1}{\sum_\nu |s_\nu(x)|^2} \sum_\nu < e, s_\nu(x) > s_\nu,$$

où x est le point sur lequel se projette e. Ceci montre en particulier que

$$|m(e)|_2^2 = \frac{|e|^2}{\sum_\nu |s_\nu(x)|^2},$$

et que la fonction $x \in M \mapsto \sum_\nu |s_\nu(x)|^2 \in \mathbf{R}_+$ prend des valeurs comprises entre deux constantes strictement positives. Fixons deux points x et x' de M et deux éléments e et e' au dessus de x et x' respectivement. Nous avons alors

$$\begin{array}{rcl} |e'||m(e)(x')| & = & \frac{|e'|}{\sum_\nu |s_\nu(x)|^2} |\sum_\nu < e, s_\nu(x) > s_\nu(x')| \\ & = & \frac{|e|}{\sum_\nu |s_\nu(x)|^2} |\sum_\nu < e', s_\nu(x') > s_\nu(x)| \\ & \leq & C|e||m(e')(x)|, \end{array}$$

et le Lemme 4.5 est démontré.

5. Immersion d'une variété complexe non compacte

Dans cette partie nous démontrons les Théorèmes 2.2 et 2.3 d'immersion de variétés hermitiennes non compactes.

5.1. Démonstration du Théorème 2.2. Soit $E \to M$ un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne $|.|$ de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Soit g la métrique kählérienne sur TM associée à la courbure de $|.|$. Il s'agit de montrer que (M, g) est projective.

Nous construisons une immersion de la forme $\pi = [\sigma_0 : \ldots : \sigma_N] : M \to \mathbf{C}P^N$, où les sections σ_i sont des sections holomorphes d'une puissance $E^{\otimes k}$ de E pour k assez grand. Nous avons vu que $r(|.|^{\otimes k})$ est au moins supérieur à $\sqrt{k} r(|.|)$, et que la métrique $g_k = kg$ est celle associée à la courbure $\Omega_k = k\Omega$ de $|.|^{\otimes k}$, si bien que sa courbure de Ricci tend uniformément vers 0 quand k tend vers l'infini. Nous pouvons donc appliquer le résultat de la Proposition 4.3 aux fibrés $E^{\otimes k}$ et à leur métrique $|.|^{\otimes k}$ (voir Lemme 3.2). Pour simplifier les notations, nous supposons que c'est E lui-même qui vérifie les hypothèses de la Proposition 4.3.

Lemme 5.1. *Soient $\delta > 0$ le réel donné par la Proposition 4.3. Il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour toute partie δ-séparée T de M, il existe une application méromorphe $\pi_T : M \to \mathbf{C}P^n$ de la forme $\pi_T = [\sigma_0 : \ldots : \sigma_n]$ où les σ_l sont des sections holomorphes de E bornées par une constante universelle, telle que*

- *$|\sigma_0| \geq 1/2$ sur la réunion T_ε des boules $B_g(t, \varepsilon)$ autour des points de T, si bien que π_T est bien définie sur T_ε.*
- *sur chaque boule $B_g(t, \varepsilon)$, nous avons $\pi_T^* \Omega_{FS} \geq C\Omega$, où $C > 0$ est une constante universelle.*

Démonstration. En chaque point t de T, définissons les 1-jets $j_0(t)$, $\ldots, j_n(t)$ de section holomorphe de T_tM dans E par

$$j_0(t) = J_1(s),\ j_1(t) = J_1(z_1 s), \ldots,\ j_n(t) = J_1(z_n s),$$

dans les coordonnées z centrées en t de 3.1. Ces jets sont bornés par 1 et d'après la Proposition 4.3, il existe des prolongements holomorphes $\sigma_0, \ldots, \sigma_n : M \to E$ dont la norme est majorée par une constante C ne dépendant que de δ.

D'après le Lemme de Schwarz, nous avons $|\sigma_0| \geq 1/2$ sur la réunion des boules $B_g(t, \varepsilon_1)$ centrées en un point t de T et de rayon $\varepsilon_1 > 0$ ne dépendant que de r et de C. En effet, le quotient σ_0/s est une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}$ définie sur la boule $B_g(t, r)$ et bornée par C.

Une autre version du Lemme de Schwarz montre que la fonction $f = (\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \ldots, \frac{\sigma_n}{\sigma_0})$ vérifie $||df_x|| \geq 1/2$ pour tout point x de $B_g(t, \varepsilon_2)$, où ε_2 est un réel ne dépendant que de r et de C. En effet, elle définit une application holomorphe $B_g(t, r) \to \mathbf{C}^n$ bornée par C et dont la différentielle en 0 est l'identité. Le Lemme est démontré avec $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Lemme 5.2. *Soient* $0 < \varepsilon < \delta$ *deux réels. Il existe un nombre fini* $T_1, \ldots, T_k$ *de parties* δ*-séparées de* M *dont la réunion est* ϵ*-dense.*

Démonstration. Une partie ε-séparée et maximale pour l'inclusion est ε-dense. Prenons en une T. Choisissons une sous-partie T_1 de T qui est δ-séparée et maximale pour l'inclusion, puis une partie $T_2 \subset T - T_1$ δ-séparée et maximale pour l'inclusion etc. Ce procédé s'arrête au bout d'un certain temps, c'est à dire qu'il existe l tel que $T = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_l$. En effet, supposons qu'il existe un point t de T qui ne soit dans aucun des T_m, pour $m = 1, \ldots, l$. Par maximalité, il existe un point t_m de T_m dans $B_g(t, \delta)$ pour tout $m = 1, \ldots, l$. Ces points sont deux à deux distincts puisque les parties T_m sont disjointes. Il y a donc $l + 1$ points de T dans $B_g(t, \delta)$, et les $l+1$ boules de rayon $\varepsilon/2$ centrées en ces points sont deux à deux disjointes dans $B_g(t, \delta)$. Nos hypothèses de géométrie bornée montrent que $l + 1$ est inférieur à une constante ne dépendant que de la courbure de Ricci de g et du rayon d'injectivité. Le Lemme est démontré.

Nous sommes en mesure d'achever la démonstration du Théorème 2.2. Pour chacunes de ces parties T_m, considérons les sections holomorphes $\sigma_{m,0}, \ldots, \sigma_{m,n}$ de E construites au Lemme 5.1 et l'application

$$\pi = [\sigma_{m,j}]_{1 \leq m \leq l, 0 \leq j \leq n} : M \to \mathbf{C}P^N,$$

où $N = (n+1)l - 1$. Composée avec les projections $p_m : \mathbf{C}P^N \to \mathbf{C}P^n$ on retrouve les applications méromorphes $p_m \circ \pi = \pi_{T_m}$. On a donc l'inégalité $\pi^*\Omega_{FS} \geq C\Omega$ pour une constante strictement positive C.

De plus en chaque point x de M, l'une au moins des sections $\sigma_{m,j}$ est de norme supérieure à $1/2$ et toutes sont uniformément bornées par une constante universelle. La tirée en arrière par π de la métrique de Fubini-Study Ω_{FS} de $\mathbf{C}P^N$ s'exprimant par la formule

$$\pi^*\Omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\overline{\partial}\partial \log \big(\sum_l |\sigma_l|^2 \big),$$

nous obtenons l'inégalité $\pi^*\Omega_{FS} \leq D\Omega$, pour une constante $D > 0$. Le Théorème 2.2 est démontré.

5.2. **Démonstration du Théorème 2.3.** Soit (Σ, g) une surface riemannienne orientée à géométrie bornée est projective. D'après le Théorème d'Ahlfors-Bers [2], toute surface riemannienne orientée est conformément plate et admet donc une structure de surface de Riemann. Dans le cas où Σ est compacte, le Théorème de Riemann montre que Σ se plonge holomorphiquement dans $\mathbf{C}P(3)$. Si Σ est non compacte, alors $H^2(\Sigma, \mathbf{R})$ est nul, et ceci implique l'existence d'un fibré en droites holomorphe $E \to \Sigma$ muni d'une métrique dont la courbure est la forme volume v_g. Cette métrique est à géométrie bornée selon 3.1 si la courbure de g est bornée uniformément et le rayon d'injectivité de (Σ, g) est minoré uniformément par une constante positive. Le résultat découle donc du Théorème 2.2.

5.3. **Exemples.** Un revêtement infini d'une variété projective hermitienne est un exemple de variété hermitienne qui s'immerge localement bilipschitziennement et holomorphiquement dans un espace projectif complexe.

Notons que la famille des variétés hermitiennes qui s'immergent localement bilipschitziennement et holomorphiquement dans un espace projectif complexe est stable par produit et par éclatement le long d'une partie séparée ou d'une sous-variété à géométrie bornée. Ceci donne donc déja beaucoup d'exemples de variétés hermitiennes projectives en dimension supérieure.

Nous décrivons ci-après des exemples de variétés quasi-projectives non compactes munies d'une métrique hermitienne à géométrie bornée qui ne s'immergent pas bilipschitziennement et holomorphiquement dans un espace projectif complexe.

Rappelons que parmi les variétés holomorphiquement parallélisables compactes du type G/Γ, où G est un groupe de Lie complexe et Γ

un réseau cocompact de G, celles qui sont kählériennes sont les tores complexes $\mathbf{C}^n/\Gamma$. Soit GA le groupe affine complexe des matrices 2×2 triangulaires supérieures de déterminant 1, muni d'une métrique hermitienne invariante à droite.

Proposition 5.3. *Il n'existe pas d'immersion holomorphe $\pi : GA \to M$ à valeurs dans une variété kählérienne (M, g) vérifiant l'inégalité*

$$\frac{1}{C}\pi^*g \leq G \leq C\pi^*g,$$

où C est une constante strictement positive et G est une métrique hermitienne sur GA invariante à droite.

Démonstration. Sur GA, faisons agir le groupe à 1 paramètre t complexe par multiplication à gauche par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les orbites de ce groupe définissent un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont paraboliques. Supposons qu'il existe une immersion vérifiant les hypothèses de la Proposition.

Commençons par construire un courant strictement positif fermé de type $(1,1)$ sur M en utilisant une idée dûe à L. Ahlfors [1]. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des courbes entières sur lesquelles la restriction de G induit la métrique euclidienne. Prenons en une F et considérons les courants sur M définis pour tout $r > 0$ par

$$T_r(w) = \frac{1}{\mathrm{Aire}(D_r)} \int_{D_r} \pi^* w,$$

où D_r est un disque euclidien de F de rayon r, et l'aire étant mesurée avec la métrique π^*g. C'est une suite de courants de norme 1 sur M et donc on peut en extraire une sous-suite T_{r_i} convergente vers un courant T. Comme l'immersion π est localement bilipschitzienne la longueur du bord ∂D_r est négligeable devant l'aire de D_r pour la métrique π^*g lorsque r tend vers l'infini, ce qui montre que T est un courant fermé.

Montrons que T est homologue à 0 dans M. Pour cela remarquons que les transformations $\phi_s : GA \to GA$ obtenues par multiplication à gauche par les matrices

$$\begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{s} \end{pmatrix}$$

préservent le feuilletage $\mathcal{F}$ en contractant la restriction de G aux feuilles par e^{-2s}. Nous avons donc des majorations

$$|\phi_s^* w|_{\pi^*g,\infty} \leq Ce^{-2s}|w|_{\pi^*g,\infty} \tag{5.1}$$

pour toute $(1,1)$-forme w définie le long des feuilles de $\mathcal{F}$. A priori il n'y a pas de raison que ϕ_s s'étende à une transformation de M. Cependant, imaginons un instant que ce soit le cas. Soit ω la $(1,1)$-forme sur M naturellement associée à g. Cette forme est fermée donc $T(\phi_s^*\omega) = T(\omega)$ pour tout s, et d'après 5.1 nous avons $T(\phi_s^*\omega) \leq Ce^{-2s}$, ce qui montre que $T(\omega) = 0$ et contredit la stricte positivité de T. En général, ϕ_s ne se prolonge pas à un flot sur M, mais si w est l'image réciproque par π^* de ω, nous prouvons que la limite

$$\lim_i T_{r_i}(\phi_s^* w)$$

existe et est égale à $T(\omega)$. Pour cela il suffit de remarquer que w est une 2-forme fermée et bornée, et diffère de $\phi_s^* w$ de la différentielle d'une 1-forme *bornée* η. En effet des relations de Cartan nous déduisons la formule

$$\eta = d\Big(\int_0^t i_X \phi_t^* w dt\Big),$$

où X est le champ de norme 1 induit par le flot ϕ_s. Nous avons alors

$$\lim_i \frac{1}{\mathrm{Aire}(\pi(D_{r_i}))} \int_{\partial D_{r_i}} \eta = 0,$$

et nous en déduisons la convergence de $\frac{1}{\mathrm{Aire}(\pi(D_{r_i}))} \int_{D_{r_i}} \phi_s^* w$ vers $T(\omega)$. D'après 5.1 nous avons

$$|T(\omega)| \leq Ce^{-2s}.$$

Cela étant vrai pour tout s, c'est que $T(\omega) = 0$. C'est une contradiction puisque T est strictement positif.

Notre méthode montre aussi que la variété de Hopf $\mathbf{C}^2 - \{0\}$ muni de la métrique $\frac{|dz|}{|z|}$ invariante par les homothéties ne peut pas s'immerger localement bilipshitziennement et holomorphiquement dans une variété kählérienne. Elle peut s'adapter à bien d'autres espaces homogènes. Cependant nous ne savons pas si le groupe de Heisenberg complexe muni d'une métrique invariante à droite s'immerge ou pas holomorphiquement et de manière bilipshitzienne dans un espace projectif complexe. Nous reviendrons sur ce genre d'obstructions au paragraphe 9.2.

6. Continuité des séries fuchsiennes

Dans cette partie nous établissons des propriétés de continuité des sections minimisantes, et de leurs séries fuchsiennes associées.

Soient $p_i : E_i \to M_i$, $i = 1, 2$ deux fibrés en droites holomorphes, et $|.|_i$ des métriques hermitiennes lisses sur E_i de courbure strictement positive et à géométrie bornée. Nous supposons que pour $i = 1, 2$, le rayon $r(|.|_i)$ est supérieur à r_0 et que la courbure de Ricci de la métrique kählérienne g_i que $|.|_i$ induit sur M_i est majorée par 1/4. Sous ces conditions, tout 1-jet $j : T_tM_i \to E_i$ de section holomorphe de E_i se prolonge en une section holomorphe de $L^2(|.|_{i,t})$, où $|.|_{i,t} = \exp(\alpha d(.,t))|.|_i$ (voir Lemme 3.3). Rappelons que $m(j)$ désigne celle de norme minimale.

Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $R >> 1$ deux réels. Supposons qu'il existe des domaines $D_i \subset M_i$ contenant des boules $B(x_i, R)$ et un isomorphisme de fibré en droites complexes $\phi : p_1^{-1}(D_1) \to p_2^{-1}(D_2)$ tel que

(i) ϕ est $(1+\varepsilon)$-bilipschitzien,

(ii) $\exp(-\varepsilon)|.| \leq \phi_*|.| \leq \exp(\varepsilon)|.|$,

(iii) Pour tout 1-jet ω_1 (resp. ω_2) de section holomorphe de E_1 (resp. E_2), $|\overline{\partial}\phi_*\omega_1| \leq \varepsilon|\omega_1|$ (resp. $|\overline{\partial}\phi^*\omega_2| \leq \varepsilon|\omega_2|$).

Lemme 6.1 (Continuité des sections minimisantes)**.** *Soient t_1 un point de $B(x_1, R/8)$ et $t_2 = \phi(t_1)$. Supposons que ϕ est holomorphe sur la boule $B(x_1, 1)$. Soit j_1 un 1-jet de section holomorphe de E_1 en t_1 et $j_2 = \phi_* j_1$. Alors*

$$|\phi m(j_1)(x_1) - m(j_2)(x_2)| \leq C \exp(-\alpha d(x_1, t_1)) f(R, \varepsilon)|j_1|,$$

où $f(\varepsilon, R)$ est une fonction qui tend vers $1/\sqrt{R}$ lorsque ε tend vers 0, et C est une constante universelle.

Les sections minimisantes passant par un jet en un point t ne dépendent donc essentiellement que de la géométrie de $|.|$ en restriction à une grande boule centrée en t. Cette propriété a été mise en évidence par M. Gromov ([13], p. 387, Remark (a) of 3.3.5).

Démonstration. Observons que puisque $\varepsilon < 1$, ϕ est 2-bilipschitzien. Nous avons donc les inclusions :

$$B(t_2, R/2) \subset B(x_2, 3R/4) \subset B(x_2, R).$$

Considérons une fonction lisse $\psi : M_2 \to [0, 1]$ qui vaut 1 sur $B(t_2, R/2)$, 0 à l'extérieur de $B(x_2, R)$, et telle que

$$|d\psi| \leq C/R,$$

la constante C ne dépendant que de r_0. Nous voulons perturber la section

$$\psi\phi_* m(j_1) : M_2 \to E_2$$

en une section holomorphe $h_2 : M_2 \to E_2$ dans la norme $|.|_{t_2,2}$.[4]

Comportement des métriques $|.|_t$. Les propriétés suivantes portant sur les métriques $|.|_{i,t_i}$ découlent directement des propriétés (ii) et (iii) : il existe une fonction $\eta(R,\varepsilon)$ qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et telle que

(ii)' $\exp(-\eta)|.|_{t_2} \leq \phi_*|.|_{t_1} \leq \exp(\eta)|.|t_2$,

(iii)' Pour tout 1-jet ω_1 (resp. ω_2) de section holomorphe de E_1 (resp. E_2), $|\overline{\partial}\phi_*\omega_1|_{t_2} \leq \eta|\omega_1|_{t_1}$ (resp. $|\overline{\partial}\phi^*\omega_2|_{t_1} \leq \eta|\omega_2|_{t_2}$).

Estimation du $\overline{\partial}$. Nous avons

$$|\overline{\partial}(\psi\phi m(j_1))|_{t_2,2} \leq |(\overline{\partial}\psi)\phi m(j_1))|_{t_2,2} + |(\overline{\partial}\phi m(j_1))\psi|_{t_2,2}.$$

Commençons par majorer le premier terme. Nous avons

$$|(\overline{\partial}\psi)\phi m(j_1)|^2_{t_2,2} \leq \big(\frac{C}{R}\big)^2|\phi m(j_1)|^2_{t_2,B(x_2,R)}$$

$$= \big(\frac{C}{R}\big)^2\int_{B(x_2,R)}|\phi m(j_1)|^2_{t_2}dv_{g_2} \leq \big(\frac{C}{R}\big)^2|m(j_1)|^2_{t_1,2}.$$

D'après le Lemme 3.3, nous obtenons donc

$$|(\overline{\partial}\psi)\phi m(j_1)|_{t_2,2} \leq \frac{C}{R}|j_1|. \tag{6.1}$$

Majorons le deuxième terme. D'après (iii)', nous avons

$$|\psi\overline{\partial}\phi m(j_1)|^2_{t_2,2} \leq |\overline{\partial}\phi m(j_1)|_{2_1,2} \leq \int_{B(x_2,R)}|\overline{\partial}\phi m(j_1)|^2_{t_2}dv_{g_2}$$

$$\leq C\eta^2|J_1m(j_1)|^2_{t_1},$$

où $J_1m(j_1)$ désigne le premier jet de $m(j_1)$. Les inégalités de Garding nous donnent en tout point y_1 de M_1,

$$|J_1m(j_1)(y_1)|^2_{t_1} \leq C\int_{B(y_1,1)}|m(j_1)(z_1)|^2_{t_1}dv_{g_1}(z_1),$$

donc

$$|J_1m(j_1)|^2_2 \leq C\int_{d(y_1,z_1)\leq 1}|m(j_1)(z_1)|^2_{t_1}dv_{g_1}(y_1)dv_{g_1}(z_1)$$

[4]Pour tout U dans $\mathcal{U}$, toute partie $B \subset M_i$, tout point z de M, et toute section $\tau : B \to E$, notons

$$|\tau|_{z,B,2} = \sqrt{\int_B |\tau(y)|^2_z dv_g(y)} \quad \text{et} \quad |\tau|_{z,2} = |\tau|_{z,M,2}.$$

$$= C \int_{z_1 \in M_1} \mathrm{vol}(B(z_1, 1)) |m(j_1)(z_1)|^2_{t_1} dv_{g_1}(z_1) \leq C |m(j_1)|^2_{t_1}.$$

Nous en déduisons

$$|\psi \overline{\partial} \phi m(j_1)|_{t_2,2} \leq C\eta |j_1|,$$

et en combinant avec 6.1,

$$|\overline{\partial}(\psi \phi m(j_1))|_{t_2,2} \leq C(\eta + \frac{1}{R})|j_1|.$$

Perturbation. Le Lemme 3.3 fournit une section holomorphe $h_2 : M_2 \to E_2$ telle que

$$|h_2 - \psi \phi m(j_1)|_{t_2,2} \leq C(\eta + \frac{1}{R})|j_1|. \tag{6.2}$$

L'inégalité de Garding donne, puisque $h_2 - \psi \phi m(j_1)$ est holomorphe sur $B(x_2, 1/2)$:

$$|J_1 h_2(t_2) - j_2| \leq C(\eta + \frac{1}{R})|j_1|.$$

Quitte à ajouter à h_2 la section $m(j_2 - J_1 h_2))$, nous pouvons supposer que l'on a en plus

$$J_1 h_2 = j_2.$$

Pythagore et une inégalité. Comme $m(j_2)$ est la section holomorphe de $L^2(|.|_{t_2})$ passant par j_2 de norme minimale, elle est orthogonale à l'espace des sections dont le premier jet en t_2 s'annule. Nous avons donc

$$|h_2|^2_{t_2,2} = |m(j_2)|^2_{t_2,2} + |h_2 - m(j_2)|^2_{t_2,2} \geq |m(j_2)|^2_{t_2,2}.$$

En vertu de 6.2, on trouve

$$|\psi \phi m(j_1)|_{t_2,2} \geq (1 - C(\eta + \frac{1}{R}))|m(j_2)|_{t_2,2}.$$

Or

$$|\psi \phi m(j_1)|_{t_2,2} \leq |\phi m(j_1)|_{t_2,D_2,2} \leq (1+\varepsilon)^{n+3/2} |m(j_1)|_{t_1,D_1,2},$$

d'où les inégalités

(6.3)

$$(1+\varepsilon)^{n+3/2} |m(j_1)|_{t_1,2} \geq |\psi \phi m(j_1)|_{t_2,2} \geq (1 - C(\eta + \frac{1}{R}))|m(j_2)|_{t_2,2}.$$

Symétrie. Les hypothèses du Lemme sont symétriques. Les inégalités 6.3 sont donc valables pour $m(j_2)$ aussi. Nous obtenons alors

$$(1+\varepsilon)^{n+3/2}|m(j_2)|_{t_2,2} \geq (1-C(\eta+\frac{1}{R}))|m(j_1)|_{t_1,2}.$$

En réutilisant 6.3 et 6.2, nous trouvons une fonction $\eta'(R,\varepsilon)$ qui tend vers 0 lorsque ε tend vers 0 et telle que

$$(1+C(\eta'+\frac{1}{R}))|m(j_2)|_{t_2,2} \geq |h_2|_{t_2,2} \geq (1-C(\eta'+\frac{1}{R}))|m(j_2)|_{t_2,2}.$$

Finalement, en vertu de l'égalité de Pythagore,

$$|h_2 - m(j_2)|_{t_2,2} = \sqrt{|h_2|^2_{t_2,2} - |m(j_2)|^2_{t_2,2}} \leq C\sqrt{\eta' + \frac{1}{R}}|j_2|$$

et de nouveau à cause de 6.2, on obtient

$$\begin{aligned}|\phi m(j_1) - m(j_2)|_{t_2,B(t_2,R/2),2} &\leq |\psi\phi m(j_1) - m(j_2)|_{t_2,2}\\ &\leq C\sqrt{\eta'+\frac{1}{R}}|j_2|.\end{aligned}$$

Le Lemme 6.1 découle alors de l'inégalité de Garding, en choisissant la fonction

$$f(R,\varepsilon) = C(\eta'(R,\varepsilon)+\frac{1}{R})^{1/2}.$$

Nous nous intéressons à présent à la continuité des séries fuchsiennes. Pour assurer leur convergence, nous supposons que la courbure de Ricci des métriques g_i est majorée par le réel c_0 donné par le Lemme 4.2. Rappelons que le réel $\delta_0 >> 1$ a été défini à la Proposition 4.3.

Lemme 6.2 (Continuité des séries fuchsiennes)**.** *Soient T_i des parties δ_0-séparées de M_i, et $j_i = \{j_i(t)\}_{t\in M_i}$ des familles bornées de 1-jets de section holomorphe de E_i dont le support est contenu dans T_i. Supposons que ϕ est holomorphe sur chaque boule $B(t,1)$, où $t \in T_1 \cap D_1$ et que $\phi(T_1 \cap D_1) = T_2 \cap D_2$. Alors*

$$|\phi\sigma(j_1)(x_1) - \sigma(j_2)(x_2)| \leq C(f(R,\varepsilon)\max(|j_1|_\infty, |j_2|_\infty) + |j_2 - \phi_* j_1|_{\infty,D_2}),$$

où $f(R,\varepsilon)$ est une fonction qui tend vers $1/\sqrt{R}$ lorsque ε tend vers 0 et C est une constante universelle.

Démonstration. Nous avons

$$\phi(\sigma(j_1)(x_1)) - \sigma(j_2)(x_2) =$$

$$\sum_{t\in T_1\cap B(x_1,R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2)$$

$$+ \sum_{t \in M_1 - B(x_1, R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - \sum_{t \in M_2 - \phi(B(x_1,R/8)} m(j_2(t))(x_2).$$

Nous allons majorer la norme de chacun des termes de droite de cette égalité.

Majoration de la norme du premier terme. Nous avons pour tout $t \in T_1 \cap B(x_1, R/8)$,

$$|\phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2)| \leq$$

$$|\phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(\phi_* j_1(t))(x_2)| + |m(\phi_* j_1(t) - j_2(\phi(t)))(x_2)|.$$

Ainsi, en appliquant le Lemme 6.1,

$$|\sum_{t \in T_1 \cap B(x_1, R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1)) - m(j_2(\phi(t)))(x_2)| \leq$$

$$f(R, \varepsilon)|j_1|_\infty \sum_{t \in T_1 \cap B(x_1, R/8)} e^{-\alpha d(x_1, t)} +$$

$$C|\phi_* j_1 - j_2|_{\infty, D_1} \sum_{t \in T_2 \cap D_2} e^{-\alpha d(x_2, t)}.$$

Comme T_1 et T_2 sont des parties δ_0-séparées, les techniques de 4.2 montrent que les deux sommes apparaissant dans le terme de droite de l'inégalité précédente sont majorées par une constante ne dépendant que de $r_0,\ \alpha,\ \delta_0$ et c_0. Nous obtenons donc l'inégalité voulue

$$|\sum_{t \in T_1 \cap B(x_1, R/8)} \phi(m(j(t))(x_1)) - m(j(\phi(t)))(x_2)| \leq$$

$$C(f(R, \varepsilon) \max(|j_1|_\infty, |j_2|_\infty) + |\phi_* j_1 - j_2|_{\infty, D_1}).$$

Majoration de la norme des deux autres termes. Puisque les sections minimisantes sont à décroissance exponentielle pour la norme $|.|$, nous avons

$$|\sum_{t \in T_1 - B(x_1, R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1))| \leq C|j_1|_\infty \sum_{t \in T_1 - B(x_1, R/8)} e^{-\alpha d(x_1, t)}.$$

Les techniques de 4.3 montrent que

$$\sum_{t \in T_1 - B(x_1, R/8)} e^{-\alpha d(x_1, t)} \leq C \int_{R/8 - \delta_0}^{\infty} e^{-\alpha r/2} dr \leq C e^{-\frac{\alpha}{16/R}} \leq C/\sqrt{R},$$

la constante ne dépendant que de $r_0,\ \alpha,\ c_0$, et δ_0. Nous obtenons donc

$$|\sum_{t \in T_1 - B(x_1, R/8)} \phi(m(j_1(t))(x_1))| \leq C|j_1|_\infty/\sqrt{R}.$$

Pour le troisième terme, le même raisonnement donne

$$\Big|\sum_{t\in M_2-\phi(B(x_1,1/8\varepsilon))} m(j_2(t))(x_2)\Big| \leq C|j_2|_\infty/\sqrt{R},$$

puisque

$$M_2-\phi(B(x_1,R/8))\subset M_2-B(x_2,R/16).$$

Le Lemme 6.2 est démontré.

7. Séries fuchsiennes sur une lamination

Une *lamination par variétés complexes* d'un espace topologique X est un atlas $\mathcal{L}$ d'homéomorphismes $\varphi : U\to B\times T$ à valeurs dans le produit d'une boule B de $\mathbf{C}^n$ par un espace topologique T, appelé *espace transverse*, tels que les changements de cartes soient de la forme

$$(z,t)\mapsto (z'(z,t),t'(t)),$$

où z' dépend holomorphiquement de z. Les feuilles de $\mathcal{L}$ localement définies par $B\times t$ sont des variétés complexes et forment une réunion disjointe de X.

Sur une lamination par variétés complexes $\mathcal{L}$, soit $\mathcal{O}$ le préfaisceau des fonctions *continues* $f : U\to\mathbf{C}$ définies sur un ouvert U de X, qui sont holomorphes le long des feuilles de $\mathcal{L}$. Ce faisceau nous permet d'étendre aux laminations par variétés complexes les notions analytiques classiques dont on dispose sur les variétés complexes. Par exemple un fibré en droites holomorphe sur $\mathcal{L}$ est un élément de $H^1(X,\mathcal{O}^*)$.

Considérons aussi le préfaisceau $C^\infty(\mathcal{L})$ des fonctions $\varphi : U\to\mathbf{R}$ définies sur un ouvert U de X qui sont lisses le long des feuilles, et telles que les dérivées à tout ordre par rapport aux coordonnées z soient aussi continues. Comme les changements de coordonnées sont holomorphes, cette notion ne dépend pas du système de coordonnées choisies. Comme dans le cas des variétés, il est possible de construire des partitions de l'unité associées à un recouvrement localement fini par des ouverts de X avec des fonctions de $C^\infty(\mathcal{L})$. Ceci permet de construire des métriques lisses sur un fibré en droites holomorphe au dessus de $\mathcal{L}$.

7.1. **Structure produit.** En général, si F est une feuille d'une lamination lisse, il n'est pas possible de déformer un domaine [5] $D\subset F$ dans une feuille voisine. L'obstruction est le fait que la représentation d'holonomie

$$Hol : \pi_1(D,*)\to \mathrm{Homeo}(T,*)$$

[5] Un domaine est un ouvert connexe relativement compact à bord lisse.

n'est pas triviale, où T est un espace transverse au point $* \in D$ et $\mathrm{Homeo}(T, *)$ désigne le groupe des germes d'homéomorphismes de T qui fixent $*$.

Lemme 7.1. *Soit $D \subset F$ un domaine contenu dans une feuille F pour lequel la représentation d'holonomie Hol est triviale. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de D dans X et un difféomorphisme de lamination $\phi : \overline{D} \times T \to \mathcal{V}$.*

De plus, supposons que $\{\overline{B_i}\}_{i \in I}$ soit une famille finie de boules fermées lisses disjointes contenues dans D, et que

$$\phi_i : \overline{B_i} \times T_i \to \mathcal{V}_i$$

soient des cartes feuilletées avec $\phi_i(., t_i) = id|_{\overline{B_i}}$. Alors quitte à restreindre les T_i il existe des identifications naturelles $T_i = T_j$ données par l'holonomie, et l'on peut choisir le difféomorphisme $\phi : D \times T \to \mathcal{V}$ en sorte que

$$\phi|_{\overline{B_i} \times T_i} = \phi_i.$$

Démonstration. Considérons un plongement lisse $\pi : D' \to \mathbf{R}^N$ d'un voisinage D' de $\overline{D}$ pour lequel la représentation d'holonomie est triviale. En utilisant une partition de l'unité, il est possible de prolonger π en une application définie sur un voisinage V de $\overline{D}$ dans X. Nous la notons encore $\pi : V \to \mathbf{R}^N$ pour simplifier les notations.

Soit D' un domaine contenu dans F tel que $\overline{D} \subset D' \subset \overline{D'} \subset V$. D'après le Théorème du voisinage tubulaire, il existe un voisinage W de $\pi(\overline{D'})$ et une fibration lisse

$$B \to W \xrightarrow{p} \overline{D'},$$

telle que $p \circ \pi|_{\overline{D'}}$ est l'identité. Quitte à restreindre l'ouvert V, nous pouvons supposer que $p \circ \pi$ est une submersion le long des feuilles contenues dans V. Posons alors $U = V \cap (p \circ \pi)^{-1}(\overline{D'})$.

En restriction à une feuille F' de U, l'application $p \circ \pi : F' \to \overline{D'}$ est un revêtement dont le groupe est donné par la représentation d'holonomie. Puisque cette dernière est triviale, l'application $p \circ \pi_F$ est injective en restriction à une feuille de U.

D'autre part, la restriction $p \circ \pi$ est surjective en restriction à des feuilles F' de U proches de $\overline{D'}$ puisque l'holonomie est définie sur tout domaine compact contenu dans une feuille. La première partie du Lemme est démontrée.

La deuxième partie du Lemme résulte du fait suivant. Soit M une variété à bord et $B_i \subset M$ une famille finie de boules à bord lisse ne rencontrant pas le bord de M. Alors, si $\phi_i : \overline{B_i} \to M$ sont des plongements lisses assez proches de l'injection naturelle dans la topologie C^1, il existe un difféomorphisme $\phi : M \to M$ assez proche de l'identité dans la topologie C^1 tel que $\phi|_{\overline{B_i}} = \phi_i$.

Lemme 7.2. *Soit $p : E \to \overline{D} \times T$ un fibré en droites complexes lisse et $t_0 \in T$. Il existe un voisinage T' de t_0 dans T et un isomorphisme de fibré en droites lisses*

$$\phi : E|_{\overline{D}\times\{t_0\}} \times T' \to E$$

qui induit l'identité sur la base.

De plus, avec les notations du Lemme 7.1, si l'on a des isomorphismes de fibrés en droites lisses

$$\phi_i : E|_{B_i\times\{t_0\}} \times T \to E|_{B_i\times T},$$

induisant l'identité sur la base, il est possible de choisir ϕ en sorte que

$$\phi|_{B_i\times\{t_0\}} \times T' = \phi_i|_{B_i\times T'}.$$

Démonstration. Il existe un voisinage T" de t_0 dans T, un recouvrement $\{U_j\}$ de $D \times T$" par des ouverts U_j de la forme $B_j \times T$", pour lesquels il existe des isomorphismes de fibrés en droites lisses

$$\phi_j : E|_{B_j\times\{t_0\}} \times T\text{"} \to E|_{B_j\times T\text{"}},$$

qui induisent l'identité sur la base et tels que

$$\phi_j|_{E|_{B_j\times\{t_0\}}\times\{t_0\}} = id.$$

Soit $\{\chi_j\}_j$ une partition de l'unité associée au recouvrement $\{U_j\}_j$. Étendons $\chi_j\phi_j$ à un endomorphisme de fibré en droites lisses

$$\widetilde{\chi_j\phi_j} : E|_{\overline{D}\times\{t_0\}} \times T\text{"} \to E|_{\overline{D}\times T\text{"}},$$

et induisant l'identité sur la base. La somme

$$\phi = \sum_j \widetilde{\chi_j\phi_j}$$

est un endomorphisme de fibré en droites lisse qui vaut l'identité au dessus de $\overline{D} \times \{t_0\}$, et qui est l'identité sur la base : il existe donc un voisinage T' de t_0 dans T" tel que

$$\phi : E|_{\overline{D}\times\{t_0\}} \times T' \to E,$$

est un isomorphisme de fibré en droite lisse induisant l'identité sur la base.

Pour la deuxième partie, on commence par étendre les isomorphismes

$$\phi_i : E|_{B_i\times\{t_0\}} \times T \to E|_{B_i\times T},$$

à des isomorphismes de fibrés en droites lisses

$$\phi_i : E|_{B'_i \times \{t_0\}} \times T \to E|_{B'_i \times T},$$

induisant l'identité sur la base, où B'_i est une boule fermée contenant B_i dans son intérieur. On complète la famille $B'_i \times T$" par des ouverts U_j comme précédemment qui ne rencontrent pas $B_i \times T$. Il suffit alors de prendre une partition de l'unité telle que χ_i est identiquement constante égale à 1 sur $B_i \times T$. Le lemme est démontré.

7.2. **Tubes.** Un *bout de transversale* est une partie fermée τ de X pour laquelle il existe une famille de boîtes $B \times T$ recouvrant X telles que $\tau \cap (B \times T) \subset \{0\} \times T$. Localement, un bout de transversale se plonge dans l'espace transverse T. On peut donc définir son bord pour la topologie transverse.

Considérons un bout de transversale τ, et la réunion disjointe X_τ des revêtements universels $\widetilde{F}_t$ des feuilles passant par un point t de τ. Cet ensemble est muni d'une topologie définie de la façon suivante : un ouvert est l'ensemble des classes d'homotopies de lacets qui peuvent être représentées par un chemin contenu dans un ouvert donné de X. L'espace topologique X_τ est appelé le *tube* de τ. Il est bien connu que l'espace X_τ est Hausdorff si et seulement si les feuilles passant par τ ne supportent pas de *cycle évanouissant* (voir par exemple [4, 17]).

Définition 7.3. Un *cycle évanouissant* de $\mathcal{L}$ est un lacet γ contenu dans une feuille et non homotope à un point dans sa feuille, mais qui est limite de lacets γ_n contenus dans des feuilles voisines et qui, eux, sont homotopes à un point dans leur feuille.

L'exemple typique d'un cycle évanouissant est un cylindre bouché d'un coté par un disque qui accumule à l'autre extrémité sur un tore.

Lorsque X_τ est Hausdorff, il hérite de la structure d'une lamination par variétés complexes, induite par la projection naturelle $r : X_\tau \to X$ qui est un homéomorphisme local. La projection $X_\tau \to X$ est alors un biholomorphisme local de lamination par variétés complexes.

L'avantage des tubes est le fait que pour tout domaine contenu dans l'une de leur feuille la représentation d'holonomie est triviale. On peut donc leur appliquer le Lemme 7.1.

7.3. **Construction de séries fuchsiennes continues.** Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact X, $E \to \mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne $|.|$ lisse dont la courbure en restriction à chaque feuille est strictement positive. Notons g la métrique kählérienne lisse le long des feuilles induites par la courbure de $|.|$. Ces métriques sont automatiquement à géométrie bornée parce que l'espace total est compact. Plus précisément il existe des réels $r > 0$ et $c > 0$ tels que $r(|.|_{|F}) \geq r$ et la courbure de Ricci de g_F est bornée par c pour toute feuille F. Nous supposons que $r \geq r_0$ et $c \leq c_0$, où le réel r_0 a été défini au Lemme 3.3 et le réel c_0 au Lemme 4.2. Ce n'est pas une grande restriction quitte à considérer des puissances assez grandes de E.

Soit $j = \{j_x\}_{x\in X}$ une famille *bornée* de 1-jets de sections holomorphes de E, dont le support est un bout de transversale $\mathcal{T}$ induisant sur chaque feuille une partie δ_0-séparée. Sur le revêtement universel $r_F : \widetilde{F} \to F$ d'une feuille F de $\mathcal{L}$, la série fuchsienne $\sigma(r_F^* j_F)$ converge et est invariante par le groupe du revêtement. Elle définit donc une section holomorphe de E en restriction à F. La collection de toutes ses sections est une section bornée $\tilde{\sigma}(j) : X \to E$ holomorphe sur chaque feuille. C'est la *série fuchsienne* associée à la famille j. La raison pour laquelle on la note différemment est le fait que ces séries ne sont pas définies directement sur les feuilles mais sur leur revêtement universel.

Lemme 7.4. *Supposons que $\mathcal{L}$ n'a pas de cycle évanouissant et que la famille j est continue et s'annule sur le bord de $\mathcal{T}$. Alors $\tilde{\sigma}(j)$ est continue.*

Démonstration. Soit x un point de X où l'on veut démontrer la continuité de $\tilde{\sigma}(j)$. Considérons un bout de transversale τ passant par x et le tube X_τ : c'est une lamination par variétés complexes puisque $\mathcal{L}$ n'a pas de cycle évanouissant. Enfin, donnons nous une section locale ne s'annulant pas $s : U \to r^*E$ définie dans un voisinage de x et écrivons $\tilde{\sigma}(j) = fs$.

Soit $R >> 1$ et $D \subset \widetilde{F_x}$ un domaine contenant la boule $B(x, R)$. L'image réciproque $r^{-1}(\mathcal{T})$ est un bout de transversale de X_τ qui intersecte D sur une partie δ_0-séparée. Pour tout $t \in r^{-1}(\mathcal{T}) \cap D$, soient $\phi_t : B \times T_t \to \mathcal{V}_t$ des cartes locales holomorphes, où B est la boule unité de $\mathbf{C}^n$, T_t est un espace transverse contenant t, et $\mathcal{V}_t$ un voisinage de t. Soient aussi $s_t : \mathcal{V}_t \to r^*E$ des sections locales holomorphes trivialisantes. On peut supposer que l'image $\phi_t(B \times t)$ contient la boule $B(t, 1)$.

Appliquons les Lemmes 6.2, 7.1 et 7.2 : nous en déduisons qu'il existe un voisinage $x \in V \subset U$ de x et une structure de boîte lisse $V = B \times T$ (provenant de la structure produit $D \times T$ d'un voisinage de D), avec $x = (0, t_0)$ telle que

$$\liminf_{t\to t_0} |f(., t) - f(.t_0)| \leq C \frac{|j|_\infty}{\sqrt{R}}.$$

Les inégalités de Garding montrent que f est uniformément continue le long des feuilles ; cela prouve que f est continue, et à fortiori $\tilde{\sigma}(j)$.

Remarque 7.5. Lorsque la lamination est transversalement lipshitzienne, que le fibré en droites E est lipshitzien, et que j est lipschitzienne, le module de continuité des séries fuchsiennes $\tilde{\sigma}(j)$ n'est à priori majoré que par

$$\delta(\sigma(j))(\varepsilon) \leq C\sqrt{\frac{1}{\log 1/\epsilon}}.$$

Nous n'obtenons donc que très peu de régularité transverse avec cette méthode.

8. Immersion de laminations par variétés complexes

8.1. **Démonstration du Théorème 2.5.** Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact X qui n'a pas de cycle évanouissant, et $E \to \mathcal{L}$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique à courbure strictement positive le long des feuilles. Il s'agit de montrer que $\mathcal{L}$ est projective.

Nous construisons des applications

$$\pi : X \to \mathbf{C}P^N$$

qui immergent holomorphiquement les feuilles de $\mathcal{L}$, et qui séparent deux points distincts donnés x_1 et x_2 de X. Les applications π sont de la forme $[\sigma_0, \ldots, \sigma_N]$, où les σ_l sont des sections d'une puissance assez grande $E^{\otimes k}$ de E données par le lemme suivant.

Lemme 8.1. *Soit $\mathcal{T} \subset X$ un bout de transversale. Lorsque $k \geq k_1(\mathcal{T})$ est assez grand, alors toute famille j continue de 1-jets de sections holomorphes de $E^{\otimes k}$ définie le long de $\mathcal{T}$ se prolonge en une section holomorphe continue $\sigma : X \to E^{\otimes k}$ telle que*

$$|\sigma|_\infty \leq C|j|_{\infty,\mathcal{T}},$$

où C est une constante universelle.

Démonstration. Quitte à considérer des puissances assez grandes de E, nous pouvons supposer que les rayons des feuilles sont supérieur à r_0, que la courbure de Ricci de la métrique kählérienne induite par la courbure de la métrique $|.|^{\otimes k}$ est majorée par c_0, et que le bout de transversale $\mathcal{T}$ intersecte les feuilles sur des parties $2\delta_0$-séparées. Considérons alors un bout de transversale $\mathcal{T}'$ qui contient $\mathcal{T}$ dans son intérieur, et tel que toute feuille l'intersecte sur une partie δ_0-séparée.

Commençons par étendre la famille de jets j à une famille continues j' de 1-jets définie sur $\mathcal{T}'$ telle que : d'une part j' s'annule sur le bord de $\mathcal{T}'$, et d'autre part $|j'|_{\infty,\mathcal{T}'} \leq |j|_{\infty,\mathcal{T}}$. D'après le Lemme 4.2, nous avons

$$|J_1\tilde{\sigma}(j') - j|_{\infty,\mathcal{T}} \leq D(\delta_0)|j|_{\infty,\mathcal{T}},$$

et d'après 7.4, $\tilde{\sigma}(j)$ est une section continue holomorphe le long des feuilles. Ceci est donc le début d'un procédé d'approximations successives qui nous donnent le résultat.

Achevons la démonstration du Théorème 2.5. Soient x_1 et x_2 deux points distincts de X. D'après la Proposition 8.1, lorsque k est assez grand, il existe une section holomorphe σ de $E^{\otimes k}$ telle que $\sigma(x_1) = 0$ et $\sigma(x_2) \neq 0$. Par ailleurs, lorsque k est assez grand, en tout point y de X il existe des sections holomorphes $\sigma_0^y, \dots, \sigma_n^y$ telles que $|\sigma_0^y(y)| = 1$ et $f = (\sigma_1^y/\sigma_0^y, \dots, \sigma_n^y/\sigma_0^y) = z + O(|z|^2)$, où z est une coordonnée centrée en y. Il existe donc un voisinage autour de y où σ_0^y ne s'annule pas et df est injective. Un nombre fini de ses voisinages recouvrent X par compacité. L'application

$$[\sigma : \sigma_0^{y_1} : \dots : \sigma_n^{y_1} : \dots : \sigma_0^{y_r} : \dots : \sigma_n^{y_r}]$$

est une immersion holomorphe et sépare les points x_1 et x_2.

Remarque 8.2. En fait nous démontrons que si $k >> 1$, alors l'espace des sections holomorphes et continues de $E^{\otimes k}$ est de dimension infinie, sauf si $\mathcal{L}$ est une variété compacte. La situation diffère donc fortement de celle des variétés compactes.

8.2. **Exemple : les laminations hyperboliques.** Une lamination par surfaces de Riemann est dite *hyperbolique* si toutes ses feuilles sont revêtues par le disque unité. É. Ghys a construit des fonctions méromorphes sur une lamination par surfaces hyperboliques [10], sous l'hypothèse qu'il existe une *transversale totale*.[6] Ici, nous retrouvons ce résultat sans supposer l'existence d'une transversale totale. Nous verrons qu'en fait, toute lamination par surfaces de Riemann hyperboliques d'un espace compact admet une *multi-transversale totale* (voir Exemple 9.2).

Corollaire 8.3. *Une lamination par surfaces de Riemann hyperboliques d'un espace compact est projective.*

Démonstration. Soit g la métrique complète de courbure -1 sur le fibré tangent de chaque feuille. D'après le Théorème d'A. Candel [5] et d'A. Verjovsky [29], g est lisse sur l'espace total de la lamination. Ainsi, le fibré cotangent est muni d'une métrique lisse de courbure strictement positive. Le Corollaire résulte donc du Théorème 2.5 et du résultat suivant.

[6] Une transversale totale est un bout de transversale dont le bord est vide.

Lemme 8.4. *Une lamination par surfaces hyperboliques d'un espace compact n'a pas de cycle évanouissant.*

Démonstration. Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces hyperboliques d'un espace compact X, et supposons que $\mathcal{L}$ ait un cycle évanouissant. Il existe donc un lacet $\gamma_\infty : \mathbf{S}^1 \to X$ contenu dans une feuille L et non homotope à un point dans L, qui est limite uniforme de lacets $\gamma_n : \mathbf{S}^1 \to X$ contenus dans des feuilles voisines L_n dans lesquelles ils sont homotopes à un point.

Nous pouvons supposer que γ_∞ est une géodésique fermée. D'autre part, en approximant par des applications lisses l'application $\gamma : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{N} \cup \{\infty\} \to X$ dans la topologie C^0, nous pouvons aussi supposer que les courbes γ_n sont de classe C^3 et que la convergence $\gamma_n \to \gamma$ a lieu dans la topologie C^3. Nous en déduisons que la longueur des courbes γ_n tend vers la longueur de γ_∞, et que leur courbure tend uniformément vers 0.

Le revêtement universel des feuilles L_n est le disque hyperbolique $\mathbf{D}$. Comme les γ_n sont homotopes à un point dans L_n, elles se relèvent en des courbes $\widetilde{\gamma_n} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{D}$, qui ont même longueur et même courbure que les courbes γ_n. Comme le disque hyperbolique est homogène, nous pouvons supposer que ces courbes passent par un point donné p de $\mathbf{D}$. Extrayons une sous-suite de $\widetilde{\gamma_n}$ qui converge dans la topologie C^2 vers une courbe $\widetilde{\gamma_\infty} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{D}$, ce qui est possible car la famille de courbes $\widetilde{\gamma_n}$ est bornée dans la topologie C^3. Le lacet $\widetilde{\gamma_\infty}$ a la même longueur que γ_∞, et sa courbure est nulle. C'est donc une contradiction, car il n'y a pas de géodésique fermée dans le disque hyperbolique.

8.3. **Conjecture.** *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact X dont la dimension topologique* [7] *est finie. Supposons qu'il existe un fibré en droites holomorphe positif $E \to \mathcal{L}$, et que $\mathcal{L}$ n'ait pas de cycle évanouissant. Alors il existe un plongement holomorphe $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$.*

T. Ohsawa et N. Sibony [18] démontrent cette conjecture dans le cas des feuilletages lisses par variétés complexes de codimension 1 d'une variété compacte. Il semble qu'elle soit liée à des questions de régularité transverse des sections holomorphes des puissances de E. Par exemple, en vertu du Lemme suivant, nous saurions répondre à la conjecture si l'on savait construire des sections holomorphes *lipshitziennes* passant par une famille de jets donnée sur un bout de transversale.

[7] Rappelons que la dimension topologique d'un espace compact est finie si et seulement si il se plonge continument dans un espace euclidien.

Lemme 8.5. *Soit $T \subset \mathbf{C}^r$ un compact et B la boule unité de $\mathbf{C}^n$. Soit $f : B \times T \to \mathbf{C}^{n+r}$ une application lipshitzienne holomorphe en $z \in B$, et telle que*

$$f(z,t) = (z,t) + O(|z|^2).$$

Alors f plonge un voisinage de $0 \times T$.

Démonstration. Considérons les coordonnées

$$(Z_1, \ldots, Z_n) = (f_1(z,t), \ldots, f_n(z,t)).$$

L'application $(z,t) \mapsto (Z,t)$ est un biholomorphisme d'un voisinage de $0 \times T$ dans un ouvert de la forme $B(r) \times T$. Dans ces coordonnées l'application f s'exprime par

$$f(Z,t) = (Z, t + g(Z,t)),$$

où $g : B(r) \times T \to \mathbf{C}^r$ est une application holomorphe et lipshitzienne telle que $g(0,t) = 0$ et $dg_{(0,t)} = 0$. Montrons que f est injective au voisinage de $0 \times T$. Le Lemme de Schwarz appliqué aux fonctions $g(t,.) - g(t',.)$ (dont la norme est majorée par $C|t-t'|$) donne des inégalités du type

$$|g(Z,t) - g(Z,t')| \leq C|t-t'||Z|^2.$$

Supposons donc que l'on ait deux points distincts (Z,t) et (Z',t') de $B(r) \times T$ tels que $f(Z,t) = f(Z',t')$. On a bien entendu $Z = Z'$, d'où l'on déduit l'équation $t - t' = g(Z,t') - g(Z,t)$, et les inégalités $|t-t'| \leq |g(Z,t) - g(Z,t')| \leq C|t-t'||Z|^2$. Ceci oblige $|Z| \geq \sqrt{1/C}$ et f plonge $B(\sqrt{1/C}) \times T$ dans $\mathbf{C}^{n+r}$.

Voici quelques exemples où la méthode des séries fuchsiennes mènent à des sections lipschitziennes :

– Soit M une variété projective et $\rho : \pi_1(M) \to T$ une action du groupe fondamental de M sur un espace métrique compact T par transformations bilipschitziennes. La *suspension* de ρ est le quotient de la lamination triviale $\tilde{M} \times T$ par l'action diagonale du groupe fondamental de M, où $\tilde{M}$ est le revêtement universel de M. C'est une fibration au dessus de M, qui est un revêtement holomorphe le long des feuilles. Soit $E \to M$ un fibré en droites holomorphe de courbure strictement positive, et $F \to M \ltimes_\rho T$ le tiré en arrière de E. Il est aisé de vérifier que les séries fuchsiennes construites sur les puissances de F sont lipschitziennes. Les suspensions se plongent donc holomorphiquement dans un espace projectif complexe, si l'espace T est de dimension topologique finie.

– Soit U un domaine symétrique borné de $\mathbf{C}^n$, G son groupe de biholomorphismes, et K le stabilisateur d'un point de U. Le groupe G est un groupe algébrique réel qui peut être défini sur $\mathbf{Q}$. Considérons un réseau cocompact $\Gamma \subset G(\mathbf{R}) \times G(\mathbf{Q_p})$, qui existe d'après les travaux d'A. Borel pour certaines valeurs d'entiers premiers p. Observons que Γ agit par multiplication à gauche sur la lamination triviale $U \times G(\mathbf{Q_p}) = G/K \times G(\mathbf{Q_p})$ par biholomorphismes. Si l'on suppose que Γ agit sans points fixes, alors l'espace quotient est compact et muni d'une structure $\mathcal{L}$ de lamination par variétés complexes, dont l'espace transverse est totalement discontinu. Le fibré canonique K de $\mathcal{L}$ est muni d'une métrique de courbure strictement positive. Les séries fuchsiennes construites sur les puissances du fibré canonique mènent à des sections lipschitziennes. Ces exemples de laminations "arithmétiques" se plongent donc holomorphiquement dans un espace projectif complexe. Nous ne savons pas si ce sont des ensembles limites de feuilletages holomorphes sur des variétés projectives.
– Sur une lamination par surfaces hyperboliques dont la métrique hyperbolique est *lipschitzienne*, les séries fuchsiennes construites à partir des puissances du fibré canonique sont lipschitziennes. Ces laminations se plongent donc holomorphiquement dans un espace projectif complexe. Des exemples de telles laminations apparaissent avec les laminations associées à des pavages de l'espace hyperbolique (voir [10]). À nouveau, nous ne savons pas si ces laminations sont des minimaux de feuilletages holomorphes sur des variétés projectives.

8.4. **Plongement symplectique.** L'espace projectif complexe $\mathbf{C}P^N$ est muni de la $(1,1)$-forme de Fubini-Study qui est définie dans les coordonnées homogènes $[x_0 : \ldots : x_N]$ par

$$\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\overline{\partial}\partial \log(|x_0|^2 + \ldots + |x_N|^2).$$

C'est une forme *symplectique* compatible avec la structure complexe standard.

Dans ce paragraphe nous démontrons le Théorème 2.6. Soit $\mathcal{L}$ une lamination par variétés complexes d'un espace compact X, sans cycle évanouissant, de dimension topologique finie et $E \to \mathcal{L}$ un fibré en droites positif. Il s'agit de construire un plongement lisse $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$ qui immerge symplectiquement chaque feuille.

Dans un premier temps, nous construisons pour tout point x de X une application lisse $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$ immergeant symplectiquement chaque feuille et plongeant un voisinage de x. Soit $B \times T'$ une boîte locale en x pour laquelle $x = (0, t_0)$ et $T \subset T'$ est un voisinage compact de t_0 dans T. Comme la dimension topologique de T est finie, il existe un plongement topologique $p : T \to \mathbf{C}^r$, pour r assez grand. Si k est assez grand, il existe des sections holomorphes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{r+n}$ de E^k, bornées par une constante C ne dépendant que de T telles que

- $|\sigma_0| = 1$,
- $(\sigma_1(z,t)/\sigma_0(z,t), \ldots, \sigma_{r+n}(0,z)/\sigma_0(0,z)) = (p(t), z) + O(|z|^2)$.

On complète cette famille par des sections holomorphes $\sigma_{n+r+1}, \ldots, \sigma_N$ de E^k bornées par C et telles que $\pi = [\sigma_0 : \ldots : \sigma_N]$ induise une application continue de X dans $\mathbf{C}P^N$ immergeant holomorphiquement chaque feuille (voir 8.1). Nous allons déformer π dans la topologie C^1 en une application qui plonge un voisinage de x. Comme π est symplectique, nous aurons encore une application symplectique.

Soit $\psi : B \to \mathbf{R}$ une fonction lisse, positive, valant 1 sur $B(1/3)$ et nulle à l'extérieur de $B(2/3)$. Pour $0 < \epsilon < 1$ posons $\psi_\epsilon(x) = \psi(x/\epsilon)$ pour $x \in B$. Le support de ψ_ϵ est contenu dans $B(\epsilon/3)$. Pour $\epsilon = 0$ on pose $\psi_0 = 0$. Soit $\epsilon : T \to \mathbf{R}$ une fonction positive qui s'annule sur le bord de T et qui est strictement positive et t_0. Ecrivons $p = (p_1, \ldots, p_r)$. Soit $\sigma_0' = \sigma_0$. Si $1 \leq i \leq r$, posons

$$\sigma_i'(z,t) = \psi_\epsilon(t)(z)\sigma_0(z,t)p_i(t) + (1 - \psi_{\epsilon(t)}(z))\sigma_i(z,t).$$

Si $1 \leq i \leq n$, posons

$$\sigma_{r+i}(z,t) = \psi_\epsilon(t)(z)\sigma_0(z,t)z_i + (1 - \psi_{\epsilon(t)}(z))\sigma_{r+i}(z,t).$$

Si $r + n \leq i \leq N$, nous posons $\sigma_i' = \sigma_i$.

Soit $r > 0$ un réel tel que $|\sigma_0| \geq 1/2$ sur $B(r)$. Lorsque $|\epsilon|_\infty < r$, les sections σ_i' se prolongent en des sections lisses de E^k par $\sigma_i' = \sigma_i$ à l'extérieur de $B \times T$. L'application $[\sigma_0' : \ldots : \sigma_N']$ induit alors une application lisse de X dans $\mathbf{C}P^N$, en plongeant un voisinage de x.

Comparons les fonctions

$$f' = (\sigma_1'/\sigma_0', \ldots, \sigma_N'/\sigma_0') \quad \text{et} \quad f = (\sigma_1/\sigma_0, \ldots, \sigma_N/\sigma_0)$$

dans la topologie C^1. Elles sont définies sur $B(r)$ et à valeurs dans $\mathbf{C}^N$. Nous avons

$$f'(z,t) - f(z,t) = \psi_{\epsilon(t)}(z)(g_1(z,t), \ldots, g_N(z,t)),$$

avec $g_i(z,t) = f_i(z,t) - f_1(z,t)$ si $1 \leq 1 \leq r$, $g_i(z,t) = f_i(z,t) - z_{i-r}$ si $r + 1 \leq i \leq r + n$ et $g_i(z,t) = 0$ sinon. Les fonctions g_i sont des fonctions holomorphes définies sur $B(r)$, bornées par une constante C et qui s'annule en 0 ainsi que leur différentielle. Nous avons donc des majorations $|g(z,t)| \leq C|z|^2$ et $|dg_{(z,t)}| \leq C|z|$, d'après le Lemme de Schwarz. Puisque le support de ψ_ϵ est contenu dans la boule $B(\epsilon/3)$

nous avons $|f - f'|_\infty \leq C|\epsilon|^2_\infty$. D'autre part, en un point t tel que $\epsilon(t) > 0$ nous avons

$$df' - df = d\psi_{\epsilon(t)}g + \psi_{\epsilon(t)}dg.$$

Or $|d\psi_\epsilon| \leq C/\epsilon$, et donc puisque à nouveau le support de ψ_ϵ est contenu dans $B(\epsilon/3)$

$$|df' - df| \leq C|\epsilon|_\infty.$$

Ceci achève la démonstration de la première étape.

Le plongement de Plücker est un plongement holomorphe et symplectique de $\mathbf{C}P^{N_1} \times \mathbf{C}P^{N_2}$ dans $\mathbf{C}P^{N_3}$, avec $N_3 = (N_1 + 1)(N_2 + 1) - 1$. Il est défini par la formule $P : ([x_i], [y_j]) \mapsto [x_i y_j]$. Supposons que l'on ait deux applications symplectiques $\pi_i : X \to \mathbf{C}P^{N_i}$. Il est immédiat de voir que l'application $P \circ (\pi_1, \pi_2)$ est encore symplectique. En utilisant les applications de la première étape, et en faisant des produits composés par des plongements de Plücker, on démontre qu'il existe une immersion lisse $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$ symplectique le long des feuilles.

Pour construire un *plongement*, remarquons que l'ensemble

$$F = \{(x, y) \in X \times X,\ \pi(x) = \pi(y) \ et\ x \neq y\}$$

est compact car π est une immersion. Le Théorème 2.5 nous dit que les applications holomorphes à valeurs dans $\mathbf{C}P^N$ immergeant holomorphiquement chaque feuilles séparent les points de X. Si un couple (x, y) appartient à F, il existe une application holomorphe immergeant holomorphiquement chaque feuille $\pi' : X \to \mathbf{C}P^{N'}$ telle que $\pi'(x) \neq \pi'(y)$. On a $\pi'(x') \neq \pi'(y')$ dans un voisinage de (x, y). En prenant un nombre fini $\pi'_1, \ldots, \pi'_s$, on construit alors une application $P \circ (\pi_1, \ldots, \pi_s)$ plongeant symplectiquement X dans un projectif complexe.

Soit $(X, \mathcal{L}, \omega)$ une lamination compacte symplectique, c'est à dire que les feuilles de $\mathcal{L}$ sont de dimension paire et que ω est une forme lisse qui est symplectique le long des feuilles. Supposons qu'il existe un fibré en cercles au dessus de $\mathcal{L}$ qui ait une connexion dont la courbure est $-i\omega$, et que X soit de dimension topologique finie. Alors nous conjecturons qu'il existe un plongement symplectique $\pi : X \to \mathbf{C}P^N$. Le Théorème 2.6 démontre cette conjecture dans le cas d'une lamination par surfaces. A. Ibort et D. Martînez Torres l'ont démontré dans le cas d'un feuilletage de codimension 1 [14].

9. Le cas de la dimension 1

Nous avons vu qu'une surface riemannienne à géométrie bornée est projective (Théorème 2.3). Cependant, il y a des exemples de laminations par surfaces de Riemann d'un espace compact qui ne le sont pas.

Dans cette partie, nous donnons deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact (qui n'a pas de cycle évanouissant) soit projective. Ces conditions portent sur la topologie du feuilletage, et ne tiennent pas compte de la structure conforme le long des feuilles.

9.1. **Diviseurs.** Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X.

Définition 9.1. Un *diviseur* est une partie fermée $\mathcal{D}$ de X, avec une fonction $m : \mathcal{D} \to \mathbf{N}^*$ telle que au voisinage $\mathcal{V}$ de tout point de $\mathcal{D}$ il existe une fonction holomorphe $f : \mathcal{V} \to \mathbf{C}$ ne s'annulant identiquement sur aucune feuille et ayant la propriété que $\mathcal{D} \cap \mathcal{V} = f^{-1}(0)$ et que la multiplicité d'annulation $m_t(f)$ de f en tout point t de $\mathcal{D}$ est égale à $m(t)$.

Exemple 9.2. L'intersection d'une lamination par surfaces de Riemann projective avec un hyperplan complexe est un diviseur, si la lamination n'a aucune feuille contenue dans l'hyperplan. Par conséquent, sur une lamination par surfaces de Riemann projective, il existe des diviseurs passant par tout point.

Un exemple de lamination par surfaces qui admet une feuille n'intersectant pas de diviseur est la *composante de Reeb*. C'est le quotient du feuilletage horizontal de $\mathbf{C} \times [0, \infty) - \{0\}$ par l'homothétie de rapport 2. Le lecteur pourra s'assurer qu'il n'y a pas de diviseur passant par la feuille compacte quotient de $\mathbf{C} \times \{0\} - \{0\}$.

Comme dans le cas d'une surface de Riemann compacte, à un diviseur $\mathcal{D}$ est associé un fibré en droites holomorphe $E_{\mathcal{D}} \to \mathcal{L}$. Nous rappelons cette construction ci-après.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de X par des boîtes sur lesquelles sont donnés des équations $f_i = 0$ définissant $\mathcal{D}$ et m, où les $f_i : U_i \to \mathbf{C}$ sont des fonctions holomorphes. Nous supposerons dans toute la suite que les fonctions f_i ne s'annulent pas sur le bord des plaques de U_i. Les quotients f_j/f_i définissent des fonctions holomorphes non nulles $g_{i,j}$ sur chaque plaque de l'intersection $U_i \cap U_j$. La formule de Cauchy

$$g_{i,j}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{g_{i,j}(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

montre que les $g_{i,j}$ sont en fait continues même aux points où f_i s'annule. Bien entendu, nous avons les relations de cocycle

$$g_{i,j} g_{j,k} = g_{i,k},$$

qui nous permettent de construire un fibré en droites holomorphe $E \to \mathcal{L}$: sur chaque U_i, il y a une section holomorphe $s_i : U_i \to E$ ne s'annulant pas et entre deux de ces sections il y a la relation

$$s_i = g_{i,j} s_j.$$

Remarquons que l'on a alors $f_i s_i = f_j s_j$, si bien qu'il y a une section globale s de E définie sur U_i par $f_i s_i$. Elle s'annule donc exactement sur $\mathcal{D}$ avec la multiplicité m le long des feuilles.

Proposition 9.3. *Soit $\mathcal{L}$ une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X et $\mathcal{D}$ un diviseur. Alors le fibré en droites $E_{\mathcal{D}}$ est muni d'une métrique hermitienne dont la courbure est positive et non nulle sur $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Nous devons construire la norme $|s|$ de la section s. En fait nous construisons plutôt la fonction $\varphi = \log |s|$. Ce doit être une fonction lisse en dehors de $\mathcal{D}$, et elle doit présenter des singularités logarithmiques le long de $\mathcal{D}$: dans chaque boîte U_i les fonctions

$$\varphi - \log |f_i|$$

sont lisses. Comme on veut que la courbure soit positive, il faut de plus que le laplacien de φ soit négatif, et strictement dans un voisinage de $\mathcal{D}$.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement fini de X par des boîtes $\mathbf{D} \times T_i$ où il y a des fonctions holomorphes $f_i : U_i \to \mathbf{C}$ dont le lieu des 0 est $\mathcal{D}$ et dont les multiplicités le long des feuilles est m. Nous supposerons que les f_i sont bornées et que $|f_i| \geq \alpha$ à l'extérieur de $\mathbf{D}_{1/2} \times T_i$, où α est une constante strictement positive.

Sur chaque boîte U_i, considérons les fonctions

$$\chi = \inf(C, -\log |f_i|),$$

où C est une constante réelle que l'on choisira assez grande. Ce sont des fonctions surharmoniques, et sont harmoniques sur l'ouvert $V_C = \{-\log |f_i| < C\}$. Lorsque C tend vers $+\infty$, la famille V_C est une base de voisinage de $\mathcal{D}$. Prenons un noyau régularisant K et définissons

$$\psi_i(x) = \int_{\mathbf{D}} K(x-y)\chi(y) dy d\overline{y}.$$

On demande que $K : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ soit une fonction lisse positive, strictement positive sur $\mathbf{D}_{1/3}$ et nulle à l'extérieur, et que son intégrale soit 1. Les fonctions ψ_i sont alors lisses, définie sur $\mathbf{D}_{2/3}$ et on a

$$\triangle \psi_i(x) = \int_{\mathbf{D}} K(x-y) \triangle \chi dy d\overline{y}(y),$$

où il faut voir $\mu = \triangle \chi dy d\overline{y}$ comme une mesure négative sur $\mathbf{D}$. Ainsi les ψ_i sont surharmoniques et on a

$$\triangle \psi_i < 0$$

aux points distants du support de μ de moins de $1/3$. Pour C assez grand, $\triangle\psi_i$ est donc strictement négative sur $\mathcal{D}$. Par ailleurs, si $K(x-y)$ ne dépend que de la distance entre x et y, nous avons

$$\psi_i = \chi = -\log|f_i|$$

aux points situés à une distance supérieure à $1/3$ de V_C, par harmonicité de χ en dehors de V_C. Remarquons que pour $C > -\log\alpha$, l'ouvert V_C est inclu dans $\mathbf{D}_{1/2}$. Dans ce cas les fonctions ψ_i se prolonge à tout U_i en des fonctions lisses valant $-\log|f_i|$ à l'extérieur de $D_{1/2+1/3}$.

Soit $\mathcal{D}_i$ l'intersection de $\mathcal{D}$ et de U_i. Considérons une partition de l'unité $\{\rho_i\}$ associée au recouvrement $\{\mathcal{D}_i\}$ de $\mathcal{D}$. Les fonctions

$$\varphi_i = \rho_i(\psi_i + \log|f_i|)$$

sont des fonctions lisses sur $X - \mathcal{D}$ surharmonique le long des feuilles et présentent un pôle

$$\rho_i \log|f_i|$$

le long de $\mathcal{D}$. On pose $\varphi = \sum_i \varphi_i$: dans une boîte U_j nous avons

$$\varphi = \log|f_j| + \sum_i \rho_i(\psi_i + \log|g_{i,j}|).$$

Ceci démontre que φ a le pôle $\log|f_i|$ le long de $\mathcal{D}$. De plus on a

$$\triangle\varphi = \sum_i \rho_i \triangle\psi_i,$$

ce qui prouve la surharmonicité de φ, stricte sur $\mathcal{D}$. La Proposition est démontrée.

Lemme 9.4. *Une lamination compacte par surfaces de Riemann sans cycle évanouissant possède un fibré en droites strictement positif partout si et seulement si il existe un diviseur coupant toutes les feuilles.*

Démonstration. Nous avons montré que si il y a un fibré en droites strictement positif au dessus d'une lamination par surfaces de Riemann compacte $(X, \mathcal{L})$ n'ayant pas de cycle évanouissant, alors il existe une application holomorphe $X \to \mathbf{C}P^1$ identiquement constante sur aucune feuille (voir Théorème 8.1). Les fibres de cette application sont des diviseurs. La réunion d'un nombre fini d'entre eux coupe toute les feuilles. Mais c'est encore un diviseur.

Réciproquement, supposons qu'il existe un diviseur $\mathcal{D}$ coupant toutes les feuilles. En le déplaçant le long du feuilletage, nous obtenons un diviseur passant par un point donné x. En vertu du Lemme précédent, il existe un fibré en droites holomorphe hermitien dont la courbure est positive partout et strictement positive en x. Elle est donc strictement positive sur un voisinage V_x de x. Un nombre fini de ces voisinage recouvrent X : le produit des fibrés en droites correspondant est un fibré en droites holomorphe hermitien dont la courbure est partout strictement positive. Le Lemme est démontré.

Le Théorème 2.7 résulte du Théorème 2.5 et du Lemme 9.4.

9.2. **Cycles feuilletés.** Un *cycle feuilleté* est l'analogue feuilleté de la classe fondamentale d'une variété compacte. C'est une notion dûe à S. Schwartzman [22] dans le cas des feuilletages de dimension réelle 1. Elle a été étendue par D. Ruelle et D. Sullivan [20] au cas des feuilletages de dimension supérieure, et par D. Sullivan [26] à d'autres situations dynamiques.

Définition 9.5. Soit $\mathcal{L}$ une lamination compacte lisse orientée de dimension n d'un espace compact X. Un *cycle feuilleté* est un opérateur $T : \Omega^n(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}$ strictement positif sur les formes strictement positives et nul sur les formes exactes.

Un cycle feuilleté possède une classe d'homologie définie de la manière suivante. Observons d'abord que si $\pi : X \to M$ est une application lisse à valeurs dans une variété M lisse et à bord, le courant $\pi_* T$ est un courant fermé de dimension n sur M et sa classe d'homologie $T(M,\pi) := [\pi_* T] \in H_n(M,\mathbf{R})$ est bien définie.

Proposition 9.6. *Pour tout cycle feuilleté T, il existe une unique classe d'homologie $[T]$ dans le n-ième groupe d'homologie de Cech telle que $T(M,\pi) = \pi_*[T]$ pour toute fonction lisse $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété lisse.*

Démonstration. Bien entendu, si $f : M \to N$ est une application lisse, nous avons la relation

$$f_* T(M,\pi) = T(N, f \circ \pi).$$

La classe d'homologie d'un cycle feuilleté est donc un élément de la *limite projective* $\hat{H}_n(\mathcal{L},\mathbf{R})$ des groupes $H_n(M,\mathbf{R})$ lorsque (M,π) décrit l'ensemble des applications lisses $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété fermée lisse M à bord. C'est le sous-ensemble de

$$\prod_{(M,\pi)} H_n(M,\mathbf{R})$$

formé des éléments $(x(M,\pi))_{(M,\pi)}$ tels que $f_* x(M,\pi) = x(N, f\circ\pi)$ pour toute application lisse $f : M \to N$. Il est facile de s'apercevoir que le groupe $\hat{H}_n(\mathcal{L},\mathbf{R})$ est naturellement isomorphe au n-ième groupe d'homologie de Cech $H_n^{Cech}(X,\mathbf{R})$ de X ; ceci utilise les propriétés de continuité de la cohomologie de Cech (voir [23]), et le fait que l'on peut approcher dans la topologie C^0 une application continue $\pi : X \to M$ par des applications lisses. La proposition est démontrée.

Définition 9.7. Une lamination d'un espace compact est dite *tendue* si aucun cycle feuilleté n'est homologue à 0.

Exemple 9.8 (Ghys). Une lamination par surfaces de Riemann projective est tendue. En effet, soit ω la forme de Fubini-Study sur $\mathbf{C}P^N$. C'est une forme fermée qui est strictement positive sur chaque droite complexe du fibré tangent de $\mathbf{C}P^N$. La forme $\pi^*\omega$ est alors strictement positive sur $\mathcal{L}$. Nous avons donc $T(\pi^*\omega) > 0$ pour tout cycle feuilleté T. Mais $T(\pi^*\omega) = \pi_* T(\omega)$, ce qui montre que $\pi_* T$ est non homologue à 0 puisque ω est fermée. Ainsi aucun cycle feuilleté T de $\mathcal{L}$ n'est homologue à 0.

Pour démontrer le Théorème 2.9, nous construisons un fibré en droites holomorphe positif sur toute lamination par surfaces de Riemann tendue d'un espace compact. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.5. Nous commençons par construire des fibrés en droites complexes hermitiens au dessus de variétés lisses, ayant une connexion compatible avec la métrique et dont la courbure est une 2-forme fermée entière donnée. Ceci est bien connu dans le cas des variétés, mais nous le rappelons pour pouvoir l'adapter au cas d'une lamination par surfaces.

9.2.1. *Fibrés en cercles.* Soit M une variété lisse, compacte et à bord. Un fibré en cercles lisse au dessus de M est une fibration lisse $\mathbf{S}^1 \to F \to M$ de groupe structural $\mathbf{S}^1$. Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement de M par des ouverts sur lesquels sont définies des sections locales

$$s_i : U_i \to F.$$

Nous pouvons redécouvrir la fibration $F \to M$ par le cocycle de fonctions $f_{i,j} : U_i \cap U_j \to \mathbf{S}^1$ défini par les relations

$$s_i = f_{i,j} s_j$$

sur l'intersection $U_i \cap U_j$.

Une connexion lisse sur F est une manière d'identifier des fibres infinitésimalement proches de F. C'est la donnée d'un opérateur ∇ qui à une section locale lisse s associe un objet de la forme

$$A.s,$$

où A est une 1-forme à valeurs imaginaires pures, et vérifiant des relations du type

$$\nabla(fs) = df.s + f\nabla s,$$

pour toute fonction lisse f et toute section lisse s. Posons

$$\nabla s_i = A_i s_i.$$

Nous avons

$$\nabla s_i = df_{i,j}s_j + f_{i,j}A_j s_j = (d\log f_{i,j} + A_j)s_i,$$

d'où la relation

$$A_i = d\log f_{i,j} + A_j.$$

La courbure de la connexion ∇ est une 2-forme fermée à valeurs imaginaires pures définie par la formule

$$\Omega = dA_i.$$

Lorsque Ω est la forme de courbure d'une connexion d'un fibré en cercles, on démontre facilement que la classe de cohomologie $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Omega]$ est entière, c'est à dire qu'on obtient un entier en intégrant $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega$ sur une surface compacte immergée dans M. Voici la réciproque de ce résultat.

Lemme 9.9. *Soit Ω une 2-forme lisse à valeurs imaginaires pures sur M telle que $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Omega]$ soient entière. Alors il existe un fibré en cercles lisse $\mathbf{S}^1 \to F \to M$ avec une connexion ∇ dont la courbure est la forme Ω.*

Démonstration. Il existe un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de M par des ouverts U_i où la forme Ω est exacte, c'est à dire que

$$\Omega = dA_i$$

pour une certaine 1-forme A_i à valeurs imaginaires pures définie sur U_i. Dans ce cas les 1-formes $A_i - A_j$ sont fermées sur l'intersection $U_i \cap U_j$, et quitte à réduire les U_i, on peut les supposer exactes. C'est donc qu'il existe des fonctions à valeurs imaginaires pures qui sur l'intersection $U_i \cap U_j$ vérifient

$$d\varphi_{i,j} = A_i - A_j.$$

Sur l'intersection $U_i \cap U_j \cap U_k$ de trois des ouverts du recouvrement, que nous pouvons supposer connexe, les fonctions

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} \tag{9.1}$$

sont constantes. On définit ainsi un cocyle de $H^2(M, \mathbf{R})$ qui représente la classe de cohomologie de Ω. Comme $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}[\Omega]$ est entière, c'est que, quitte à ajouter aux $\varphi_{i,j}$ des constantes, les valeurs des fonctions (9.1) sont des multiples entiers de $2\pi\sqrt{-1}$. Posons alors

$$f_{i,j} = e^{\varphi_{i,j}}.$$

Ce sont des fonctions à valeurs dans le cercle et nous avons la relation de cocycle

$$f_{i,j}f_{j,k}f_{k,i} = 1.$$

Ceci nous permet de construire un fibré en cercle $F \to M$ localement trivial sur les U_i avec des sections trivialisantes s_i vérifiant

$$s_i = f_{i,j} s_j.$$

Définissons alors une connexion ∇ par les formules

$$ds_i = A_i s_i.$$

Sa courbure est la forme Ω. Le Lemme est démontré.

9.2.2. *Fibré en droites holomorphes.* A partir d'un fibré en cercles lisse $\mathbf{S}^1 \to F \to M$, nous construisons naturellement un fibré en *droites complexes* lisse $\mathbf{C} \to E \to M$, avec une métrique hermitienne $|.|$ lisse dont les sphères unités décrivent les fibres du fibré en cercles de départ. Les sections de E s'écrivent localement

$$f_i s_i,$$

où $f_i : U_i \to \mathbf{C}$ est une fonction à valeurs complexes. Si le fibré en cercles F a une connexion ∇, elle s'étend naturellement à une connexion sur E par la formule

$$\nabla(fs) = df s + f \nabla s,$$

pour toute fonction lisse f et toute section lisse s de F. La métrique hermitienne $|.|$ est alors invariante par la connexion.

Supposons que $\mathcal{L}$ soit une lamination par surfaces de Riemann d'un espace compact X, et que l'on ait une application *lisse*

$$\pi : X \to M$$

immergeant chaque feuille de $\mathcal{L}$ dans M. Le fibré $E \to M$ se rappatrie en un fibré par droites complexes. Ce fibré est lisse et on le note encore E. Nous montrons au Lemme 9.10 qu'il y a une unique façon de le munir d'une structure de fibré en droites *holomorphe* compatible avec la connexion ∇.

Une section locale $s : U \subset X \to E$ est holomorphe pour une structure compatible avec la connexion ∇ si ∇s est une $(1,0)$-forme à valeurs dans E le long de $\mathcal{L}$. Supposons que s_1 et s_2 soient deux sections holomorphes, avec s_2 non nulle, et écrivons

$$s_1 = f s_2,$$

pour une fonction f à valeurs dans $\mathbf{C}$. Nous avons alors

$$\nabla s_1 = df s_2 + f \nabla s_2.$$

Comme les ∇s_i, pour $i = 1, 2$ sont des $(1,0)$-formes, df l'est aussi. C'est donc que f est holomorphe le long des feuilles. Ainsi, modulo l'existence locale de sections holomorphes, on définit sur $E \to \mathcal{L}$ une structure de fibré en droites holomorphe, et c'est de surcroit la seule qui soit compatible avec ∇.

Lemme 9.10. *En tout point de X il existe une section lisse holomorphe ne s'annulant pas.*

Démonstration. Prenons une section locale $s : U \subset X \to F$ de F, c'est à dire une section de E de norme 1. Nous cherchons une fonction $f : U \to \mathbf{C}^*$ telle que $\nabla(fs)$ soit une $(0,1)$-forme. Écrivons

$$\nabla s = As,$$

pour une 1-forme lisse A définie sur U. On demande donc que la forme

$$d \log f + A$$

soit de type $(1,0)$. Considérons la partie $(0,1)$ de la forme A, que l'on note A_a. Nous cherchons f en sorte que

$$\overline{\partial} \log f + A_a = 0. \tag{9.2}$$

Nous avons donc à inverser le $\overline{\partial}$ avec un paramètre. Ceci est bien connu : c'est le Lemme de $\overline{\partial}$ dû à Poincaré. Si l'on écrit dans une coordonnée holomorphe z la forme A_a :

$$A_a = g d\overline{z},$$

alors une solution au problème 9.2 est donné sous forme d'une intégrale par la formule de Poincaré :

$$\log f = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbf{D}} \frac{g(w)}{w-z} dw \wedge d\overline{w}.$$

Le lecteur pourra consulter par exemple : [12] page 5. Ceci achève la démonstration du Lemme.

9.2.3. *Théorie de Sullivan.* Nous adaptons la théorie de Sullivan [26] à une lamination compacte orientée plongée dans une variété lisse. Le résultat qui nous intéresse est le suivant.

Proposition 9.11. *Soit $(X, \mathcal{L})$ une lamination compacte, lisse, orientée, de dimension topologique finie. Si $\mathcal{L}$ est tendue, il existe un plongement lisse $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété lisse, et une n-forme lisse sur M, fermée telle que $\pi^*\omega$ est strictement positive.*

Considérons une lamination lisse compacte orientée de dimension topologique finie $(X, \mathcal{L})$ et un plongement lisse $\pi : X \to M$ à valeurs dans une variété M. La théorie de Sullivan consiste à étudier la configuration que forme dans l'espace des courants sur M :

- L'espace E des courants exacts.
- L'espace F des courants fermés ($E \subset F$).

- Le cône $\mathcal{C}$ des courants de dimension n sur M strictement positifs sur $\mathcal{L}$ (c'est à dire que ce sont des courants T sur M vérifiant la propriété suivante : si ω est une n-forme lisse sur M telle que $\pi^*\omega$ est strictement positive, alors $T(\omega)$ est stritement positif).

Nous adaptons cette théorie pour certains plongements $\pi : X \to M$:

Lemme 9.12. *Il existe un plongement lisse $\pi : X \to \mathbf{R}^N$ vérifiant la propriété suivante :*

($\mathcal{P}$) Pour tout point x de X, il existe une coordonnée lisse (z,t) centrée en x et une projection lisse $p : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ ($q = 2 \times$ dimension topologique transverse $+ 1$) telle que

$$p \circ \pi = (z, \tau(t)),$$

où τ est un plongement d'une transversale locale en x dans $\mathbf{R}^q$.

Démonstration. Dire que X est de dimension topologique finie, c'est exactement dire que X se plonge topologiquement dans un espace euclidien. Nous voulons rendre ce plongement lisse le long des feuilles. Donnons nous un point p et une carte locale $U = B \times T$ sur laquelle est définie une coordonnée lisse z centrée en $p = (0, t_0)$. Choisissons

- une fonction plateau $\rho : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ lisse, prenant des valeurs entre 0 et 1 et telle que $\rho^{-1}(1) = \{|z| \leq 1/2\}$ et $\rho^{-1}(1) = \{3/4 \leq |z|\}$.
- une fonction continue $\psi : T \to \mathbf{R}$ à valeurs comprises entre 0 et 1, telle que $\psi^{-1}(1)$ est un voisinage de t_0 et dont le support est un compact inclu dans T.
- un plongement $\tau : T \to \mathbf{R}^q$, où $q = 2\times$dimension topologique$(T)+ 1$.

Posons

$$\pi_p(z,t) = \rho(z)\psi(t)(z, \tau(t), 1) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q \times \mathbf{R}.$$

C'est une fonction lisse bien définie sur X, et sa restriction à $V = \{|z| \leq 1/2\} \times \psi^{-1}(1)$ est un plongement. Par compacité, on peut trouver un nombre fini de ces voisinages recouvrant X. Le produit des applications correspondantes π_p est alors un plongement lisse de X dans un espace euclidien, qui vérife la propriété ($\mathcal{P}$).

Lemme 9.13. *Soit $\mathcal{L}$ une lamination lisse orientée d'un espace compact X et $\pi : X \to \mathbf{R}^N$ un plongement lisse vérifiant la propriété ($\mathcal{P}$). Un courant fermé agissant sur les 2-formes lisses à support compact de $\mathbf{R}^N$ et qui est positif sur l'image de X est l'image par π d'un cycle feuilleté de $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Un élément de $\mathcal{C}$ est strictement positif le long de $\mathcal{L}$ et vérifie une inégalité du type

$$|T(\omega)| \leq D|\omega|_{\mathcal{L},\infty}, \tag{9.3}$$

pour toute n-forme lisse ω de $\mathbf{R}^N$, et pour une constante D ne dépendant pas de ω. Nous voulons définir T pour *toute forme lisse de* $\mathcal{L}$: nous démontrons pour cela le résultat d'approximation suivant.

Soit $\pi : X \to M$ un plongement lisse de X dans une variété lisse M, vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Soit ω une forme lisse sur $\mathcal{L}$. Alors il existe une suite de formes lisses ω_n sur M telles que $\pi^*\omega_n$ tend vers ω dans la topologiqe C^1.

Démonstration. Prenons un recouvrement fini de X par des boîtes $B_i \times T_i$ pour lesquelles il existe des coordonnées (z_i, t_i) et des projections lisses $p_i : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^q$ telles que

$$p_i \circ \pi = (z_i, t_i).$$

En utilisant une partition de l'unité (provenant de fonctions lisses sur M), nous pouvons supposer que le support de ω est dans l'une des boîtes $B_i \times T_i$. Pour simplifier les notations nous la noterons $B \times T$ et (z, t) les coordonnés lisses. Ecrivons alors

$$\omega = \sum \omega_I dz_I,$$

où les ω_I sont des fonctions lisses sur $\mathcal{L}$ (lisses en z dont les dérivées partielles par rapport aux variables z sont continues en z et t).

Soit K l'image de T par τ. Nous considérons une famille de mesures de probabilité définies sur K telles que, pour toute fonction continue $f : K \to \mathbf{R}$, la fonction $\tilde{f} : \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{f}(y) = \int_K f(t) d\nu_y(t)$$

soit un prolongement continu de f à $\mathbf{R}^q$. Une telle famille de mesures existe, car il suffit de prolonger continument à $\mathbf{R}^q$ l'application $y \in K \mapsto \delta_y \in Prob(K)$, en utilisant des approximations simpliciales (pour une démonstration plus constructive, on pourra consulter [25]). Ici $Prob(K)$ désigne l'espace des mesures de probabilités sur K et δ_y est la mesure de Dirac en y. Nous posons alors

$$\tilde{\omega}_I(z, y) = \int_K \omega_I(z, t) d\nu_y(t),$$

pour tout $(z, y) \in B \times \mathbf{R}^q$. Ce sont des prolongements des ω_I à $B \times \mathbf{R}^q$, lisses en z et dont les dérivées partielles par rapport à z sont continues. Il ne reste plus qu'à les lisser à l'aide d'un noyau régularisant $K_\epsilon(y, y')$ défini pour y, y' dans $\mathbf{R}^q$ et ϵ positif. Nous posons

$$\tilde{\omega}_I^\epsilon(z, y) = \int_{\mathbf{R}^q} K_\epsilon(y, y')\tilde{\omega}_I(z, y') d_e ucl(y').$$

Il est immédiat de voir que les $\tilde{\omega}_I^\epsilon$ sont des fonctions lisses, dont le support est défini dans un voisinage aussi petit que l'on veut de $B \times K$. Les formes

$$\tilde{\omega}^\epsilon = \sum \tilde{\omega}_I^\epsilon dz_I$$

vérifient alors

$$|\omega - (p \circ \pi)^* \tilde{\omega}^\epsilon|_{C^1} \to 0.$$

Nous sommes en mesure d'achever la démonstration du Lemme 9.13. Définissons un courant $\tilde{T}$ sur $\mathcal{L}$ en posant

$$\tilde{T}(\omega) = \lim_n T(\omega_n)$$

pour n'importe quelle suite de formes lisses ω_n sur M telles que $\pi^*\omega_n$ tende vers ω dans la topologie C^0. Ceci est bien défini à cause de l'inégalité 9.3 et du Lemme 9.11. Démontrons alors que $\tilde{T}$ est fermé. Pour cela, prenons une forme exacte $\omega = d\eta$ sur $\mathcal{L}$ et une suite η_n de formes lisses sur M telles que $\pi^*\eta_n$ tende vers η dans la topologie C^1 donnée par le Lemme 9.11. La suite ω est alors la limite uniforme des formes $\pi^* d\eta_n$. Nous avons donc

$$\tilde{T}(d\eta) = \lim_n T(d\eta_n) = 0.$$

Ceci achève la démonstration du Lemme.

Démonstration de la Proposition 9.11. Prenons un plongement lisse de X dans $\mathbf{R}^N$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Un cycle feuilleté de $\mathcal{L}$ étant non homologue à 0 dans $\mathcal{L}$, les propriétés de continuité de la cohomologie de Cech montrent qu'il existe un voisinage de l'image de X dans $\mathbf{R}^N$ dans lequel il est toujours non homologue à 0. Ceci reste vrai pour des cycles feuilletés proche dans la topologie faible. Or l'ensemble des cycles feuilletés normalisés pour la topologie faible est compact. Il existe donc un voisinage de l'image de X dans lequel aucun cycle feuilleté de $\mathcal{L}$ n'est homologue à 0. Quitte à restreindre convenablement ce voisinage on peut supposer que c'est une variété compacte à bord lisse. Notons la M, et $\pi : X \to M$ le plongement de X dans M.

La démonstration est alors identique à celle de Sullivan ([26], p. 231). Elle repose sur la dualité entre les formes lisses de M et les courants [21]. Remarquons que l'espace F des courants fermés est fermé dans l'espace des courants, puisque la différentiation est continue. De plus, l'espace E des courants exacts est fermé dans F, puisqu'il est donné par l'annulation des périodes ω_i, les ω_i formant une base (finie) de $H^i(M, \mathbf{R})$. D'après la Proposition 9.13, le cône $\mathcal{C}$ des courants fermés et strictement positifs sur l'image de $\mathcal{L}$ n'intersecte pas E. De plus il est à base compacte, c'est à dire qu'il existe un hyperplan affine qui l'intersecte suivant un ensemble compact. Le Théorème de Hahn-Banach montre donc qu'il existe une forme linéaire qui est strictement positive sur $\mathcal{C}$ et nulle sur E. Cette forme linéaire correspond naturellement à une forme lisse, qui est strictement positive sur l'image de $\mathcal{L}$ et fermée.

Démonstration du Théorème 2.9. Soit $\mathcal{L}$ une lamination tendue par surfaces de Riemann d'un espace X de dimension topologique finie. Nous savons qu'il existe un plongement lisse

$$\pi : X \to M$$

à valeurs dans une variété lisse compacte à bord, et une 2-forme ω lisse sur M strictement positive sur l'image de $\mathcal{L}$ (voir Proposition 3.12). La classe de cohomologie dans $H^2(M, \mathbf{R})$ est approximable par des classes de cohomologie rationnelles $[\omega_k] \in H^2(M, \mathbf{Q})$. On peut supposer que lorsque k tend vers l'infini,

$$|\omega - \omega_k|_\infty \to 0,$$

quitte à choisir ω_k dans sa classe en sorte que $\omega - \omega_k$ soit harmonique par rapport à une métrique riemannienne fixée sur M. Pour des entiers k suffisament grand les formes ω_k sont strictement positives sur $\mathcal{L}$. Un multiple entier d'une d'entre elle est alors une 2-forme fermée β, entière et strictement positive sur $\mathcal{L}$. La Proposition découle alors du Lemme 9.9.

9.3. **Critère pour l'existence d'une multi-transversale totale.** Soit $\mathcal{L}$ une lamination lisse d'un espace compact X. Une *multi-transversale totale* est une partie fermée $\mathcal{M} \subset X$ et une fonction $m : \mathcal{M} \to \mathbf{N}$ telle que au voisinage de tout point de $\mathcal{M}$ il existe une boîte $B \times T$, pour laquelle la fonction

$$t \mapsto \sum_{(x,t) \in \mathcal{M} \cap B \times \{t\}} n(x,t)$$

est constante. Si $\mathcal{L}$ est une lamination par surfaces de Riemann, le support d'un diviseur est une multi-transversale totale.

Puisque le support d'un diviseur est une multi-transversale totale, le Théorème 2.10 découle des Théorèmes 2.7 et 2.9. Nous ne savons pas si il est vrai en dimension supérieure à 3.

Références

[1] L. Ahlfors. Zur Theorie der Überlagerungflächen. *Acta Math.* **65** (1935), p. 157-194.

[2] L. Ahlfors & L. Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math.* **72** (1960), p. 385-404.

[3] S. Bergmann. The kernel function and conformal mapping. *American Mathematical Society, Providence, R.I.* (1970).

[4] M. Brunella. Subharmonic variation of the leafwise Poincar metric. *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, p. 119-148.

[5] A. Candel. Uniformization of surface laminations. *Ann. Sci. École Norm.Sup.* **26** (1993), p.489-516.

[6] J. P. Demailly. Complex Analytic and Differential Geometry. *http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html*.

[7] B. Deroin. Laminations par variétés complexes. Thèse de doctorat de l'École Normale Supérieure de Lyon (mars 2003).

[8] B. Deroin. Non rigidity of hyperbolic Riemann surfaces laminations. arXiv :math.DS/0409221. 11 pages.

[9] S. K. Donaldson. Symplectic submanifolds and almost-complex geometry. *J. Differential Geom.* **44** (1996), no. 4, p. 666-705.

[10] É. Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. *Dynamiques et géométrie complexe (Lyon, 1997)*, *Panor. Synthèses*, **8**, Soc. Math. France, Paris, 1999.

[11] S. E. Goodman. Closed leaves in foliations of codimension one. *Comment. Math. Helv.* **50** (1975), p. 383-388.

[12] P. Griffiths & J. Harris. Principles of Algebraic Geometry. *Wiley*, New York (1978).

[13] M. Gromov. Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps. I. *Math. Phys. Anal. Geom.* **2** (1999), p. 323-415.

[14] A. Ibort & D. Martînez Torres. Approximately holomorphic geometry and estimated transversality on 2-calibrated manifolds. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 9, p. 709-712.

[15] K. Kodaira. On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties). *Ann. of Math.* **60** (1954), p. 28-48.

[16] L. Meersseman & A. Verjovsky. A smooth foliation of the 5-sphere by complex surfaces. *Ann. of Math.* (2) **156** (2002), no. 3, p. 915-930.

[17] C. Moore & C. Schochet. Global analysis on foliated spaces. MSRI Publ., vol. 9, Springer-Verlag, New York, 1988.

[18] T. Ohsawa & N. Sibony. Kähler identity on Levi flat manifolds and application to the embedding. *Nagoya Math. J.* **158** (2000), p. 87-93.

[19] H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes. *Acta Math.* **1** (1882), p. 193-294.

[20] D. Ruelle & D. Sullivan. Currents, flows, and diffeomorphisms. *Topology* **14** (1975), p. 319-327.

[21] L. Schwartz. Théorie des distributions. Nouvelle édition. *Hermann, Paris* (1966).

[22] S. Schwartzman. Asymptotic cycles. *Ann. of Math.* **66** (1957), p. 270-284.

[23] E. Spanier. Algebraic topology. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[24] J. P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. *Ann. Inst. Fourier* **6** (1955-1956), p. 1-42.

[25] E. Stein. Singular Integral and Differential Properties of Functions. *Princeton University Press.* (1973).

[26] D. Sullivan. Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. *Invent. Math.* **36** (1976), p. 225-255.

[27] D. Sullivan. Linking the universalities of Milnor-Thurston, Feigenbaum and Ahlfors-Bers. *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, p. 543-564, Publish or Perish, Houston, TX, (1993).

[28] G. Tian. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. *J. Differential Geom.* **32** (1990), p. 99-130.

[29] A. Verjovsky. A uniformization theorem for holomorphic foliations. The Lefschetz centennial conference, Contemp. Math., vol. 58, 1987, p. 233-253.

Max Planck Institut - Leipzig
E-mail address:
Bertrand.Deroin@mis.mpg.de