

Max-Planck-Institut  
für Mathematik  
in den Naturwissenschaften  
Leipzig

Dynamische Systeme  
Ein Überblick

by

*Jürgen Jost*

Lecture notes no.: 8

2000





Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences - Leipzig  
Lecture Notes

Dynamische Systeme  
Ein Überblick

Jürgen Jost

17. Mai 2000

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Wesentliche Fragestellungen . . . . .	2
1.2	Quantitative und qualitative Eigenschaften . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Stabilität von dynamischen Systemen, Bifurkationen und generischen Eigenschaften</b>	<b>4</b>
2.1	Einige allgemeine Begriffe . . . . .	4
2.2	Autonome Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	5
2.3	Beispiele: Bifurkation in Abhängigkeit von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ . . . . .	8
2.4	Diskrete und kontinuierliche Systeme. Die Poincarésche Wiederkehrabbildung . . . . .	14
2.5	Stabilitätsfragen . . . . .	15
2.6	Bifurkationen . . . . .	16
2.7	Die Hopfbifurkation . . . . .	17
2.8	Generische Eigenschaften . . . . .	18
2.9	Lotka-Volterra-Gleichungen . . . . .	18
2.10	Stabile, unstable und Zentrumsmannigfaltigkeiten . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Diskrete Invarianten dynamischer Systeme</b>	<b>28</b>
3.1	Die Topologie von Graphen . . . . .	28
3.2	Floerhomologie . . . . .	29
3.3	Conleytheorie: Beispiele und allgemeine Resultate . . . . .	35
3.4	Einige topologische Begriffe . . . . .	41
3.5	Der Conleyindex . . . . .	42
3.6	Kohomologischer Conleyindex . . . . .	48
3.7	Fortsetzungseigenschaft des Conleyindex . . . . .	50
3.8	Der diskrete Conleyindex . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Entropie, Information und Komplexität</b>	<b>56</b>
4.1	W-Räume (Wahrscheinlichkeitsräume) . . . . .	56
4.2	Ergodizität . . . . .	56
4.3	Isomorphie und Konjugation . . . . .	60
4.4	Entropie und Information . . . . .	61
4.5	Topologische Entropie . . . . .	66
4.6	Komplexität und intrinsische Skalen . . . . .	71

# 1 Einleitung

## 1.1 Wesentliche Fragestellungen

Ein **dynamisches System** ist ein System, dessen Zustand sich in der **Zeit** ändert, das aber seine Identität bei all diesen Zustandsänderungen bewahrt. Ein dynamisches System durchläuft einen Pfad im **Zustandsraum**, welcher alle Pfade enthält, die das System prinzipiell durchlaufen kann, während es seinen Zustand entsprechend der **dynamischen Vorschrift** ändert. **Exogene Parameter**, d.h. diejenigen Parameter, die nicht intrinsisch durch den dynamischen Prozeß bestimmt werden, schließen die **Anfangsbedingungen** ein sowie möglicherweise auch Parameter, von denen die dynamische Vorschrift abhängt. Der Pfad, den das dynamische System im Zustandsraum durchläuft, hängt also von diesen Parametern ab, und Pfade können oft anhand dieser Parameter klassifiziert werden. Das **Zustandsraumporträt** stellt diese Pfade für alle zulässigen derartigen Parameter dar. Die Zeit des dynamischen Prozesses kann hierbei stetig oder diskret sein; im ersteren Fall wird verlangt, daß die dynamische Regel zu stetigen Zustandsänderungen führt (was auch schon im Konzept des Pfades zum Ausdruck gebracht wird); im letzteren Fall müssen zulässige Zustandsänderungen ebenfalls bestimmten Bedingungen genügen.

In dieser allgemeinen Situation lassen sich schon einige grundlegende Fragen formulieren:

### 1. Das Isomorphieproblem:

Was sind die geeigneten Kriterien, um zwei dynamische Systeme miteinander zu vergleichen und sie als isomorph anzusehen, wenn sie bei diesen Kriterien die gleichen Werte aufweisen?

Wir werden an qualitativen Eigenschaften anstelle von quantitativen interessiert sein, und wir wollen diese qualitativen Aspekte durch kontinuierliche oder diskrete Invarianten beschreiben. Isomorphe Systeme müssen daher die gleichen Werte für alle diese Invarianten aufweisen. Eine der wichtigsten Invarianten für dynamische Systeme ist die Entropie.

### 2. Das Identitätsproblem:

Dies bezieht sich auf die zeitliche Entwicklung eines gegebenen Systems anstatt auf den Vergleich zweier verschiedener Systeme. Wie läßt sich ein System  $S(t_1)$ , zur Zeit  $t_1$  beobachtet, mit dem gleichen System  $S(t_2)$ , zur Zeit  $t_2$  beobachtet, identifizieren? Das Problem besteht darin, daß  $S(t_2)$  qualitativ von  $S(t_1)$  verschieden sein kann, da während der Entwicklung von  $t_1$  nach  $t_2$  strukturelle Änderungen stattgefunden haben können. Die Frage besteht dann darin herauszufinden, welche Arten von strukturellen Änderungen während der Entwicklung eines Systems möglich sind und welche ausgeschlossen werden können, beispielsweise durch Betrachtung geeigneter Invarianten, die während der Entwicklung konstant bleiben müssen (Erhaltungsgrößen).

Eng mit den beiden vorstehenden verbunden ist ein drittes Problem, nämlich

### 3. Das Stabilitätsproblem:

Wann ist das qualitative Verhalten eines dynamischen Systems unempfindlich gegenüber kleinen Störungen?

Für das Isomorphieproblem bedeutet dies, daß ein System, welches aus einem gegebenen durch eine kleine Störung eines Parameters hervorgeht, zu diesem isomorph bleibt. Hinsichtlich des Identitätsproblems beinhaltet dies, daß ein System während einer gegebenen Zeitphase keine strukturelle Änderungen erleidet, sondern qualitativ invariant bleibt.

Das dies jedoch häufig nicht zutrifft, muß man auch die möglichen strukturellen Veränderungen untersuchen, die sich bei der Variation eines Parameters oder während der zeitlichen Entwicklung ergeben können. Auf einer neuen Stufe läßt sich dann fragen, welche Typen struktureller Veränderungen stabil gegenüber kleinen Störungen oder generisch in dem Sinne sind, daß sie in typischen Situationen auftreten. (Die vorstehende Diskussion enthält einige Begriffe, die noch einer präzisen mathematischen Definition bedürfen.)

Ein weiteres Problem betrifft

4. Das statistische Verhalten dynamischer Systeme: Was sind die dynamischen Eigenschaften eines Systems bei durchschnittlichen Anfangsbedingungen oder Parameterwerten?

Wieviel allgemeingültige Information läßt sich aus der Beobachtung einer einzigen Entwicklung des Systems für eine feste Wahl von Anfangsbedingungen oder Parametern gewinnen?

Die dynamischen Vorschriften können neben deterministischen auch stochastische Komponenten enthalten, und der Einfluß letzterer sollte ebenfalls untersucht werden.

Die Ergodentheorie beschäftigt sich mit einem besonders wichtigen Aspekt des statistischen Verhaltens dynamischer Systeme, nämlich der folgenden Frage:

$(X, \mu)$  sei ein Maßraum, und  $T : X \rightarrow X$  sei maßtreu und bijektiv (möglicherweise bis auf Mengen vom Maß 0). Das Ergodenproblem besteht darin, Bedingungen anzugeben, unter welchen das zeitliche Mittel einer meßbaren Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(T^\nu x)$$

existiert ( $T^\nu := T \circ \dots \circ T$   $\nu$  Mal) und mit dem räumlichen Mittel

$$\int_X f(y) \mu(dy)$$

übereinstimmt, zumindest für  $\mu$ -fast alle  $x$ .

Schließlich interessiert uns

5. Das asymptotische Verhalten: Man fragt hier danach, was mit dem dynamischen System passiert, wenn die Zeit gegen Unendlich strebt.

Oftmals ergeben sich charakteristische Muster, wie anziehende Fixpunkte, periodische Bahnen, seltsame Attraktoren etc., sowie instabile Gleichgewichtsmuster, die die verschiedenen Attraktoren trennen. Auf diese Weise werden die Anfangsbedingungen durch die dynamische Entwicklungsvorschrift in eine Anzahl unterschiedlicher qualitativer Muster überführt. In diesem Sinne können dynamische Systeme als Inputklassifikatoren angesehen werden. Das mathematische Problem besteht dann darin, diejenigen Muster zu klassifizieren, die für eine vorgegebene dynamische Vorschrift entstehen können, und die strukturellen Beziehungen und Übergänge zwischen ihnen anzugeben.

## 1.2 Quantitative und qualitative Eigenschaften

Eine wichtige Klasse von zeitkontinuierlichen dynamischen Systemen wird durch Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben. Diese Klasse weist einen großen Reichtum an interessanten qualitativen Phänomenen auf und wird uns i.F. reichhaltiges Beispielmateriale liefern. Ein möglicher Ansatz zur Behandlung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen besteht natürlich darin, zu versuchen, es explizit zu lösen. Ob dies möglich ist, hängt typischerweise

von der Existenz (expliziter oder versteckter) Symmetrien ab, mit deren Hilfe sich sogenannte Erhaltungsgrößen konstruieren lassen, also Größen, die während der zeitlichen Entwicklung des Systems konstant bleiben. Systeme mit der maximal möglichen Anzahl unabhängiger Erhaltungsgrößen heißen vollständig integrabel. Sie werden insbesondere durch die Theorie von Hamilton und Jacobi erfaßt.

Die Invarianz dieser Erhaltungsgrößen führt zu wesentlichen Einschränkungen an das mögliche dynamische Verhalten, oder, andersherum ausgedrückt, ein (in einem zu präzisierenden Sinne) typisches dynamisches System läßt sich nicht explizit lösen. Poincaré hat als erster begonnen, stattdessen qualitative Eigenschaften der zeitlichen Entwicklung und des asymptotischen Verhaltens allgemeiner Klassen dynamischer Systeme zu untersuchen.

## 2 Stabilität von dynamischen Systemen, Bifurkationen und generischen Eigenschaften

In diesem Kapitel werden wir das grundlegende Thema der qualitativen Erhaltung und der qualitativen Veränderung insbesondere an Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen erläutern.

### 2.1 Einige allgemeine Begriffe

Ein Fluß (Semifluß) ist eine Familie

$$F_t : X \rightarrow X$$

von Abbildungen einer Menge  $X$  (Zustands- oder Phasenraum) in sich selbst, für  $t \in \mathbb{R}$  ( $t \geq 0$ ), mit

(i)  $F_0 = Id$

(ii)  $F_{t+s} = F_t \circ F_s$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  ( $t, s \geq 0$ ) ((Halb-) Gruppeneigenschaft).

$t$  wird hierbei als Zeitparameter angesehen. Für einen gegebenen Anfangszustand  $x_0$  untersuchen wir den Prozeß

$$x(t) := F_t x_0,$$

der den Anfangszustand in den Zustand zur Zeit  $t$  überführt.

Die Abbildung

$$t \mapsto x(t)$$

heißt Trajektorie, und  $\{x(t) : t \in \mathbb{R}(t \geq 0)\}$  heißt Bahn oder Orbit von  $x_0$ .  $x_0$  heißt stationär, falls

$$x(t) = x_0 \text{ für alle } t.$$

Allgemeiner heißt eine Trajektorie oder Bahn periodisch, falls

$$x(t + \omega) = x(t) \text{ für ein } \omega \geq 0 \text{ und alle } t.$$

(ii) impliziert

$$x(t + s) = F_t x(s),$$

d.h.  $y(t) := x(t + s)$  ist der Zustand zur Zeit  $t$  des Prozesses mit Anfangszustand  $y(0) = x(s)$ .

Im diskreten Fall betrachten wir stattdessen die Iterierten einer gegebenen Abbildung

$$F : X \rightarrow X, \\ x_{n+1} = F(x_n) \text{ für } n \in \mathbb{Z} (n \in \mathbb{N}).$$

Ein wichtiges Beispiel eines diskreten dynamischen Systems entsteht, wenn man die Zeit-1-Abbildung

$$F = F_1$$

eines (Semi)-Flusses wie oben betrachtet. In diesem Falle sind

$$x(n) = F_n x_0$$

die Werte des Flusses zu ganzzahligen Zeitpunkten.

## 2.2 Autonome Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$f = (f^1, \dots, f^d) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei eine Abbildung der Klasse  $C^1$ . Wir betrachten das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{x}^i(t) = f^i(x^1(t), \dots, x^d(t)) \text{ für } i = 1, \dots, d,$$

mit  $\dot{x}^i = \frac{d}{dt}x^i$ .

Ein solches System heißt autonom, weil  $f$  nicht explizit von  $t$  abhängt (allerdings implizit, da  $x$  von  $t$  abhängt).

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf wird hierdurch ein lokaler Fluß in dem Sinne definiert, daß für jeden Anfangszustand  $x_0$  die Lösung  $x(t)$  dieses Systems auf einem Zeitintervall

$$-T < t < T, \text{ für ein } T > 0,$$

existiert.

Falls  $f^i(x_0) = 0$  für  $i = 1, \dots, d$ , so ist  $x_0$  ein stationärer Punkt unseres lokalen dynamischen Systems. Um das lokale Verhalten in der Umgebung eines derartigen stationären Punktes zu untersuchen, linearisieren wir das Problem bei  $x_0$  und studieren zunächst das lokale Verhalten des linearisierten Problems und versuchen dann, herauszufinden, ob sich das letztere Verhalten auf das ursprüngliche Problem überträgt.

Wir können o.E.

$$x_0 = 0$$

annehmen. Wir untersuchen daher das linearisierte Problem

$$\dot{x}(t) = Ax, \\ \text{mit } A = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) \right)_{i,j=1,\dots,d}, x = (x^1, \dots, x^d).$$

Wir betrachten den Fall  $d = 2$ .

Wir untersuchen zuerst den Fall, wo  $A$  zwei reelle Eigenwerte  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  besitzt und daher diagonalisiert werden kann. Nach einem linearen Koordinatenwechsel wird unser System zu

$$\dot{x}^1(t) = \alpha_1 x^1(t) \\ \dot{x}^2(t) = \alpha_2 x^2(t),$$



also

$$\begin{aligned}x^1(t) &= e^{\alpha_1 t} x^1(0) \\x^2(t) &= e^{\alpha_2 t} x^2(0).\end{aligned}$$

Falls  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beide negativ sind, so konvergiert  $x(t)$  mit exponentieller Geschwindigkeit gegen 0, während im Falle, wo  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  beide positiv sind,  $x(t)$  exponentiell wächst. In beiden Fällen bewegt sich  $x(t)$  längs der Kurven

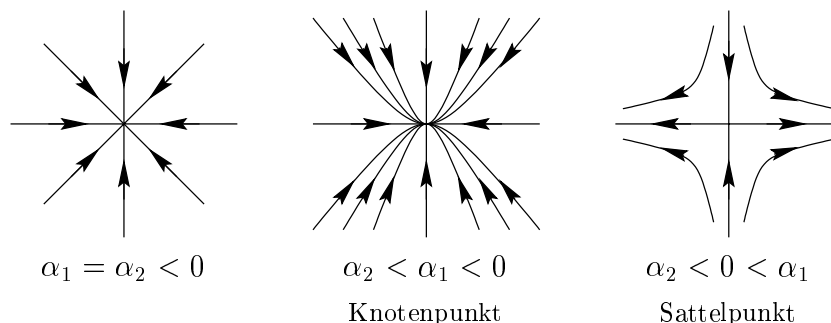
$$(x^1)^{\alpha_2} = \text{konst.} (x^2)^{\alpha_1},$$

weil

$$\frac{(x^1(t))^{\alpha_2}}{(x^2(t))^{\alpha_1}}$$

konstant bleibt.

Im ersten Fall ist  $x = 0$  ein stabiler Fixpunkt für  $t \rightarrow \infty$ , während er im zweiten Fall für  $t \rightarrow \infty$  instabil ist. Die beiden Fälle vertauschen die Rollen unter Zeitumkehr  $t \rightarrow -t$ .



Falls  $\alpha_2 < 0 < \alpha_1$ , so ist der Fixpunkt 0 weder stabil noch instabil, weil jeder Anfangspunkt auf der  $x^2$ -Achse gegen 0 konvergiert, während alle anderen Anfangspunkte unter dem Fluß divergieren.

Schließlich betrachten wir den Fall, wo  $A$  zwei komplex konjugierte Eigenwerte  $\alpha \pm i\vartheta$  besitzt. Nach einem linearen Koordinatenwechsel erhalten wir das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & \vartheta \\ -\vartheta & \alpha \end{pmatrix} x(t),$$

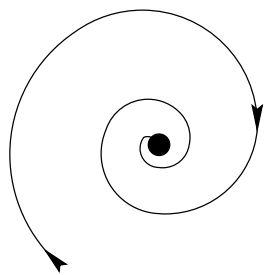
also

$$x(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \vartheta t & \sin \vartheta t \\ -\sin \vartheta t & \cos \vartheta t \end{pmatrix} x(0).$$

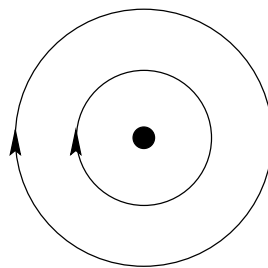
Falls  $\alpha < 0$ , so bewegt sich  $x(t)$  auf einer Spirale nach 0, während es im Falle  $\alpha > 0$  auf einer solchen Spirale expandiert, wohingegen es sich für  $\alpha = 0$  auf einem Kreis um 0 bewegt.

Der letzte Fall, also  $\alpha = 0$ , ist grundsätzlich anders als die anderen Fälle, weil er nicht strukturell stabil in dem Sinne ist, daß eine beliebig kleine Störung von  $\alpha = 0$  das qualitative Verhalten verändert. Noch schlimmer ist, daß, während in den anderen Fällen das qualitative Verhalten des ursprünglichen Systems in der Nähe des Fixpunktes 0 mit demjenigen des linearisierten Systems übereinstimmt, dies im Falle  $\alpha = 0$  nicht mehr gilt.

**Definition.** Der Fixpunkt 0 heißt hyperbolisch, falls kein Eigenwert des linearisierten Systems verschwindenden Realteil hat.



$$\alpha < 0, \vartheta \neq 0$$



$$\alpha = 0, \vartheta \neq 0$$

Das dynamische Verhalten in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes ist also strukturell stabil. Diese Aussage werden wir nachfolgend genauer belegen.

Im zeitdiskreten Fall kann man die Zeit-1-Abbildungen der obigen Beispiele betrachten. Man erhält also lineare Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} x^1 &\mapsto e^{\alpha_1} x^1 \\ x^2 &\mapsto e^{\alpha_2} x^2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \mapsto e^{\alpha} \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix},$$

wobei  $x = 0$  wieder ein Fixpunkt ist.

Analog zur Definition im zeitkontinuierlichen Fall formulieren wir

**Definition.** Eine lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt hyperbolisch, wenn sie maximalen Rang hat und wenn keiner der Eigenwerte von  $A$  den Absolutbetrag 1 hat.

Es sei  $f : M \rightarrow M$  eine Abbildung.  $p \in M$  heißt periodischer Punkt von  $f$  der Periode  $n$ , falls  $f^n(p) = p$ . Ein periodischer Punkt von  $f$  der Periode  $n$  ist also ein Fixpunkt von  $f^n$ .

## 2.3 Beispiele: Bifurkation in Abhängigkeit von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### A. Zeitkontinuierliche Systeme

I.f. ist immer  $x = x(t), y = y(t), \dot{x} = \frac{d}{dt}x(t)$  etc., für  $t \in \mathbb{R}$ ; wir schreiben  $(x, y)$  anstelle von  $(x^1, x^2)$

1.  $\dot{x} = -x^2 + \lambda$

$\lambda < 0$  

$\lambda = 0$  


$x = 0$  ist Fixpunkt, weder anziehend noch abstoßend

$\lambda > 0$  


$x = \pm\sqrt{\lambda}$  Fixpunkte,  
 $x = \sqrt{\lambda}$  anziehend,  
 $x = -\sqrt{\lambda}$  abstoßend

Ein Fixpunkt entsteht bei  $\lambda = 0$  und spaltet sich für  $\lambda > 0$  in einen anziehenden und einen abstoßenden Fixpunkt auf.

2.  $\dot{x} = -x^3 + \lambda x (= x(-x^2 + \lambda))$

$\lambda < 0$  

$x = 0$  ist Fixpunkt, anziehend

$\lambda = 0$  

$x = 0$  ist Fixpunkt, anziehend

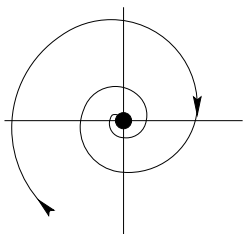
$\lambda > 0$  

$x = \pm\sqrt{\lambda}$  sind anziehende Fixpunkte  
 $x = 0$  ist abstoßender Fixpunkt

Der anziehende Fixpunkt spaltet sich auf in zwei anziehende und einen abstoßenden Fixpunkt.

3.  $\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - \lambda)$

$\dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - \lambda)$   $(0, 0)$  ist Fixpunkt für alle  $\lambda$



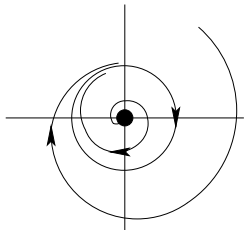
$\lambda < 0$  :  $(0, 0)$  ist global exponentiell anziehender Fixpunkt, denn dann ist

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) = 2(-x^2 - y^2 + \lambda) \leq 2\lambda < 0$$

also  $\log(x^2 + y^2) \leq 2\lambda t + \log(x(0)^2 + y(0)^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \leq e^{2\lambda t}(x(0)^2 + y(0)^2)$

$\lambda = 0$ :  $(0, 0)$  ist weiterhin global anziehender Fixpunkt, da für  $(x, y) \neq (0, 0)$   $\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) < 0$ , allerdings nicht mehr exponentiell anziehend.

$\lambda > 0$ :  $(0, 0)$  ist abstoßender Fixpunkt, und eine periodische Bahn entsteht für  $x^2 + y^2 = \lambda$ . Diese ist anziehend, denn für  $x^2 + y^2 < \lambda$  ist nach (1)  $\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) > 0$ , für  $x^2 + y^2 > \lambda$  dagegen  $\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) < 0$ .



Das bei  $(x, y) = (0, 0)$  linearisierte System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \lambda x \\ \dot{y} &= -x + \lambda y\end{aligned}$$

hat Eigenwerte  $\lambda \pm i$ , welche also für  $\lambda = 0$  verschwindenden Realteil haben. Für  $\lambda < 0$  hat das ursprüngliche System qualitativ das gleiche Verhalten wie das linearisierte, für  $\lambda > 0$  gilt dies wenigstens noch in einer (von  $\lambda$  abhängigen) Umgebung von  $(0, 0)$ , während für  $\lambda = 0$  das Verhalten der beiden Systeme verschieden ist.

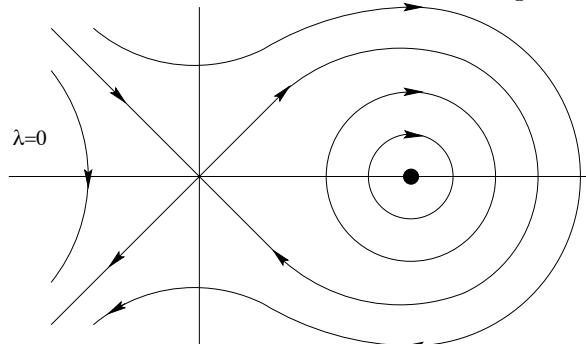
Dieses Beispiel ist ein Beispiel einer Hopfbifurkation, bei welcher beim Übergang von einem anziehenden zu einem abstoßenden Fokus eine periodische Bahn entsteht. Während die Situation bei  $\lambda = 0$  nicht strukturell stabil ist, ist die Hopfbifurkation als solche strukturell stabil, in einem noch zu präzisierenden Sinne.

4.  $\dot{x} = y$   
 $\dot{y} = x - x^2 + \lambda y$

$(0, 0)$  und  $(1, 0)$  sind immer Fixpunkte.

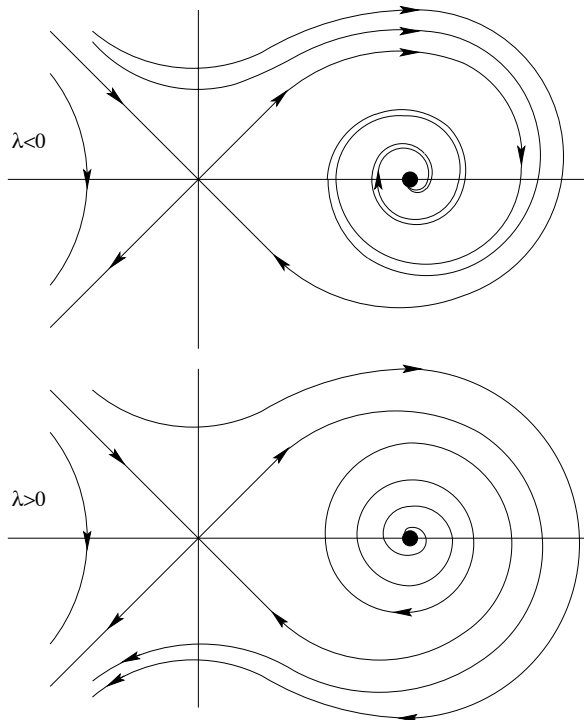
$(0, 0)$  ist Sattelpunkt, da für  $\lambda = 0$  Flußlinien im 1. und 3. Quadranten in der Nähe von  $(0, 0)$  von diesem Punkt weglaufen, im 2. und 4. Quadranten dagegen angezogen werden, und für kleines  $|\lambda|$  diese Situation qualitativ erhalten bleibt.

Für  $\lambda = 0$  bleibt  $\dot{y}$  bei Spiegelung an der  $y$ -Achse invariant, während  $\dot{x}$  das Vorzeichen wechselt. Hieraus bekommt man das folgende Diagramm für  $\lambda = 0$ .



Insbesondere gibt es für den Sattelpunkt  $(0, 0)$  eine homokline Bahn, als eine, die von  $(0, 0)$  ausgehend wieder dorthin zurückläuft.

Für  $\lambda < 0$  zeigt das zugehörige Vektorfeld stärker zur  $x$ -Achse hin, für  $\lambda > 0$  dagegen stärker von der  $x$ -Achse weg als für  $\lambda = 0$ . Daher werden beispielsweise für  $\lambda < 0$  die Bahnen stärker zur  $x$ -Achse hingezogen, schneiden diese also jeweils früher als für  $\lambda = 0$ , während für  $\lambda > 0$  der umgekehrte Effekt auftritt. Man erhält die folgenden Diagramme



anziehender Fixpunkt bei  $(1, 0)$

abstoßender Fixpunkt  $(1, 0)$  (die Situation für  $\lambda > 0$  ergibt sich durch die Inversion

$$x \mapsto x, y \mapsto -y, t \mapsto -t$$

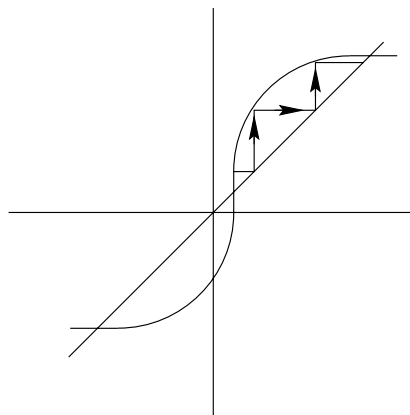
aus derjenigen für  $\lambda < 0$ )

Insbesondere ist die homokline Bahn für  $\lambda \neq 0$  nicht mehr vorhanden. (Eine Bahn, die von einem Fixpunkt ausgehend, wieder zu diesem zurückkehrt, heißt homoklin, eine Bahn zwischen zwei verschiedenen Fixpunkten heteroklin.)

## B. Zeitdiskrete Systeme

Dynamisches Bild:

Man projiziert abwechselnd senkrecht auf den Graphen von  $f$  und waagrecht auf die Diagonale



Fixpunkte entsprechen den Schnittpunkten des Graphen von  $f$  mit der Diagonalen. Sie sind anziehend (abstoßend), wenn der Graph im Schnittpunkt einen Steigungsbetrag kleiner (größer) als 1 hat.

Wir untersuchen nun die Iteration einer Abbildung

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

die von einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  abhängt.

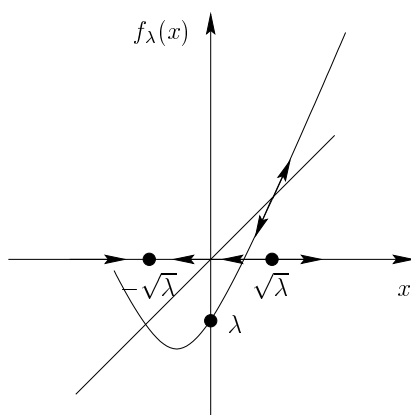
1.  $f_\lambda(x) = x + x^2 + \lambda$   
 $\lambda < 0$ : Fixpunkte bei

$$x = \pm\sqrt{-\lambda}$$

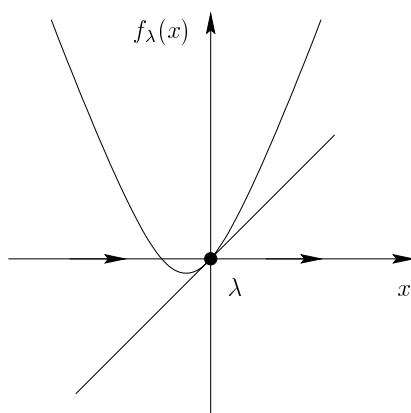
$$x = \sqrt{-\lambda} \text{ abstoßend}$$

$$x = -\sqrt{-\lambda} \text{ anziehend}$$

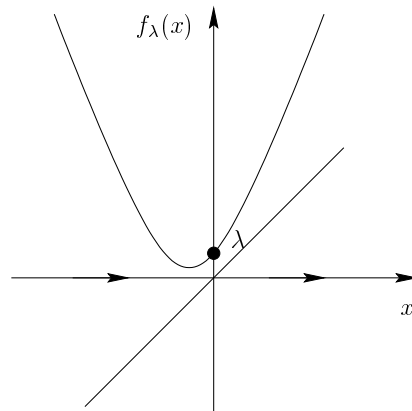
für  $\lambda > -1$   
abstoßend für  $\lambda < -1$



$\lambda = 0$ : Fixpunkt bei  $x = 0$ , weder anziehend noch abstoßend



$\lambda > 0$  : kein Fixpunkt



2.  $f_\lambda(x) = x + x^3 + \lambda x$

$\lambda < 0$  anziehender Fixpunkt bei  $x = 0$ , abstoßende Fixpunkte bei  $\pm\sqrt{\lambda}$

$\lambda = 0$  Fixpunkt bei  $x = 0$

$\lambda > 0$  abstoßender Fixpunkt bei  $x = 0$

3.  $f_\lambda(x) = x^2 - \lambda x$  bei  $\lambda = 1$

0 ist immer isolierter Fixpunkt für  $f_\lambda$ , anziehend für  $\lambda \leq 1$ , abstoßend für  $\lambda > 1$ . Ein weiterer Fixpunkt liegt bei  $x = 1 + \lambda$ , also  $x = 2$  für  $\lambda = 1$ . Insbesondere ist 0 lokal der einzige Fixpunkt von  $f_\lambda$ . Wir betrachten nun  $f_\lambda^2$ :

$$f_\lambda^2(x) = x(1 + (\lambda - 1)(\lambda + 1 + \lambda x - 2x^2) + x^2(x - 2))$$

$f_\lambda^2$  hat nun außer 0 noch weitere Fixpunkte, nämlich die Lösungen von

$$(2) \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1 + \lambda x - 2x^2) + x^2(x - 2) = 0$$

Der von  $\lambda$  unabhängige Anteil,  $x^2(x - 2)$  hat neben einer einfachen Nullstelle bei  $x = 2$  eine doppelte Nullstelle bei  $x = 0$ . Für  $x$  in der Nähe von 0 ist der von  $\lambda$  abhängige Term (welchen wir für  $\lambda$  in der Nähe von 1 als Störterm auffassen) durch  $\lambda^2 - 1$  dominiert. Daher hat (2) für  $\lambda < 1$  keine weitere, für  $\lambda > 1$  aber zwei verschiedene Lösungen in der Nähe von 0. Für  $\lambda \leq 1$  hat  $f_\lambda^2$  einen anziehenden Fixpunkt bei  $x = 0$ , während für  $\lambda > 1$  bei  $x = 0$  ein abstoßender Fixpunkt vorliegt, und es zum Ausgleich noch zwei anziehende Fixpunkte in der Nähe gibt. Diese letzten sind aber keine Fixpunkte für  $f_\lambda$ , also Punkte der Periode 2 für  $f_\lambda$ . Hier liegt also eine Bifurkation mit Periodenverdoppelung vor.

## 2.4 Diskrete und kontinuierliche Systeme. Die Poincarésche Wiederkehrabbildung

Wir haben schon gesehen, daß man trivialerweise aus einem zeitkontinuierlichen dynamischen System durch Betrachtung der Zeit-1-Abbildung ein zeitdiskretes System gewinnen kann. Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit für einen derartigen Übergang, nämlich die Poincarésche Wiederkehrabbildung bei einer periodischen Bahn  $\Gamma$  eines differenzierbaren Flusses  $(x, t) \mapsto f^t(x)$  auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$ .

Wir betrachten eine zu der Bahn  $\Gamma$  transversale Hyperfläche in  $M$  durch einen Punkt  $y_0 \in \Gamma$ .  $y_0$  habe die Periode  $T$ , d.h.

$$y_0 = f^T(y_0).$$

Es läßt sich dann zeigen, daß für jedes  $x \in S$ , welches genügend nahe an  $y_0$  ist, ein  $T(x)$  nahe  $T$  mit der Eigenschaft existiert, daß

$$f^{T(x)}(x) \in S.$$

Die Abbildung

$$P : x \mapsto f^{T(x)}(x)$$

liefert dann eine Abbildung einer Umgebung  $U$  von  $x$  in  $S$  nach  $S$ , die Poincarésche Wiederkehrabbildung.  $P$  hat einen Fixpunkt in  $x_0$  und die gleichen Regularitätseigenschaften wie der Fluß.  $P$  vergißt das Verhalten des Flusses längs der periodischen Bahn, welches ohnehin trivial ist und darüber hinaus typischerweise die Voraussetzungen kompliziert, weil die Linearisierung  $Df^T(y_0)$  in Richtung der periodischen Bahn zumindest im autonomen Fall den Eigenwert 1 hat und darum keine Hyperbolizitätsvoraussetzung erfüllt, und kodiert das Verhalten in den transversalen Richtungen.

**Definition.**  $M$  sei eine differenzierbare Mannigfaltigkeit,  $U \subset M$  offen,  $f : U \rightarrow f(U) \subset M$  ein Diffeomorphismus,  $y_0 \in M$  ein periodischer Punkt der Periode  $n$ , i.e.

$$f^n(y_0) = y_0.$$

$y_0$  heißt hyperbolischer periodischer Punkt für  $f$ , falls  $Df^n(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  eine hyperbolische lineare Abbildung ist. Eine Bahn heißt dann hyperbolische periodische Bahn, falls alle ihre Punkte hyperbolisch sind.

$y_0$  ist also genau dann ein hyperbolischer periodischer Punkt, wenn es ein hyperbolischer Fixpunkt von  $f^n$  ist.

**Definition.**  $f^t : M \rightarrow M$  sei differenzierbarer Fluß mit periodischer Bahn  $\Gamma$ ,  $y_0 \in \Gamma$ . Ist  $y_0$  ein Fixpunkt, so heißt  $y_0$  hyperbolisch, falls  $Df^t(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  für alle  $t \neq 0$  hyperbolisch ist. Ist  $y_0$  kein Fixpunkt, sondern periodisch mit Periode  $T > 0$ , so heißt  $y_0$  hyperbolischer periodischer Punkt, falls  $Df^T(y_0) : T_{y_0}M \rightarrow T_{y_0}M$  1 als einfachen Eigenwert und sonst keinen Eigenwert von Betrag 1 hat. Die Bahn  $\Gamma$  heißt hyperbolisch, wenn alle Punkte aus  $\Gamma$  hyperbolisch sind.

$y_0$  ist genau dann ein hyperbolischer Punkt für den Fluß  $f^t$ , wenn es ein hyperbolischer Fixpunkt der zugehörigen Poincaréschen Wiederkehrabbildung ist.



## 2.5 Stabilitätsfragen

**Definition.**  $f : M \rightarrow M$  sei eine stetig differenzierbare Abbildung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  Fixpunkt von  $f$ .  $p$  heißt hyperbolisch, falls die Ableitung von  $f$  im Punkte  $p$

$$Df(p) : T_p M \rightarrow T_p M$$

eine hyperbolische lineare Abbildung ist.

**Satz von Hartman-Grobman:**  $p \in M$  sei hyperbolischer Fixpunkt der Abbildung  $f : M \rightarrow M$  wie in vorstehender Definition. Dann gibt es Umgebungen  $U_1, U_2$  von  $p$  in  $M$  und Umgebungen  $V_1, V_2$  von  $0$  in  $T_p M$  und einen Homöomorphismus

$$h : U_1 \cup U_2 \rightarrow V_1 \cup V_2$$

mit der Eigenschaft, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ V_1 & \xrightarrow{Df(p)} & V_2 \end{array}$$

kommutiert.

$f$  ist also lokal topologisch konjugiert zu seiner Linearisierung  $Df(p)$  in einem hyperbolischen Fixpunkt im Sinne der folgenden

**Definition.** Zwei Abbildungen  $f : M \rightarrow M, g : N \rightarrow N$  heißen topologisch konjugiert, falls ein Homöomorphismus  $h : M \rightarrow N$  existiert, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

kommutiert, d.h. wenn  $f = h^{-1} \circ g \circ h$  ist.

**Definition.** Eine  $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ )-Abbildung  $f : M \rightarrow M$  heißt  $C^\ell$  ( $1 \leq \ell \leq k$ ) strukturell stabil, wenn  $f$  eine Umgebung  $\mathcal{U}$  in der  $C^\ell$ -Topologie besitzt mit der Eigenschaft, daß jedes  $g \in \mathcal{U}$  zu  $f$  topologisch konjugiert ist.

Man beachte hierbei, daß zwei unterschiedliche Kategorien auftreten, nämlich differenzierbare und stetige Abbildungen, und daß weder gefordert wird, daß jede Abbildung in einer  $C^0$ -Umgebung von  $f$  zu  $f$  topologisch konjugiert ist, noch, daß sich die Konjugation durch einen Diffeomorphismus bewerkstelligen läßt. Beides wären zu starke Forderungen für die nachfolgend beschriebenen Resultate.

Bei der ersten dieser stärkeren Forderung müßte man beispielsweise zulassen, daß isolierte Fixpunkte in größere punktweise invariante Mengen konjugiert, während bei der zweiten Forderung beispielweise in dem unten beschriebenen Sinne die Flüsse zu den Differentialgleichungssystemen

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= \alpha x^1 \\ \dot{x}^2 &= \alpha x^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= \alpha x^1 \\ \dot{x}^2 &= (\alpha + \varepsilon)x^2\end{aligned}$$

für  $\varepsilon \neq 0$  auch im Falle  $\alpha \neq 0$  nicht mehr konjugiert wären.

**Satz.**  *$p$  sei Fixpunkt der  $C^1$ -Abbildung  $f : M \rightarrow M$ , und  $Df(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  habe maximalen Rang. Dann ist  $f$  genau dann lokal strukturell stabil in einer Umgebung von  $p$ , wenn  $p$  hyperbolisch ist.*

Die positive Richtung dieses Satzes folgt aus dem Satz von Hartman-Grobman, denn letzterer besagt, daß  $f$  im hyperbolischen Fall konjugiert zu seiner Linearisierung ist, und zwei hyperbolische lineare Abbildungen sind genau zueinander konjugiert, wenn die Anzahl der Eigenwerte vom Betrage  $< 1$  (und damit auch diejenige der Eigenwerte vom Betrage  $> 1$ ) gleich ist und die Determinanten auf den entsprechenden Räumen das gleiche Vorzeichen haben, was offensichtlich strukturell stabile Bedingungen sind.

Die negative Richtung ist ebenfalls nicht schwer zu zeigen, indem man nicht-hyperbolische lineare Abbildungen betrachtet, welche einerseits zu hyperbolischen gestört werden können, andererseits aber ein von diesen qualitativ verschiedenes Verhalten zeigen.

Analoge Konstruktionen und Resultate sind im zeitkontinuierlichen Fall möglich. Zwei Flüsse sind topologisch konjugiert, wenn die Bahnen durch einen Homöomorphismus ineinander überführt werden können, wobei auf jeder Bahn eine Unparametrisierung der Zeit erlaubt ist. Insbesondere können sich daher die Perioden von periodischen Bahnen unter einer topologischen Konjugation ändern. Der Satz von Hartman-Grobman für Flüsse besagt entsprechend, daß ein Fluß mit einem hyperbolischen Fixpunkt zu seiner Linearisierung in diesem Fixpunkt konjugiert ist.

## 2.6 Bifurkationen

**Definition.**  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ( $\Lambda$  offen in  $\mathbb{R}^n$ ) sei eine von einem Parameter  $\lambda$  abhängige (und  $r$  mal stetig nach  $\lambda$  differenzierbare) Familie von Abbildungen  $f_\lambda : M \rightarrow M$  der Klasse  $C^\infty$ .  $\lambda_0 \in \Lambda$  heißt Bifurkationspunkt, wenn  $f_{\lambda_0}$  nicht lokal  $C^2$ -strukturell stabil ist. Wir sagen, daß bei einem Bifurkationspunkt  $\lambda_0$  eine strukturell stabile  $n$ -parametrische Bifurkation vorliegt, wenn für jede Familie  $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ , die in einer genügend kleinen  $C^2$ -Umgebung von  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  liegt, ein  $\varepsilon > 0$  und eine Unparametrisierung  $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$  sowie eine stetig von  $\lambda$  abhängige Familie  $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  lokaler Homöomorphismen existieren, derart, daß

$$g_{\varphi(\lambda)} = h_\lambda^{-1} \circ f_\lambda \circ h_\lambda$$

für  $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$  gilt.

Die strukturelle Stabilität hängt typischerweise von der Anzahl  $n$  der Parameter ab. R. Thom hat für genügend kleine Werte von  $n$  alle strukturell stabilen Bifurkationen klassifiziert und diese Theorie auf entwicklungsbiologische Fragestellungen angewandt. Auch die qualitative Erklärung bestimmter sozialwissenschaftlicher Phänomene durch eine derartige Bifurkationsanalyse ist diskutiert worden, wobei allerdings oft die exakte Bestimmung der Bifurkationsparameter schwierig ist. Der Vorteil der Theorie, in diesem Kontext auch Katastrophentheorie genannt, liegt aber darin, daß man die genaue funktionale Abhängigkeit der beobachteten von den sie beeinflussenden Größen nicht zu kennen braucht, um zu einer qualitativen Beschreibung von möglichen Übergängen, Gestaltwechselln, Umbrüchen etc. zu gelangen. Zumindest bietet die Theorie exakt analysierbare und gegen Störungen stabile Modellsituationen, die als Analogien zum Verständnis weniger exakt faßbarer Phänomene aus dem sozialwissenschaftlichen Bereich dienen können.

Allerdings wird die Theorie oft unkritisch angewandt, und es werden insbesondere häufig qualitative Analogien mit kausalen Erklärungen verwechselt.

## 2.7 Die Hopfbifurkation

Wir wollen, anknüpfend an ein schon in 2.2 eingeführtes Beispiel, einen wichtigen Typ einer Bifurkation genauer besprechen, nämlich die Hopfbifurkation.

Hier entsteht durch Variation eines reellen Parameters beim Übergang von einem anziehenden zu einem abstoßenden Fixpunkt eine periodische Bahn. Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern. Wir betrachten im  $\mathbb{R}^2$  das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(x^2 + y^2 - \alpha) \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2 - \alpha)\end{aligned}$$

in Abhängigkeit von dem Parameter  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$(0, 0)$  ist für alle  $\alpha$  ein Fixpunkt.

Für  $\alpha < 0$  ist dieser Fixpunkt global exponentiell anziehend.

Dies zeigt sich leicht mittels der Lyapunovfunktion  $\log(x^2 + y^2)$

(eine Lyapunovfunktion ist eine Funktion, die längs jeder Flußlinie streng monoton fallend ist):

$$\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) = 2(-x^2 - y^2 + \alpha) \leq 2\alpha < 0.$$

$\log(x^2 + y^2)$  fällt also längs jeder Flußlinie, mithin auch  $x^2 + y^2$ , und daher muß jede Flußlinie nach  $(0, 0)$  laufen.

Dies ist eine strukturell stabile Situation, die sich bei kleinen Störungen von  $\alpha$  nicht qualitativ ändert.

Für  $\alpha = 0$  ist  $(0, 0)$  immer noch global anziehend, allerdings nicht mehr exponentiell. Es gilt weiterhin

$$\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) < 0 \text{ für } (x, y) \neq (0, 0),$$

aber dieser Ausdruck ist nun nicht mehr von 0 weg beschränkt. Die Situation für  $\alpha = 0$  ist nicht mehr strukturell stabil.

Für  $\alpha > 0$  ist  $(0, 0)$  abstoßend, und es gibt eine periodische Bahn  $x^2 + y^2 = \alpha$ , welche anziehend ist. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \log(x^2 + y^2) \begin{cases} > 0 & \text{für } x^2 + y^2 < \alpha \\ < 0 & \text{für } x^2 + y^2 > \alpha \end{cases}$$

Die Situation ist in der Nähe von  $(0, 0)$  strukturell stabil.

Wir erhalten also eine von  $\alpha$  abhängige Familie von periodischen Bahnen, die beim Übergang von  $\alpha = 0$  zu  $\alpha > 0$  aus dem Fixpunkt herauslaufen. Diese Familie periodischer Bahnen stellt eine strukturell stabile Verzweigung dar, d.h. auch bei Störungen des obigen Systems muß es eine derartige Familie geben.

Wir wollen, um dies besser zu verstehen, noch einmal das eingangs schon einmal diskutierte linearisierte System betrachten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \alpha x \\ \dot{y} &= -x + \alpha y.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind  $\alpha \pm i$ , mit

$$\begin{aligned} \text{Imaginärteil} &\neq 0, \\ \text{aber Realteil} &= 0 \text{ für } \alpha = 0. \end{aligned}$$

Hier sind für  $\alpha = 0$  alle Bahnen periodisch, nämlich Kreise  
Abbildung

um  $(0, 0)$ , während es für  $\alpha \neq 0$  keine einzige periodische Bahn gibt. Hier konzentriert sich also die ganze Familie bei einem einzigen Parameterwert, während sie sich bei dem gegenüber dem linearen durch einen Term höherer Ordnung gestörten System auf verschiedene Parameterwerte verteilt. Die Situation bei  $\alpha = 0$  ist also nicht strukturell stabil, aber das Verhalten der ganzen Familie, daß nämlich beim Übergang von einem anziehenden zu einem abstoßenden Fixpunkt eine Familie periodischer Bahnen entsteht, ist es.

## 2.8 Generische Eigenschaften

Man möchte gerne eine präzise Fassung davon haben, daß eine Eigenschaft  $P$  typisch für eine parametrisierte Klasse dynamischer Systeme ist. Der Ansatzpunkt sollte die Forderung sein, daß i) für jedes  $\lambda_0$  in dem Parameterraum  $\Lambda$  eine beliebig kleine Störung  $\lambda$  von  $\lambda_0$  existiert mit der Eigenschaft, daß die Eigenschaft  $P$  für den Parameterwert  $\lambda$  erfüllt ist, und daß ii), falls  $P$  für  $\lambda_0 \in \Lambda$  gilt, dies auch für jede genügend kleine Störung  $\lambda$  von  $\lambda_0$  gilt.

Dies bedeutet, daß die Menge  $\Lambda(P)$  derjenigen Parameter aus  $\Lambda$ , für die  $P$  gilt, dicht und offen in  $\Lambda$  ist.

Es stellt sich heraus, daß es sinnvoll ist, diese Forderung etwas abzuschwächen.

**Definition.** Eine Teilmenge  $\Lambda_0$  eines vollständigen metrischen Raumes  $\Lambda$  heißt generisch, falls sie einen abzählbaren Durchschnitt offener und dichter Teilmengen von  $\Lambda$  enthält, und in diesem Falle heißen Elemente aus  $\Lambda_0$  generische Parameterwerte, wenn  $\Lambda$  als Parameterraum auftritt.

Wir suchen also keine offene und dichte Menge, sondern einen abzählbaren Durchschnitt derartiger Mengen. Der Grund hierfür liegt in dem Satz von Baire, daß in einem vollständigen metrischen Raum jeder abzählbare Durchschnitt offener und dichter Mengen wieder dicht ist.

## 2.9 Lotka-Volterra-Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir einige der besprochenen Phänomene für Systeme gekoppelter Differentialgleichungen noch einmal an einer konkreten Beispielklasse erläutern, den Systemen vom Lotka-Volterra-Typ, die in der Biologie und Ökologie einige Anwendungen und vor allem inhaltlich konkrete Interpretationen gefunden haben.

Das allgemeine System vom Lotka-Volterra-Typ für  $n$  Populationen ist

$$(1) \quad \dot{x}_i = x_i \left( a_i + \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$x_i$  bezeichnet hier die Größe der  $i$ -ten Population, sollte also nichtnegativ sein, und  $a_i$  ist die intrinsische Wachstums- oder Abnahmerate dieser Population bei Abwesenheit aller anderen Populationen, während  $b_{ij}$  die Stärke des Einflusses der  $j$ -ten auf die  $i$ -te Population angibt. Hierbei ist  $a_i$  also positiv (negativ), falls  $x_i$  eine inhärente Tendenz zum Wachstum (zur Abnahme) besitzt, während  $b_{ij}$  positiv (negativ) ist, wenn  $x_j$  das Wachstum von  $x_i$  fördert (behindert), also wenn sich die  $i$ -te Population z.B. von der  $j$ -ten Population ernährt (gefressen wird);  $b_{ij}$  und  $b_{ji}$  sind gleichzeitig negativ, wenn die beiden Populationen miteinander in Konkurrenz stehen.

Wir wollen nun einen der einfachsten Fälle studieren, und zwar das zweidimensionale Räuber-Beute-Modell ohne Konkurrenz innerhalb der beiden Arten, gegeben durch

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a_1 + b_{12}x_2) && (x_1 \text{ ist die Beute}) \\ \dot{x}_2 &= x_2(a_2 + b_{21}x_1) && (x_2 \text{ ist der Räuber}) . \end{aligned}$$

Hierbei ist

- $a_1 > 0$  (die Beutepopulation wächst bei Abwesenheit von Räubern)
- $a_2 < 0$  (die Räuberpopulation nimmt bei Abwesenheit von Beute ab)
- $b_{12} < 0$  (die Beute wird von den Räubern gefressen)
- $b_{21} > 0$  (die Anwesenheit von Beute läßt die Räuberpopulation wachsen).

Natürlich sind wir nur an Lösungen mit

$$x_i(t) \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ und alle } t \geq 0$$

interessiert.

Wir beginnen mit einigen offensichtlichen Beobachtungen:

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \text{ ist ein Fixpunkt.}$$

Dieser Fixpunkt ist ein Sattelpunkt, wie man unschwer an dem linearisierten System abliest. Die  $x_1$ -Achse ist nämlich eine Bahn, auf der die Lösung durch  $x_1(t) = x_1(0)e^{a_1 t}$ ,  $x_2(t) = 0$  wächst, während die  $x_2$ -Achse eine kontrahierende Bahn gemäß  $x_1(t) = 0$ ,  $x_2(t) = x_2(0)e^{a_2 t}$  ist, weil  $a_2 < 0$ .

Daher bleibt insbesondere der positive Quadrant  $x_1(t) > 0$ ,  $x_2(t) > 0$  invariant.

Ein interessanterer Fixpunkt findet sich bei

$$(3) \quad \bar{x}_1 = -\frac{a_2}{b_{21}}, \quad \bar{x}_2 = -\frac{a_1}{b_{12}}.$$

Alle anderen Bahnen im positiven Quadranten sind periodisch und umlaufen diesen Fixpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn.

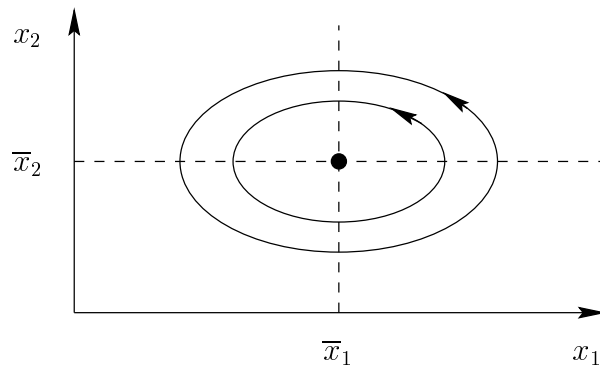
Dies folgt unmittelbar aus der Beobachtung, daß für

$$(4) \quad V(x_1, x_2) := b_{21}(\bar{x}_1 \log x_1 - x_1) - b_{12}(\bar{x}_2 \log x_2 - x_2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) &= -a_2 \frac{\dot{x}_1}{x_1} - b_{21}\dot{x}_1 + a_2 \frac{\dot{x}_2}{x_2} + b_{12}\dot{x}_2 \\ &= 0 \text{ von (4)} \end{aligned}$$

gilt, so daß  $V(x_1, x_2)$  eine Konstante der Bewegung ist.  $V$  nimmt sein eindeutiges Maximum in  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  an, und deswegen sind die Kurven  $V(x_1, x_2) \equiv \text{Konstante}$  Kreise um diesen Punkt.

Die Bewegung auf einem derartigen Kreis verläuft entgegen dem Uhrzeigersinn, weil beispielsweise im Falle  $x_1(t) > \bar{x}_1$ ,  $x_2(t) > \bar{x}_2$ ,  $\dot{x}_1(t) < 0$ ,  $\dot{x}_2(t) > 0$  gilt.



Auf der Linie  $x_1 = \bar{x}_1$  (Isokline) gilt  $\dot{x}_2(t) = 0$ , und für  $x_2 = \bar{x}_2$  ist  $\dot{x}_1(t) = 0$ .

Das Differentialgleichungssystem führt dazu zu periodischen Oszillationen der Räuber- und Beutepopulationen.

Falls  $T$  die Periode einer solchen Oszillation ist, gilt

$$0 = \log x_1(T) - \log x_1(0) = \int_0^T \frac{d}{dt} \log x_1(t) dt = \int_0^T (a_1 + b_{12}x_2(t)) dt$$

und daher

$$(5) \quad \frac{1}{T} \int_0^T x_2(t) dt = -\frac{a_1}{b_{12}} = \bar{x}_2,$$

und analog

$$(6) \quad \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) dt = -\frac{a_2}{b_{21}} = s_1,$$

so daß die zeitlichen Mittel der oszillierenden Populationen durch die Werte im Gleichgewichtspunkt gegeben sind.

Insbesondere kann man aus dieser Beobachtung die Auswirkungen einer Variation eines der Koeffizienten in (1) durch äußere Einflüsse auf die zeitlichen Mittel der beiden Populationen ablesen.

Das Verhalten des vorstehenden Systems mit seiner Familie von periodischen Bahnen ist nicht stabil unter kleinen Störungen, denn es handelt sich hier genau um diejenige Situation, die wir auch schon bei der Diskussion der Hopfbifurkation kennengelernt haben.

Falls wir hier auch intraspezifische Konkurrenz einführen und unser System ändern zu

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(a_1 + b_{11}x_1 + b_{12}x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(a_2 + b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} b_{11} &< 0 \text{ (die Mitglieder der ersten Population konkurrieren um Nahrung)} \\ b_{22} &\leq 0, \end{aligned}$$

so ändert sich auch das qualitative Verhalten.

Neben  $(0,0)$  erhalten wir nun einen zweiten Fixpunkt auf der positiven  $x_1$ -Achse, nämlich  $(-\frac{a_1}{b_{11}}, 0)$ . Dieser Fixpunkt ist stets anziehend für  $x$ , denn im Falle  $x_2(t) = 0$ , erhalten wir die sog. logistische Gleichung

$$\dot{x}_1(t) = x_1(a_1 + b_{11}x_1) \text{ mit } a_1 > 0, b_{11} < 0.$$

Ob dieser Fixpunkt auch für  $x_2$  anziehend ist, hängt von dem Vorzeichen von  $\dot{x}_2(t)$  für kleine Werte von  $x_2(t)$  und  $x_1(t) = -\frac{a_1}{b_{11}}$  ab, ob also

$$a_2 b_{11} - a_1 b_{21} > 0.$$

In diesem Falle gibt es keinen weiteren Fixpunkt im positiven Quadranten, und es gilt für jede Lösung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0,$$

d.h. die Räuber sterben aus.

Falls jedoch

$$a_2 b_{11} - a_1 b_{21} < 0,$$

so ist

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{a_2 b_{12} - a_1 b_{22}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} > 0 \\ \bar{x}_2 &= \frac{a_1 b_{21} - a_2 b_{11}}{b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}} > 0\end{aligned}$$

ein Fixpunkt im positiven Quadranten.

Mit  $V(x_1, x_2)$  wie in (4), berechnen wir nun

$$\frac{d}{dt} V(x_1(t), x_2(t)) = -b_{11} b_{21} (\bar{x}_1 - x_1(t))^2 + b_{12} b_{22} (\bar{x}_2 - x_2(t))^2 \geq 0,$$

und diese Ableitung ist positiv außer für  $(x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Dies bedeutet, daß  $V(x_1(t), x_2(t))$  auf jeder Bahn wächst, und ein Gleichgewicht liegt nur im Maximum vor, also in dem Fixpunkt  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ . Die Bahnen im positiven Quadranten laufen alle spiralförmig entgegen dem Uhrzeigersinn auf diesen Fixpunkt zu.

## 2.10 Stabile, unstable und Zentrumsmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir ein präziseres Instrumentarium zur Aufdeckung und Analyse von nichtgenerischen Phänomenen bei dynamischen Systemen entwickeln. Unglücklicherweise ist die etablierte Terminologie derart, daß der Ausdruck „stabil“ hier in einem anderen Sinne als vorher verwandt wird.

Wir betrachten zunächst eine  $C^1$ -Abbildung

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$U$  ist eine offene Umgebung von  $y_0 \in \mathbb{R}^d$ , mit einem hyperbolischen Fixpunkt in  $y_0$ , also

$$f(y_0) = y_0,$$

und die Ableitung

$$Df(y_0)$$

hat keinen Eigenwert vom Betrage 1. Wir betrachten wie üblich die Iterationen  $f^n$ . Die stabile Mannigfaltigkeit  $M^s(y_0)$  besteht dann aus allen Punkten  $x \in U$  mit  $f^n x \in U$  für alle  $n$  und

$$f^n x \rightarrow y_0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Da es sich bei  $y_0$  nach Annahme um einen hyperbolischen Fixpunkt handelt, kann man, sofern man  $U$  genügend klein wählt, sogar auf die zweite Bedingung verzichten, braucht also

nur zu verlangen, daß die Bahn  $f^n x \in U$  nicht verläßt. Die Punkte, die nicht von dem Fixpunkt  $y_0$  angezogen werden, werden abgestoßen. Die instabile Mannigfaltigkeit  $M^u(y_0)$  besteht allerdings nicht aus allen Punkten, die abgestoßen werden, sondern nur aus denjenigen, die asymptotisch aus  $y_0$  kommen, in dem folgenden Sinne:  $y \in M^u(y_0)$ , wenn eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$  mit  $f x_n = x_{n-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und

$$x_n \rightarrow y$$

für  $n \rightarrow \infty$  existiert. Wiederum kann man im hyperbolischen Fall auf die letzte Bedingung verzichten, sofern man  $U$  genügend klein wählt.

Im Falle, wo  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist die instabile Mannigfaltigkeit von  $f$  gerade die stabile Mannigfaltigkeit von  $f^{-1}$ , wie man aus der vorstehenden Definition erkennt.

Um später auch den Fall nicht-hyperbolischer Fixpunkte analysieren zu können, erweist es sich als zweckmäßig, die nachfolgenden Aussagen unter der allgemeineren Bedingung, daß es für ein  $\rho \geq 0$  keinen Eigenwert vom Betrag  $\rho$  der Linearisierung der Abbildung im Fixpunkt  $x_0$  gibt, zu formulieren. Diese Eigenschaft wird  $\rho$ -Pseudohyperbolizität genannt.

Damit wir in der nachfolgenden Notation  $y_0 \in \mathbb{R}^d$  mit  $0 \in T_{y_0} \mathbb{R}^d$  identifizieren können, nehmen wir einfach  $y_0 = 0$  an.

**Satz von Hadamard-Perron über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten:**

Es sei  $U$  eine offene Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}^d$ ,

$$f \in C^1(U, \mathbb{R}^d)$$

mit

$$f(y_0) = 0.$$

Es sei  $\rho > 0$ .

Die Ableitung  $Df(0)$  habe keinen Eigenwert vom Betrag  $\rho$ . Es seien  $V_\rho^s, V_\rho^u$  die Unterräume von  $T_0 \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$ , die den Eigenwerten vom Betrag  $< \rho$  bzw.  $> \rho$  entsprechen, und es seien  $A^{s,u} = Df(y)|_{V_\rho^{s,u}}$ . Wir wählen mittels elementarer linearer Algebra eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit

$$\|A^s\| < \rho, \|(A^u)^{-1}\| < \rho^{-1}$$

und setzen für  $R > 0$

$$U(R) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < R\}.$$

$$U^{s,u}(R) := \{x \in V_\rho^{s,u} : \|x\| < R\}.$$

Ist dann  $\rho \leq 1$ , so ist für genügend kleines  $R > 0$  die **stabile Mannigfaltigkeit**

$$M^s(0) := \bigcap_{n \geq 0} f^{-n} U(\rho^n R) = \{x_0 \in U(R) : f^n x_0 \in U(\rho^n R) \text{ für alle } n\}$$

Graph einer  $C^1$ -Abbildung

$$\varphi^s : U^s(R) \rightarrow U^u(R)$$

mit

$$\varphi^s(0) = 0, D\varphi^s(0) = 0.$$



Ist  $\rho \geq 1$ , so ist für genügend kleines  $R > 0$  die **instabile Mannigfaltigkeit**

$$\begin{aligned} M^u(0) &:= \bigcap_{n \geq 0} f^n \bigcap_{\nu=0}^n f^{-\nu} U(\rho^{\nu-n} R) \\ &= \{x_0 \in \mathbb{R}^d : \text{es existiert eine Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d \\ &\quad \text{mit } f x_n = x_{n-1} \\ &\quad \text{und } x_n \in U(\rho^{-n} R) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

der Graph einer  $C^1$ -Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^u &: U^u(R) \rightarrow U^s(R) \\ \text{mit } \varphi^u(0) &= 0, D\varphi^u(0) = 0. \end{aligned}$$

Ist  $f$  von der Klasse  $C^k$ , so sind dies auch die Abbildungen  $\varphi^{s,u}$ .

Die vorstehenden Aussagen verallgemeinern sich ohne Schwierigkeiten auf (endlich dimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und auch auf Banachräume, sofern diese differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger besitzen.

Eine Beweismethode für den vorstehenden Satz beruht auf der Graphentransformationsmethode von Hadamard. In der nachfolgenden Skizze betrachten wir den Fall  $\rho = 1$ . Hierzu betrachtet man für genügend kleines  $R > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &:= \{\psi : U^u(R) \rightarrow U^s(R) \\ &\quad \text{Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante } \leq 1 \text{ und } \psi(0) = 0\} \end{aligned}$$

Für  $\psi \in \mathcal{L}_1$  betrachten wir den Graphen

$$\Gamma(\psi) := \{(x, \psi(x)), x \in U^u(R)\},$$

welcher wegen der Bedingung an die Lipschitzkonstante von  $\psi$  in  $U(R)$  liegt. Man zeigt dann, daß  $f \mathcal{L}_1$  in sich abbildet, in dem Sinne, daß für  $\psi \in \mathcal{L}_1$   $f\Gamma(\psi) \cap U(R)$  wiederum Graph einer Abbildung aus  $\mathcal{L}_1$  ist, welche wir mit  $f_{\#}\psi$  bezeichnen wollen. Als Kontraktion von  $\mathcal{L}_1$  bezüglich der  $C^0$ -Norm hat  $f_{\#}$  dann einen Fixpunkt in  $\mathcal{L}_1$ , und dies ist gerade die gesuchte Abbildung  $\varphi^u$ . Da  $f$  durch seine Linearisierung  $Df(0)$  approximiert wird, staucht  $f_{\#}$  den Graphen von  $\psi$  in der stabilen Richtung  $V^s$  und zerrt ihn in der unstabilen Richtung  $V^u$ . Daher werden Ableitungen von  $\psi$  durch  $f_{\#}$  verkleinert, und  $\varphi^u$  erweist sich als differenzierbar mit  $D\varphi^u(0) = 0$ . Außerdem wird für  $(x^1, x^2) \in U^u(R) \times U^s(R)$  der Abstand zu  $(x^1, \varphi^u(x^1)) \in U^u(R) \times U^s(R)$  durch  $f$  um einen Faktor  $< 1$  verkleinert. Dies führt dazu, daß  $f^n(x^1, x^2)$ , wenn es in  $U(R)$  verbleibt, gegen einen Punkt auf dem Graphen von  $\varphi^u$  konvergiert, und man den Graphen von  $\varphi^u$  mit  $\bigcap_{n \geq 0} f^n U(R)$  (oder genauer mit dem oben angegebenen Ausdruck für  $M^u(0)$ ) identifizieren kann.

Die stabile und die unstabile Untermannigfaltigkeit und damit auch die Abbildungen  $\varphi^s$  und  $\varphi^u$  im vorstehenden Satz sind eindeutig bestimmt. Dies ist nicht mehr der Fall im nachfolgenden

### **Satz über die zentral-stabile und die zentral-unstabile Mannigfaltigkeit:**

*Es mögen die Voraussetzungen des vorstehenden Satzes gelten. Im Falle  $\rho \geq 1$  gibt es für genügend kleines  $R > 0$  eine differenzierbare Abbildung*

$$\varphi^{0s} : U^s(R) \rightarrow U^u(R)$$

mit  $\varphi^{0s}(0) = 0, D\varphi^{0s}(0) = 0$ , deren Graph  $M^{0s}(0)$ , die „zentral-stabile Mannigfaltigkeit“, lokal invariant unter  $f$  in dem Sinne ist, daß

$$\begin{aligned} fM^{0s}(0) \cap U(R) &\subset M^{0s}(0) \\ f^{-1}M^{0s}(0) \cap U(R) &\subset M^{0s}(0). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $f$  lokal anziehend für  $f^{-1}$  in dem Sinne, daß für  $x_n \in \bigcap_{\nu=0}^n f^{-\nu}U(R)$  der Abstand von  $x_n$  zu  $M^{0s}(0)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.

Im Falle  $\rho \leq 1$  gibt es für genügend kleines  $R > 0$  eine differenzierbare Abbildung

$$\varphi^{0u} : U^u(R) \rightarrow U^s(R)$$

mit  $\varphi^{0u}(0) = 0, D\varphi^{0u}(0) = 0$ , deren Graph  $M^{0u}(0)$ , die „zentral-unstabile Mannigfaltigkeit“, lokal invariant unter  $f$  in dem Sinne ist, daß

$$fM^{0u}(0) \cap U(R) \subset M^{0u}(0).$$

Außerdem ist  $M^{0u}(0)$  lokal anziehend für  $f$  in dem Sinne, daß für

$$x_n \in \bigcap_{\nu=0}^n f^{-\nu}U(R)$$

der Abstand von  $f^n x_n$  zu  $M^{0u}(0)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt.  $M^{0s}(0)$  enthält die stabile Mannigfaltigkeit  $M^s(0)$ ,  $M^{0u}(0)$  die instabile Mannigfaltigkeit  $M^u(0)$ .

Die stabile Mannigfaltigkeit gehört zu den Eigenwerten der Linearisierung, deren Betrag  $< 1$  ist, die zentral-stabile zu denjenigen vom Betrag  $\leq 1$ . Entsprechendes gilt für die unstabile und die zentral-unstabile Mannigfaltigkeit (Eigenwerte  $> 1$  bzw.  $\geq 1$ ). Die Dynamik in der stabilen Mannigfaltigkeit ist exponentiell kontrahierend, in der instabilen Mannigfaltigkeit exponentiell expandierend. Beide Dynamiken lassen sich also einfach und übersichtlich beschreiben.

Der Durchschnitt

$$M^0(0) = M^{0s}(0) \cap M^{0u}(0)$$

heißt **Zentrumsmannigfaltigkeit**. Sie ist tangential an den Unterraum von  $T_0\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$ , der zu den Eigenwerten von  $Df(0)$  vom Betrag 1 gehört. Die Zentrumsmannigfaltigkeit beschreibt die nichttrivialen Aspekte der Dynamik. Sind  $V^0, V^1$  die Unterräume von  $T_0\mathbb{R}^d$ , die den Eigenwerten vom Betrag 1 bzw.  $\neq 1$  entsprechen,  $U^0(R) := \{x \in V^0 : \|x\| < R\}$ ,  $U^1 := \{x \in V^1 : \|x\| < R\}$ , so ist eine Zentrumsmannigfaltigkeit in der Situation der vorstehenden Sätze durch eine  $C^1$ -Abbildung

$$\varphi^0 : U^0(R) \rightarrow U^1(R)$$

mit  $\varphi^0(0) = 0, D\varphi^0(0) = 0$  gegeben, deren Graph lokal invariant unter der Dynamik ist.

Wie angedeutet, gelten die vorstehenden Sätze auch in Banachräumen, also im unendlichdimensionalen Fall. Häufig ist jedoch auch in derartigen unendlichdimensionalen Situationen die Zentrumsmannigfaltigkeit endlichdimensional. Dies bedeutet, daß sich die Dynamik durch nur endlich viele Freiheitsgrade beschreiben läßt. Dies entspricht dem Versklavungsprinzip der Synergetik, einer physikalischen Theorie von H. Haken.

Analoge Resultate gelten für zeitkontinuierliche Systeme

$$(x, t) \mapsto f^t(x) \quad (x \in U \subset \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R})$$

Man erhält dies, indem man zunächst die vorstehenden Sätze auf die Zeit-1-Abbildung

$$f(x) := f^1(x)$$

anwendet und sich dann überlegt, daß die dort ausgesprochenen Invarianzeigenschaften nicht nur für  $n \in \mathbb{N}$ , sondern auch für  $t \geq 0$  gelten.

Wir wollen die Aussagen nun an Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erläutern:

$$(1) \quad \dot{w} = g(w, \lambda)$$

mit  $w \in \mathbb{R}^d$  und einem Parameter  $\lambda$  aus einer Umgebung von  $0 \in \mathbb{R}$ . Es sei  $g(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda$ . Wir betrachten die Linearisierung

$$(2) \quad \dot{w} = Aw \text{ mit } A := \frac{\partial}{\partial w} g(0, 0).$$

$d_s, d_u, d_z$  seien die Summen der Vielfachheiten der Eigenwerte von  $A$  als Lösungen der charakteristischen Gleichung  $\det(A - \mu Id) = 0$ , mit Realteil kleiner, größer, gleich 0, und wir identifizieren die zugehörigen Unterräume des  $T_0 \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{R}^{d_s}, \mathbb{R}^{d_u}, \mathbb{R}^{d_z}$ . Die Dynamik ist dann konjugiert zu derjenigen von

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \dot{x} = \gamma(x, \lambda) & \text{für } x \in \mathbb{R}^{d_z} \\ \dot{u} = -u & \text{für } u \in \mathbb{R}^{d_s} \\ \dot{v} = v & \text{für } v \in \mathbb{R}^{d_u} \end{array}$$

mit einer aus  $g$  zu bestimmenden Funktion  $\gamma$ . Die Dynamik von  $u$  und  $v$  ist denkbar einfach, nämlich

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t} u(0) \\ v(t) &= e^t v(0). \end{aligned}$$

Alles Interessante spielt sich also auf der Zentrumsmannigfaltigkeit ab, die hier zu  $\mathbb{R}^{d_z}$  geworden ist. Da aber typischerweise das Problem gerade darin besteht, das System (1) in das System (3) zu konjugieren, kehren wir zu (1) zurück und schreiben es nach einer linearen Koordinatentransformation in der Form

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A^0 x + h(x, y, \lambda) \\ \dot{y} &= A^1 y + k(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, daß der Parameter  $\lambda$  nicht auftritt (der allgemeine Fall wird später durch einen einfachen Trick auf diesen zurückgeführt werden), also

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A^0 x + h(x, y) \\ \dot{y} &= A^1 y + k(x, y). \end{aligned}$$

Die Zerlegung sei derart, daß  $x \in \mathbb{R}^{d_z}$ , und alle Eigenwerte von  $A^0$  den Realteil 0,  $y \in \mathbb{R}^{d'}$  ( $d' = d_s + d_u$ ) und alle Eigenwerte von  $A^1$  einen von 0 verschiedenen Realteil haben.

Die Zentrumsmannigfaltigkeit wird nun durch eine Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

beschrieben. Da diese Gleichung invariant unter dem Fluß sein muß, erhalten wir durch Ableiten nach  $t$  die Gleichung

$$(6) \quad 0 = \dot{x}\varphi'(x) - \dot{y} = \varphi'(x)(A^0x + h(x, \varphi(x)) - (A^1\varphi(x) + k(x, \varphi(x)))) =: \Lambda(\varphi)(x) \quad (\text{mit } \varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x)).$$

Aus dieser Gleichung läßt sich nun eine Taylorentwicklung für die Zentrumsmannigfaltigkeit herleiten. Die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit wird dann durch die Gleichung

$$(7) \quad \dot{x} = A^0x + h(x, \varphi(x))$$

gegeben. Die Gleichung

$$(8) \quad y = \varphi(x)$$

heißt Versklavungsgleichung. Die Gleichung (7) beschreibt die wesentlichen Freiheitsgrade des Systems und heißt reduzierte Gleichung. Um Beispiele zu behandeln, ist es nützlich, die im Anschluß an (6) gemachte Bemerkung durch das folgende Lemma zu präzisieren:

**Lemma.** *Die Funktionen  $h$  und  $k$  in (5) seien von der Klasse  $C^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Dann ist auch  $\varphi$  in (8) von dieser Klasse. Gilt ferner für  $\psi \in C^m$*

$$\Lambda(\psi)(x) = 0(|x|^m) \text{ für } |x| \rightarrow 0,$$

so ist

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = 0(|x|^m) \text{ für } |x| \rightarrow 0$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy, \\ \dot{y} &= -y + x^2 \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Linearisierung in  $(0, 0)$  ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned}$$

Die  $y$ -Richtung ist also stabil, während die  $x$ -Richtung zentral ist und somit einer genaueren Analyse bedarf. Bei der linearisierten Gleichung bleibt die  $x$ -Achse punktweise invariant, aber wir werden sehen, daß dies für das ursprüngliche nichtlineare Problem natürlich nicht mehr gilt. Die Versklavungsgleichung  $y = \varphi(x)$  führt nach (6) zu

$$-x\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) - x^2 = 0$$

Mit  $\psi(x) = x^2$  gilt

$$\Lambda(\psi)(x) = -2x^4,$$

somit nach dem Lemma

$$y = \varphi(x) = x^2 + 0(|x|^4),$$

und durch Einsetzen erhalten wir für die Dynamik auf der Zentrumsmannigfaltigkeit

$$\dot{x} = -x^3 + 0(|x|^5).$$

Somit ist im Gegensatz zum linearisierten Problem für unser Ausgangsproblem der Nullpunkt ein globaler Attraktor.

2.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 \\ \dot{y} &= -y \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hier sieht man direkt, daß der Nullpunkt ein globaler Attraktor ist. Dieses Beispiel soll uns aber dazu dienen, das Phänomen der Nichteindeutigkeit der Zentrumsmannigfaltigkeit aufzuweisen. Für beliebige Konstanten  $\alpha, \beta$  ist nämlich die Kurve

$$y = \varphi(x; \alpha, \beta) := \begin{cases} -\alpha e^{-\frac{1}{2x^2}} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \beta e^{-\frac{1}{2x^2}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

flußinvariant und liefert somit eine Zentrumsmannigfaltigkeit. Das Beispiel zeigt auch, daß auch bei reell analytischen Gleichungen Zentrumsmannigfaltigkeiten nicht unbedingt reell analytisch sein müssen. Verfeinerungen dieses Beispiels zeigen sogar, daß sie nicht einmal von der Klasse  $C^\infty$  sein müssen.

Wir kehren nun zu der Situation zurück, wo der Parameter  $\lambda$  auftritt und fügen in diesen Fall einfach als zusätzliche Gleichung

$$\dot{\lambda} = 0$$

hinzu und fassen deswegen  $\lambda$  als auf gleicher Stufe mit  $x$  stehend auf. Die Versklavungsgleichung wird also nun zu

$$y(t) = \varphi(x(t), \lambda),$$

und die reduzierte Gleichung ist

$$\dot{x} = A^0 x + h(x, \varphi(x, \lambda), \lambda).$$

3.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x - x^3 + xy \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^2 \quad (\lambda, x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

in der Nähe von  $x = y = \lambda = 0$ . Die Zentrumsmannigfaltigkeitsgleichung

$$y = \varphi(x, \lambda)$$

führt nun auf

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dot{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \dot{y} \\ &= (\lambda x - x^3 + x\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (-\varphi + \varphi^2 - x^2) = \Lambda(\varphi)(x, \lambda). \end{aligned}$$

Mit  $\psi(x, \lambda) = -x^2$  ist

$$\Lambda(\psi)(x, \lambda) = 0((|x| + |\lambda|)^3)$$

und nach dem Lemma daher

$$\varphi(x, \lambda) = -x^2 + 0((|x| + |\lambda|)^3) \text{ für } \lambda, x \rightarrow 0.$$

Einsetzen in die reduzierte Gleichung liefert

$$\dot{x} = \lambda x - 2x^3 + 0((|x| + |\lambda|)^4) \text{ für } \lambda, x \rightarrow 0$$

Somit wird die Struktur des Flusses in der Nähe von  $\lambda = 0, x = 0$  durch

$$\dot{x} = \lambda x - 2x^3$$

bestimmt. Die Bifurkation an der Stelle  $\lambda = 0$ , nämlich der Übergang von einem stabilen Fixpunkt für  $\lambda = 0$  zu zwei stabilen und einem unstabilen für  $\lambda > 0$ , findet also auf der Zentrums-mannigfaltigkeit statt, wie auch aus der allgemeinen Theorie folgt.

### 3 Diskrete Invarianten dynamischer Systeme:

#### Die Theorien von Conley und Floer

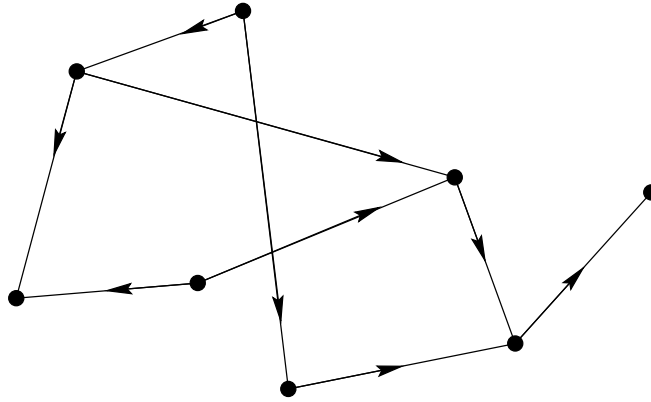
Der grundlegende Gedanke dieses Kapitels ist, einem dynamischen System diskrete topologische Invarianten zuzuordnen, um qualitative Unterschiede zwischen Systemen in unterschiedlichen Werten dieser Invarianten widerzuspiegeln, um also dynamische Systeme klassifizieren und unterscheiden zu können. Das Ideal, daß nämlich diese Invarianten stets zwischen nichtisomorphen Systemen unterscheiden können, läßt sich zwar nicht vollständig erreichen, aber die in diesem Kapitel vorgestellten Invarianten ermöglichen es trotzdem, sehr subtile Unterschiede festzustellen.

Natürlich ist die Theorie an bestimmte Voraussetzungen gebunden, und sie funktioniert am besten für dynamische Systeme auf kompakten Zustandsräumen. Der Grundgedanke ist klar ausgeführt in der Theorie von Morse über Gradientenflüsse auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und die Theorien von Conley und Floer stellen wesentliche Verallgemeinerungen und Verfeinerungen dieses Ansatzes dar.

#### 3.1 Die Topologie von Graphen

In diesem Abschnitt wollen wir an einem elementaren Beispiel einige wichtige Gedanken erläutern.

$\Gamma$  sei ein Graph, bestehend aus einer Menge  $V$  von Knoten und einer Menge  $E$  von Kanten. Die Kanten seien gerichtet, so daß wir in jedem Knoten die auswärts gerichteten von den einwärts gerichteten Kanten unterscheiden können.



Die **Eulercharakteristik** von  $\Gamma$  ist definiert als

$$\chi(\Gamma) := \#V - \#E,$$

also als Anzahl der Knoten minus Anzahl der Kanten.

Ein Knoten  $v$  heißt **kritisch**, wenn die Anzahl der auswärts gerichteten Kanten in  $v$  verschieden von 1 ist.

Der **Index** eines kritischen  $v$  ist definiert als

$$i(v) := \begin{cases} 0, & \text{falls es keine auswärts gerichtete Kante gibt} \\ 1, & \text{falls es mehr als eine solche Kante gibt} \end{cases}$$

Schließlich definieren wir noch die **Vielfachheit** eines kritischen  $v$  mit  $i(v) = 1$  als

$$m(v) := \text{Anzahl der auswärts gerichteten Kanten minus 1.}$$

Dann gilt:

**Satz.**

$$\chi(\Gamma) = m_0 - m_1,$$

mit

$$m_0 := \#\{v \text{ kritisch}, i(v) = 0\}$$

$$m_1 := \sum_{\substack{v \text{ krit.} \\ i(v)=1}} m(v)$$

(falls die Vielfachheit  $m(v) = 1$  für alle kritischen  $v$  mit  $i(v) = 1$ , so ist  $m_1 = \#\{v \text{ kritisch}, i(v) = 1\}$ ).

Der entscheidende Gehalt dieses leicht zu beweisenden Satzes ist, daß sich die Berechnung einer globalen topologischen Invarianten von  $\Gamma$ , nämlich der Eulercharakteristik, auf die Bestimmung lokaler Größen in bestimmten Knoten, nämlich den kritischen, reduzieren läßt. Dies ist auch das wesentliche Prinzip in den Theorien von Morse und Floer.

### 3.2 Floerhomologie

$X$  sei eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit,

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion.

$x_0 \in X$  heißt **kritischer Punkt** für  $f$ , falls der Vektor der ersten Ableitungen von  $f$  in  $x_0$  verschwindet,

$$Df(x_0) = 0.$$

In einem kritischen Punkt  $x_0$  läßt sich die Matrix der zweiten Ableitungen  $D^2f(x_0)$  unabhängig von der Wahl lokaler Koordinaten definieren, und  $x_0$  heißt **nichtausgeartet**, falls kein Eigenwert von  $D^2f(x_0)$  verschwindet.

In diesem Fall ist der **Index** von  $x_0$  definiert als

$$i(x_0) := \text{Anzahl der negativen Eigenwerte von } D^2f(x_0).$$

Wir machen nun die folgenden Annahmen:

1. Kein kritischer Punkt von  $f$  ist ausgeartet.
2. Der Raum der Flußlinien für den negativen Gradientenfluß, d.h. der Lösungskurven von

$$\dot{x}(t) = -Df(x(t)) \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = p, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = q,$$

zwischen den beiden kritischen Punkten  $p$  und  $q$  ist entweder leer oder hat die Dimension

$$i(p) - i(q).$$

(Es läßt sich zeigen, daß diese Bedingungen für generische glatte Funktionen  $f$  erfüllt sind.)  
Diese Annahmen haben zur Folge, daß keine Flußlinien zwischen kritischen Punkten von gleichem Index existieren, während im Falle

$$i(p) = i(q) + 1$$

die Anzahl der Flußlinien von  $p$  nach  $q$  endlich ist (da jede Flußlinie selbst eindimensional ist, hat der Raum der Flußlinien dann die Dimension 1).

In diesem letzteren Fall setzen wir

$$\rho(p, q) := (\text{Anzahl der Flußlinien von } p \text{ nach } q) \bmod 2$$

$\rho(p, q)$  ist also 1, wenn es eine ungerade Anzahl von Flußlinien von  $p$  nach  $q$  gibt, und 0 sonst.

Wir definieren nun einen **Randoperator**  $\partial$ :

Für einen kritischen Punkt  $p$  vom Index  $i(p) = i$  sei

$$\partial_i p := \sum_{\substack{q \text{ kritisch} \\ i(q) = i(p) - 1}} \rho(p, q) q$$

(wir summieren hier in dem von den kritischen Punkten von  $f$  erzeugten Vektorraum mit  $\mathbb{Z}_2$ -Koeffizienten; d.h. es ist z. B.

$$\begin{aligned} (a_1 q_1 + a_2 q_2) + (b_1 q_1 + b_2 q_2) & \quad (q_1, q_2 \text{ kritische Punkte,} \\ & \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}_2) \\ = (a_1 + b_1) q_1 + (a_2 + b_2) q_2 & \quad , \end{aligned}$$

wobei hier die Summe in den Klammern in dem Körper  $\mathbb{Z}_2$  stattfindet (d.h. es wird mod 2 addiert), während die Summe zwischen den Klammern formal ist).

Es werden also die Flußlinien von  $p$  zu kritischen Punkten  $q$  mit  $i(q) = i(p) - 1$  gezählt (mod 2).

Dann gilt



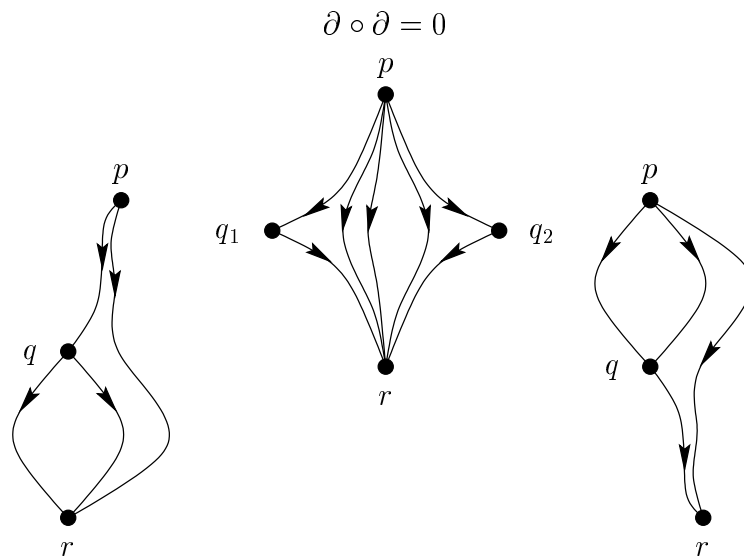
**Satz.** (Floer)  $\partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$  für alle  $i$ .

Erläuterung:

$$\begin{aligned} (\partial_{i-1} \circ \partial_i)p &= \partial_{i-1}(\partial_i p) \\ &= \partial_{i-1} \left( \sum_{i(q)=i(p)-1} \rho(p, q)q \right) \\ &= \sum_{i(q)=i(p)-1} \rho(p, q) \left( \sum_{i(r)=i(p)-1} \rho(q, r)r \right). \end{aligned}$$

Die Aussage des Satzes ist also, daß diejenigen Flußlinien von  $p$  nach  $r$ , für  $i(r) = i(p) - 2$ , die durch einen anderen kritischen Punkt  $q$  hindurchlaufen, stets paarweise auftreten, also

$$\sum_q \rho(p, q)\rho(q, r) = 0 \pmod{2} \text{ für alle } p \text{ und } r.$$



Auf der Grundlage dieses Satzes lassen sich nun **Homologiegruppen** definieren:  
Es ist

$$\begin{aligned} \ker \partial_i &= \{ \sum a_\nu p_\nu : i(p_\nu) = i, a_\nu \in \mathbb{Z}_2 \} \\ &\text{mit } \partial(\sum a_\nu p_\nu) = 0 \\ & (= \sum a_\nu \partial p_\nu, \partial \text{ ist linear erweitert worden) } \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{im } \partial_i &= \{ q \text{ mit } i(q) = i - 1, \text{ die sich schreiben} \\ &\text{lassen als } q = \partial(\sum a_\nu p_\nu) \} \end{aligned}$$

$\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$  impliziert dann

$$\text{im } \partial_{i+1} \subset \ker \partial_i$$

(falls  $p$  der Rand von etwas anderem ist, so ist sein eigener Rand 0).

**Definition.** Die  $i$ -te Homologiegruppe von  $X$  ist definiert als

$$H_i(X, \mathbb{Z}_2) := \ker \partial_i / \text{im } \partial_{i+1}$$

(alle Ränder werden also zu Null gesetzt).

**Satz.** Die Gruppen  $H_i(X, \mathbb{Z}_2)$  hängen nicht von der Wahl der Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ab (welche aber die obigen Annahmen 1. und 2. erfüllen muß) und definieren daher topologische Invarianten der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $X$ .

Die  $i$ -te **Bettizahl** von  $X$  ist definiert als

$$b_i(X) := \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2),$$

und die **Eulercharakteristik** ist

$$\chi(X) := \sum_i (-1)^i b_i(X),$$

also die Wechselsumme der Bettizahlen.

Natürlich läßt sich die Eulercharakteristik auch rein topologisch definieren, beispielsweise mit Hilfe einer Triangulierung, und es gilt dann der Satz, daß diese Definition zum gleichen Ergebnis wie die obige führt. Wie bei der Eulercharakteristik eines Graphen sehen wir, daß sie sich aus lokalen Größen berechnen läßt, hier Beziehungen zwischen kritischen Punkten der Indexdifferenz 1. Streng gesprochen sind diese Größen nicht wirklich lokal, da sie zwei verschiedene Punkte miteinander in Beziehung setzen, aber es gilt auch

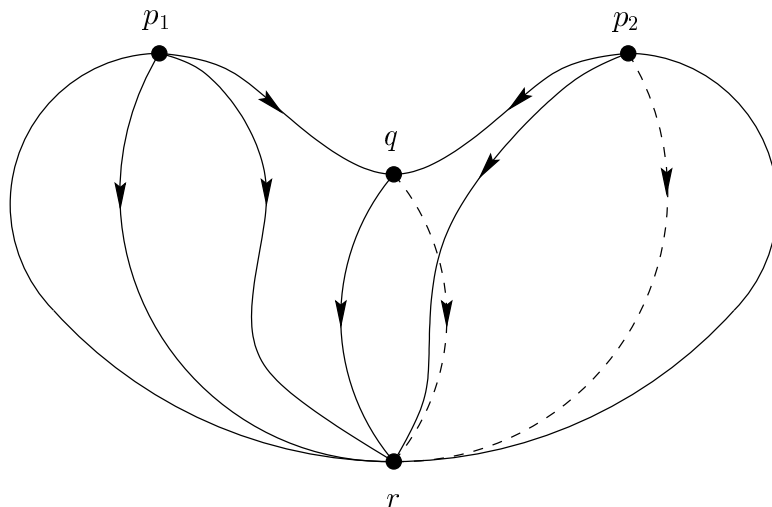
**Satz.**  $m_i$  sei die Anzahl der kritischen Punkte von  $f$  vom Index  $i$ . Dann gilt

$$m_j \geq b_j \text{ für alle } j,$$

sowie

$$\sum_j (-1)^j m_j = \chi(X).$$

Wir wollen nun einige Beispiele betrachten, in denen wir die Bettizahlen  $b_i = \dim H_i(X, \mathbb{Z}_2)$  berechnen.



$X$  diffeomorph zu  $S^2$

$$\begin{aligned} \partial p_1 &= q \\ \partial p_2 &= q \\ \Rightarrow \partial(p_1 \oplus p_2) &= 2q \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ker \partial_2 &= \{p_1 + p_2\} \\ \text{im } \partial_2 &= \{q\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial q &= 2r = 0 \\ \ker \partial_1 &= \{q\} \\ \text{im } \partial_1 &= \{0\} \\ \partial r &= 0, \ker \partial_0 = \{r\} \end{aligned}$$

$H_2(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_2$  ist 1-dimensional:

$$b_2 = 1$$

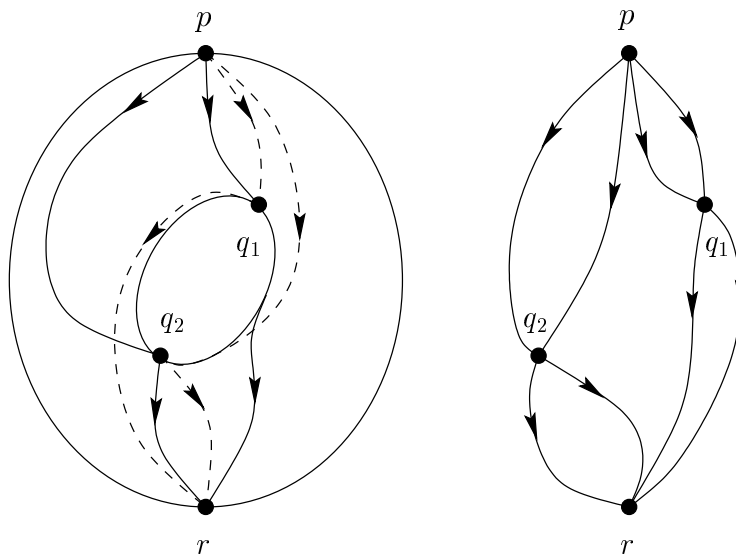
$H_1(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$  ist 0-dimensional:

$$b_1 = 0$$

$H_0(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1$  ist 1-dimensional:

$$b_0 = 1$$

$X$  Torus



$$\begin{aligned} \partial p &= 2q_1 + 2q_2 = 0 \Rightarrow \ker \partial_2 = \{p\}, \text{im } \partial_2 = \{0\} \\ \partial q_1 &= \partial q_2 = 2r = 0 \Rightarrow \ker \partial_1 = \{q_1, q_2\}, \text{im } \partial_1 = \{0\} \\ \partial r &= 0 \Rightarrow \ker \partial_0 = \{r\} \end{aligned}$$

$$H_2(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_2 \quad \text{ist 1-dim.} \Rightarrow b_2 = 1$$

$$H_1(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2 \quad \text{ist 2-dim.} \Rightarrow b_1 = 2$$

$$H_0(X, \mathbb{Z}_2) = \ker \partial_0 / \text{im } \partial_1 \quad \text{ist 1-dim.} \Rightarrow b_0 = 1$$

Wir haben den Randoperator  $\partial$ , der die kritischen Punkte einer generischen glatten Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  zueinander in Beziehung setzt, benutzt, um die Homologiegruppen  $H_i(X, \mathbb{Z}_2)$  zu definieren. Für die nachfolgende Diskussion der Theorie von Conley werden wir auch relative Homologiegruppen benötigen. Für diesen Zweck sei  $A$  eine kompakte Teilmenge der kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $X$ , und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine glatte Funktion mit der Eigenschaft, daß Flußlinien zwar in  $A$  einmünden, aber nicht aus  $A$  herauslaufen können, d.h. wenn

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -Df(x(t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \\ \text{und } x(t_0) &\in A \text{ für ein } t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \text{ ist,} \\ \text{so ist auch } x(t) &\in A \text{ für alle } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir einen Randoperator  $\partial^A$ , indem wir in den vorstehenden Konstruktionen nur diejenigen kritischen Punkte berücksichtigen, die in  $X \setminus A$  liegen, also für einen kritischen Punkt  $p \in X \setminus A$

$$\partial^A p := \sum_{\substack{q \text{ krit. Pkt. in } X \setminus A \\ i(q)=i(p)-1}} \rho(p, q) q$$

setzen. Wegen der obigen Bedingung verlaufen alle Flußlinien zwischen den auftretenden  $p$  und  $q$  ebenfalls ganz in  $X \setminus A$ . Mit Hilfe dieses Randoperators erhalten wir dann die relativen Kohomologiegruppen

$$H_i(X, A; \mathbb{Z}_2) := \ker \partial_i^A / \text{im } \partial_{i+1}^A.$$

Die Konstruktion läßt sich noch etwas verallgemeinern:

$A \subset Y \subset X$  seien kompakt, und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  erfülle:

(i) Ist für eine Flußlinie, also

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -Df(x(t)) \quad \forall t, \\ x(t_0) &\in A \text{ für ein } t_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \end{aligned}$$

so gibt es kein  $t > t_0$  mit  $x(t) \in Y \setminus A$ .

(ii) Ist für eine Flußlinie

$$x(t_1) \in Y, x(t_2) \in X \setminus Y, \text{ mit } -\infty \leq t_1 < t_2 \leq \infty,$$

so gibt es  $t_1 \leq t_0 \leq t_2$  mit

$$x(t_0) \in A.$$

Flußlinien können also einerseits nach (i) nicht wieder aus  $A$  in den Rest von  $Y$  zurücklaufen und können andererseits nach (ii) das Innere von  $Y$  nur durch  $A$  verlassen.

In dieser Situation betrachten wir für einen kritischen Punkt  $p \in Y \setminus A$

$$\partial^{Y,A} p := \sum_{\substack{q \in Y \setminus A \text{ kritisch} \\ i(q)=i(p)-1}} \rho(p, q) q$$

und definieren

$$H_i(Y, A; \mathbb{Z}_2) := \ker \partial_i^{Y,A} / \text{im } \partial_{i+1}^{Y,A}.$$

*Bemerkung.* Floerhomologie läßt sich auch mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  anstatt nur in  $\mathbb{Z}_2$  definieren. Hierzu muß man Orientierungen einführen, um den Flußlinien, die kritische Punkte der Indexdifferenz 1 miteinander verbinden, ein Vorzeichen  $\pm 1$  zuordnen zu können. Die Terme  $\rho(p, q)$  in der Definition von  $\partial$  können dann also positive und negative Werte annehmen, wenn die Flußlinien mit Vorzeichen gezählt werden. Dann läßt sich wiederum  $\partial \circ \partial = 0$  zeigen, die Grundlage für die Einführung der Homologiegruppen. Die Behandlung der Orientierungen ist jedoch nicht ganz einfach, und wir verzichten an dieser Stelle auf genauere Ausführungen und verweisen stattdessen auf Schwarz [12], Jost [7].

Für Anwendungen in der Variationsrechnung ist die folgende Beobachtung sehr nützlich: Zur Konstruktion des Randoperators  $\partial$  und damit der Homologiegruppen braucht man nicht wirklich die Indices kritischer Punkte berechnen zu können; das Einzige, was benötigt wird, ist die Indexdifferenz zwischen kritischen Punkten, um feststellen zu können, welche Flußlinien man zählen muß. Man braucht also nur einen relativen, aber keinen absoluten Index.

### 3.3 Conleytheorie: Beispiele und allgemeine Resultate

$X$  sei metrischer Raum,  $F : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  Fluß,  $x(t) := F(x, t)$ . Wir bezeichnen  $t \in \mathbb{R}$  als Zeit. Für  $y \in X$  setzen wir  $\alpha(y) := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} y((-\infty, t))$ ,  $\omega(y) := \bigcap_{t \in \mathbb{R}} y((t, \infty))$ .

Für  $N \subset X$  sei

$$I(N) := \{y \in N : y(\mathbb{R}) \subset N\}$$

die Menge derjenigen Punkte von  $N$ , die für alle positiven und negativen Zeiten in  $N$  verbleiben.  $N \subset X$  heißt invariant, falls

$$I(N) = N.$$

Eine Morsezerlegung einer kompakten invarianten Menge besteht aus endlich vielen disjunkten, kompakten, invarianten Teilmengen  $N_i$  von  $N$ ,  $i = 1, \dots, n$ , den sogenannten Morsemengen, die eine sogenannte zulässige Anordnung  $(N_1, N_2, \dots, N_n)$  zulassen, für die für alle

$$y \in N \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i$$

Indizes  $i < j$  mit

$$\alpha(y) \subset N_i, \omega(y) \subset N_j$$

existieren.

Für  $i \leq j$  sei

$$N_{ij} := \{y \in N : \alpha(y), \omega(y) \subset N_i \cup N_{i+1} \cup \dots \cup N_j\}.$$

In einer zulässigen Anordnung einer Morsezerlegung kann  $N_{ij}$  gegen  $\bigcup_{\nu=i}^j N_\nu$  ausgetauscht werden, und umgekehrt, um eine andere Morsezerlegung mit einer zulässigen Anordnung zu erhalten.

Wir betrachten in  $\mathbb{R}^2$  das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda y + x(x-1)(x-\mu) \end{aligned}$$

mit Parametern  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > 1$ .

Dieses System hat für jedes  $\lambda$  genau die Punkte  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  und  $(\mu, 0)$  als Fixpunkte. Das genauere Verhalten hängt allerdings von  $\lambda$  ab.

Die Linearisierung bei  $(0, 0)$  ist

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= \lambda\eta + \mu\xi\end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte  $\alpha_{1,2} = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \mu}$ , also einen positiven und einen negativen reellen Eigenwert. Daher ist  $(0, 0)$  für alle  $\lambda$  ein Sattelpunkt.

Die Linearisierung bei  $(1, 0)$  ist

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= \lambda\eta - (\mu - 1)\xi\end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \mu & \lambda \end{pmatrix}$$

hat Eigenwerte  $\alpha_{1,2} = \frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 1 - \mu}$ . Für  $\lambda = 0$  sind diese rein imaginär, für  $\lambda^2 \geq 4(\mu - 1)$  reell und von gleichem Vorzeichen. Daher liegt für  $\lambda^2 \geq 4(\mu - 1)$  ein Knoten (Quelle für  $\lambda \geq 2\sqrt{\mu - 1}$ , Senke für  $\lambda \leq -2\sqrt{\mu - 1}$ ) vor, für  $0 < \lambda^2 < 4(\mu - 1)$  dagegen eine Spirale. Das Verhalten für  $\lambda = 0$  bedarf noch einer genaueren Analyse, da wir schon gesehen haben, daß im Falle zweier rein imaginärer Eigenwerte ein nicht hyperbolischer Fixpunkt vorliegt und die Linearisierung ein qualitativ anderes Verhalten als das ursprüngliche System zeigen kann.

Die Linearisierung bei  $(\mu, 0)$  ist

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= \lambda\eta + \mu(\mu - 1)\xi\end{aligned}$$

mit analogem Verhalten wie bei  $(0, 0)$ . Es liegt also wiederum für alle  $\lambda$  ein Sattelpunkt vor.

Wir betrachten nun zuerst den Fall  $\lambda = 0, \mu = 2$ . In diesem Fall gibt es zwei Symmetrien, die unser System invariant lassen:

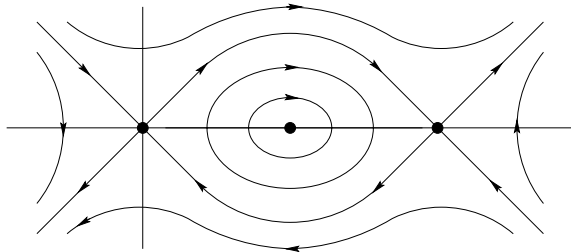
1.

$$\begin{aligned}t &\rightarrow -t \\ x &\rightarrow x \\ y &\rightarrow -y\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}t &\rightarrow -t \\ x &\rightarrow 2 - x \\ y &\rightarrow y.\end{aligned}$$

Man erkennt hieraus unschwer, daß außer in den Fixpunkten die Bahnen die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = 1$  senkrecht schneiden. Zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  und für  $x > 2$  wird die  $x$ -Achse von den Bahnen von unten nach oben durchschnitten, und

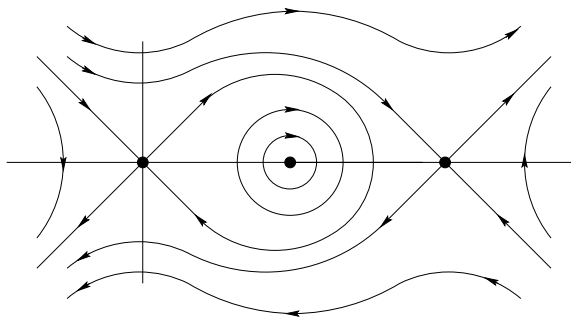


der Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse ist der Punkt minimalen  $x$ -Wertes auf der Bahn, in den anderen Bereichen ist es umgekehrt. Für  $y > 0$  wird die Gerade  $x = 1$  von den Bahnen von links nach rechts durchschnitten, und dieser Schnittpunkt ist ein lokales Maximum für die  $y$ -Koordinate, während es für  $y < 0$  sich wiederum umgekehrt verhält.

Aus diesen Tatsachen und Symmetrieargumenten erkennen wir, daß es eine Bahn oberhalb der  $x$ -Achse von dem Fixpunkt  $(0, 0)$  zu dem Fixpunkt  $(2, 0)$  gibt, und eine Bahn unterhalb der  $x$ -Achse von  $(2, 0)$  nach  $(0, 0)$ . (Bahnen, die zwei verschiedene Fixpunkte miteinander verbinden, heißen heteroklin.) Zwischen diesen beiden Bahnen verlaufen geschlossene Bahnen, die den Fixpunkt  $(1, 0)$  umlaufen. Die außerhalb liegenden Bahnen sind dagegen unbeschränkt.

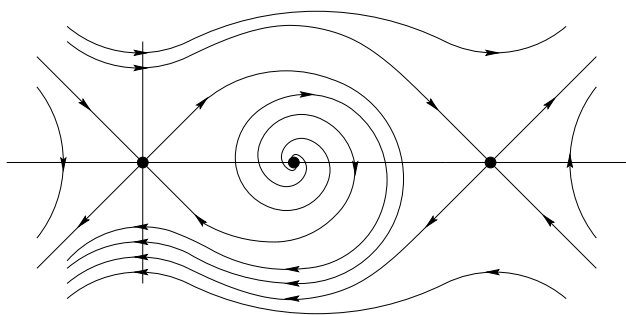
Wir wenden uns nun dem Fall  $\lambda = 0, \mu > 2$  zu. (Der Fall  $\lambda = 0, 1 < \mu < 2$ , zeigt nach Vertauschung der Rollen der Fixpunkte  $(0, 0)$  und  $(\mu, 0)$  qualitativ das gleiche Verhalten.) Die Symmetrie 1. bleibt hierbei erhalten, nicht aber die Symmetrie 2.

Aus den beiden heteroklinen Bahnen im Fall  $\mu = 2$  entsteht für  $\mu > 2$  eine homokline Bahn, die vom Fixpunkt  $(0, 0)$  ausgehend, die  $x$ -Achse zwischen  $x = 1$  und  $x = \mu$  schneidet und wieder nach  $(0, 0)$  zurückläuft. Von dieser Bahn werden wieder geschlossene Bahnen eingeschlossen, die um den Fixpunkt  $(1, 0)$  herumlaufen, was sich aus Symmetriegründen ergibt. Die anderen Bahnen sind alle unbeschränkt.

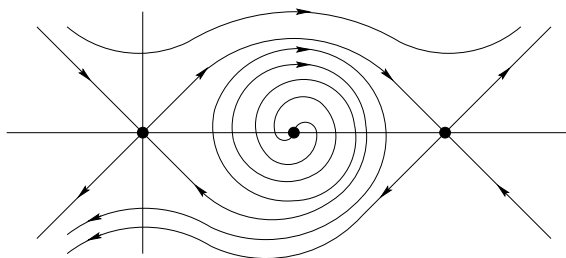


Bemerkenswert ist, daß, obwohl für  $\lambda = 0$  wie bemerkt, bei  $(1, 0)$  ein nicht hyperbolischer Fixpunkt vorliegt, das Verhalten der Bahnen in der Nähe dieses Fixpunktes qualitativ genauso wie beim linearisierten System aussieht.

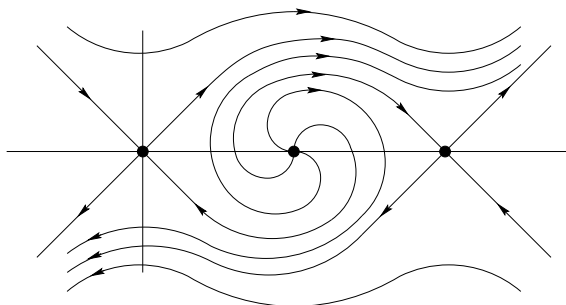
Wir gehen nun zum Fall  $\mu > 2, \lambda > 0$  über; der Fall  $\lambda < 0$  ist hierzu symmetrisch. Mit wachsendem  $\lambda$  verschiebt sich der Schnittpunkt der von  $(0, 0)$  in den ersten Quadranten auslaufenden Bahn mit der  $x$ -Achse weiter nach rechts. Außerdem geht die Symmetrie 1. verloren. Der Fixpunkt bei  $(1, 0)$  wird hyperbolisch, und zwar im Falle  $0 < \lambda < 2\sqrt{\mu - 1}$  eine Spirale. Eine dieser von  $(1, 0)$  ausgehenden Spiralkurven läuft in den Fixpunkt  $(0, 0)$ . Alle anderen Bahnen sind unbeschränkt.



Wächst  $\lambda$  nun bis zu einem kritischen Wert  $\lambda_\mu$ , so entsteht eine heterokline Bahn von  $(0, 0)$  nach  $(\mu, 0)$  zusätzlich zu der heteroklinen Bahn von  $(1, 0)$  nach  $(0, 0)$ . Alle anderen Bahnen sind wieder unbeschränkt.



Wächst  $\lambda$  weiter, so erhält man schließlich je eine heterokline Bahn von  $(1, 0)$  nach  $(0, 0)$  und nach  $(\mu, 0)$ . Alle anderen Bahnen sind wieder unbeschränkt. Im Falle  $\mu = 2$  ist dies schon die Situation für alle  $\lambda > 0$ .



Im Falle  $\lambda = 0, \mu = 2$  besteht also die maximale kompakte invariante Menge  $N$  aus den beiden heteroklinen Bahnen und der von diesen berandeten Menge, die aus periodischen Bahnen und dem Fixpunkt in der Mitte besteht. Es gibt keine nichttriviale Morsezerlegung von  $N$ .

Im Falle  $\lambda = 0, \mu > 2$  besteht ein solches  $N$  aus zwei Komponenten  $N', N''$ .  $N'$  enthält die homokline Bahn zu  $(0, 0)$  und wie vorher die eingeschlossene Menge periodischer Bahnen einschließlich des Fixpunktes  $(1, 0)$ , während  $N''$  nur den isolierten Fixpunkt  $(\mu, 0)$  enthält. Nichttriviale Morsezerlegungen wären  $N_1 = N', N_2 = N''$  oder  $N_1 = N'', N_2 = N'$ .

Im Falle  $\mu > 2, 0 < \lambda < \lambda_\mu$  besteht  $N$  aus der heteroklinen Bahn  $C$  von  $(1, 0)$  nach  $(0, 0)$  sowie



dem Punkt  $(\mu, 0)$ . Die nichttrivialen Morsezerlegungen sind:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{C\}, N_2 = \{(\mu, 0)\} \\
N_1 &= \{(\mu, 0)\}, N_2 = \{C\} \\
N_1 &= \{(\mu, 0)\}, N_2 = \{(1, 0)\}, N_3 = \{(0, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(0, 0)\}, N_3 = \{(\mu, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(\mu, 0)\}, N_3 = \{(0, 0)\} \\
N_1 &= \{(\mu, 0), (1, 0)\}, N_2 = \{(0, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(\mu, 0), (0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Im Falle  $\mu > 2, \lambda = \lambda_\mu$  besteht  $N$  aus den heteroklinen Bahnen  $C_1$  von  $(1, 0)$  nach  $(0, 0)$  und  $C_2$  von  $(0, 0)$  nach  $(\mu, 0)$ . Die nichttrivialen Morsezerlegungen sind:

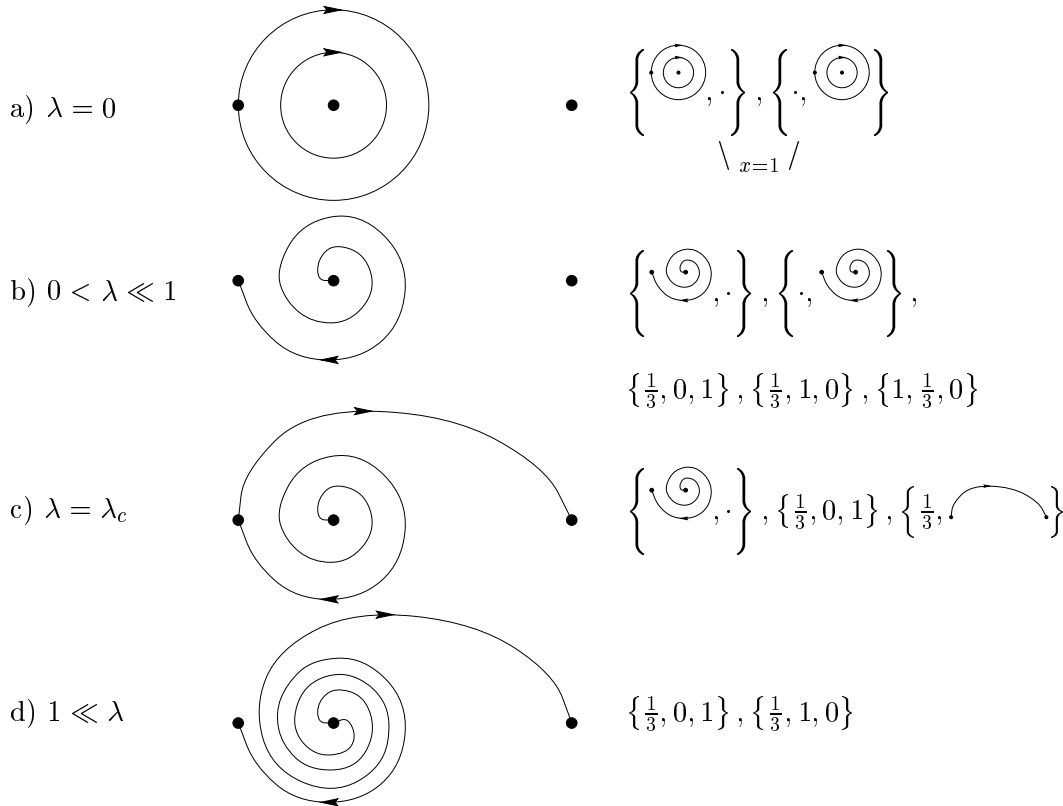
$$\begin{aligned}
N_1 &= \{C_1\}, N_2 = \{(\mu, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{C_2\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(0, 0)\}, N_3 = \{(\mu, 0)\}.
\end{aligned}$$

Im Falle  $\mu > 2, \lambda > \lambda_\mu$  schließlich besteht  $N$  aus den beiden heteroklinen Bahnen  $C_1, C_2$  von  $(1, 0)$  nach  $(0, 0)$  und  $(\mu, 0)$ . Die nichttrivialen Morsezerlegungen sind:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(0, 0)\}, N_3 = \{(\mu, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(\mu, 0)\}, N_3 = \{(0, 0)\} \\
N_1 &= \{(1, 0)\}, N_2 = \{(\mu, 0), (0, 0)\} \\
N_1 &= \{C_1\}, N_2 = \{(\mu, 0)\} \\
N_1 &= \{(0, 0)\}, N_2 = \{C_2\}.
\end{aligned}$$

Morsezerlegungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda y - x\left(x - \frac{1}{3}\right)(1-x) \end{aligned}$$



Eine kompakte Menge  $N \subset X$  heißt **isolierende Umgebung**, und  $I \subset N$  heißt **isolierte invariante Menge**, falls

$$I(N) \subset \overset{\circ}{N} \quad (= \text{Inneres von } N) .$$

Anders ausgedrückt ist  $S \subset X$  eine isolierte invariante Menge, falls es invariant ist und eine offene Umgebung besitzt, deren Abschluß außer  $S$  keine weiteren invarianten Mengen enthält. Ein Paar  $(M_0, M_1)$  kompakter Mengen mit  $M_1 \subset M_0$  heißt **Indexpaar** für die isolierte invariante Menge  $S$ , falls

- (i)  $\overline{M_0 \setminus M_1}$  ist isolierende Umgebung von  $S$  mit  $M_1 \cap S = \emptyset$ .
- (ii) Falls  $y \in M_1, y([0, t]) \subset M_0$ , so ist  $y([0, t]) \subset M_1$ .
- (iii) Falls  $y \in M_0$  und  $y(t) \notin M_0$  für ein  $t > 0$ , so existiert  $0 \leq t_0 < t$  mit  $y([0, t_0]) \subset M_0, y(t_0) \in M_1$ .

$M_1$  ist die **Austrittsmenge** aus  $M_0$  für den Fluß. (ii) bedeutet, daß der Fluß nicht aus  $M_1$  nach  $M_0$  zurückkehren kann, und (iii), daß, falls eine Flußlinie  $M_0$  verläßt, sie durch  $M_1$  hindurchführen muß.

**Satz.**  $S$  sei eine isolierte invariante Menge,  $(N_1, \dots, N_n)$  eine zulässige Anordnung einer Morsezerlegung von  $S$ . Dann gibt es eine **Morsefiltrierung**, d.h. kompakte Mengen

$$M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$$

derart, daß für  $i \leq j$

$$(M_{i-1}, M_j)$$

stets ein Indexpaar für  $N_{ij}$  ist.

Insbesondere ist  $(M_0, M_n)$  ein Indexpaar für  $S$ , und  $(M_{i-1}, M_i)$  ist ein Indexpaar für  $N_i$ .

**Satz.** Falls  $(M_0, M_1), (M'_0, M'_1)$  Indexpaare für die gleiche isolierte invariante Menge  $S$  sind, so sind  $M_0/M_1$  und  $M'_0/M'_1$  homotopieäquivalent.

**Definition.** Der **Conleyindex** der isolierten invarianten Menge  $S$  ist definiert als der Homotopietyp  $[M_0/M_1]$ , wobei  $(M_0, M_1)$  ein beliebiges Indexpaar für  $S$  ist.

**Satz.**  $M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$  sei eine Morsefiltrierung für die isolierte invariante Menge  $S$ . Dann gilt für die relativen Bettizahlen  $b_\nu(M_{j-1}, M_j)$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\nu} b_\nu(M_{j-1}, M_j) t^\nu = \sum_{\nu} b_\nu(M_0, M_n) t^\nu + (1+t)Q(t)$$

als Potenzreihe in der Unbestimmten  $t$ , wobei  $Q(t)$  ein Polynom mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten ist.

**Satz.**  $I_1, I_2$  seien disjunkte isolierte invariante Mengen.

Dann ist  $I_1 \amalg I_2$  eine isolierte invariante Menge, und es gilt

$$h(I_1 \amalg I_2) = h(I_1) \vee h(I_2).$$

### 3.4 Einige topologische Begriffe

Die nachfolgende kurze Zusammenfassung dient insbesondere dem nächsten Abschnitt.

Wir betrachten Paare  $(X, A)$ ,  $A \subset X$  abgeschlossen, und setzen zur Abkürzung  $X = (X, \emptyset)$ .

$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  sei stetig mit  $f(A) \subset B$ .

Wir definieren die Homotopieäquivalenz:

$$\begin{aligned} f_0 \sim f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B) &: \Leftrightarrow \exists F : (X, A) \times I \rightarrow (Y, B) \quad (I = [0, 1]) \\ &\text{mit } F(x, t) = f_t(x) \text{ für } t = 0, 1 \\ (X, A) \sim (Y, B) &: \Leftrightarrow \exists f : (X, A) \rightarrow (Y, B), g : (Y, B) \rightarrow (X, A) \\ &\text{mit } f \circ g \sim id_Y, g \circ f \sim id_X. \end{aligned}$$

$(X, x_0)$  ( $x_0 \in X$ ) heißt punktierter Raum. Aus  $(X, A)$  erhält man den punktierten Raum  $X/A$ , indem man alle  $x \in A$  zu einem Punkt identifiziert.

$$\begin{aligned} (x \approx y &: \Leftrightarrow x = y \text{ oder } x, y \in A, [A] = \text{Äquivalenzklasse eines } x \in A, \\ X/A &= (X/\approx, [A]) \\ X/\emptyset &= (X \amalg p, p), p \notin X. \end{aligned}$$

$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  induziert  $[f] : X/A \rightarrow Y/B$  durch  $[f][x] := [f(x)]$ .

$(X, A) \sim (Y, B) \Rightarrow X/A \sim Y/B$ .

$X/A$  steht i.F. für die Homotopieklasse von  $X/A$

$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := X \amalg Y / \{x_0, y_0\}$  (Zusammenkleben in den ausgezeichneten Punkten  $x_0, y_0$ ).

$\bar{0} := x/x, x$  Punkt.

$A \subset X$  heißt starker Deformationsretrakt von  $X$ , falls es eine stetige Funktion  $r : X \times [0, 1] \rightarrow X$  gibt mit

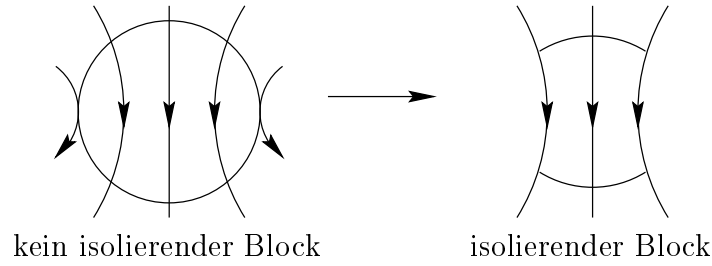
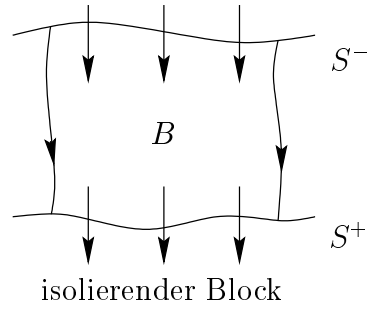
$$\begin{aligned} r(x, t) &= x \quad \forall x \in A \\ r(x, 1) &\in A \quad \forall x \in X \\ r(x, 0) &= x \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

### 3.5 Der Conleyindex

In diesem Abschnitt wollen wir einige technische Aspekte des Conleyindex besprechen, und auf diese Weise können wir auch unser Instrumentarium zur Behandlung von Beispielen erweitern. Wir wollen spezielle isolierende Mengen konstruieren, die sog. isolierenden Blöcke.

**Definition.**  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  sei Fluß.  $S \subset X$  heißt lokaler Schnitt, falls für ein  $\delta > 0$   $(x, t) \mapsto f(x, t) =: x(t)$  ein Homöomorphismus von  $S \times (-\delta, \delta)$  mit offenem Bild in  $X$  ist. Eine abgeschlossene Menge  $B \subset X$  mit nichtleerem Inneren heißt isolierender Block für  $f$ , falls es disjunkte lokale Schnitte  $S^\pm$  gibt, derart, daß

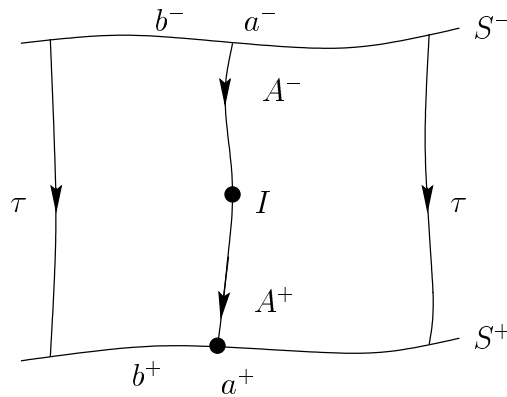
- (i)  $(\overline{S^\pm} \setminus S^\pm) \cap B = \emptyset$
- (ii)  $f(S^- \times (-\delta, \delta)) \cap B = f(S^- \times [0, \delta)) \cap B$
- (iii)  $f(S^+ \times (-\delta, \delta)) \cap B = f(S^+ \times (-\delta, 0]) \cap B$
- (iv) Für jedes  $x \in \partial B \setminus (S^+ \cup S^-)$  ex.  $\varepsilon^\pm > 0$  mit  $f(x, [-\varepsilon^-, \varepsilon^+]) \subset \partial B$ ,  $f(x, -\varepsilon^-) \in S^-$ ,  $f(x, \varepsilon^+) \in S^+$



$B$  sei isolierender Block. Wir setzen

$$\begin{aligned}
 b &:= \partial B \\
 b^\pm &:= B \cap S^\pm \subset b \\
 \tau &:= \overline{b \setminus (b^+ \cup b^-)} \\
 A^+ &:= \{x \in B, f(x, t) \in B \quad \forall t \leq 0\} \\
 A^- &:= \{x \in B, f(x, t) \in B \quad \forall t \geq 0\} \\
 I &:= A^+ \cap A^- \\
 A &:= A^+ \cup A^- \\
 a^\pm &:= A^\pm \cap b \subset b^\pm.
 \end{aligned}$$

**Lemma.**  $b, b^\pm, A^\pm, A, a^\pm, \tau, I$  sind abgeschlossen,  $a^\pm$  liegt im Innern von  $b^\pm$  bzgl. d. Top. v.  $S^\pm$ ,  $I$  liegt im Innern von  $B$ .  $I$  ist eine maximale isolierte invariante Menge in der isolierenden Umgebung  $B$ .



$b^+$  ist starker Deformationsretrakt von  $B \setminus A^-$ ,  $b^-$  von  $B \setminus A^+$ ,  $b^+ \setminus a^+$  ist homöomorph zu  $b^- \setminus a^-$ .  
Setzt man

$$\pi(x) := \sup\{t \geq 0 : f(x, [0, t]) \cap S^+ = \emptyset\},$$

so definiert

$$r : B \setminus A \times [0, 1] \rightarrow B \setminus A^-$$

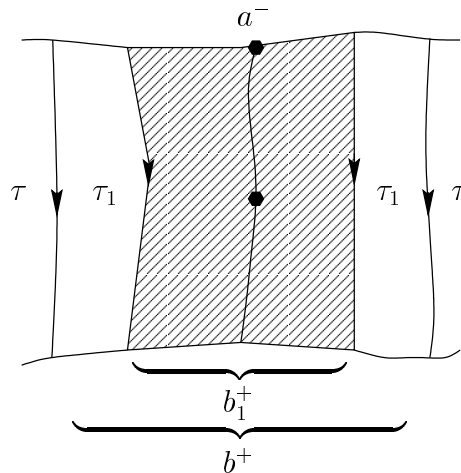
$$(x, t) \mapsto f(x, \pi(x)t)$$

starke Deformationsretraktion von  $B \setminus A^-$  auf  $b^+$ , und  $r(\cdot, 1)$  bildet  $b^- \setminus a^-$  homöomorph auf  $b^+ \setminus a^+$  ab.

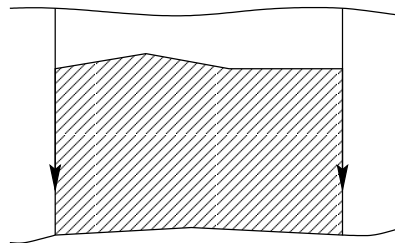
**Satz.** Jede Umgebung einer isolierten invarianten Menge enthält einen isolierenden Block für diese Menge.

Isolierende Blöcke können durch die folgenden beiden Prozesse verkleinert werden:

- (1)  $U$  sei offene Umgebung von  $a^-$  in  $b^-$ ,  $Y := b^- \setminus \overline{U}$ . Für  $y \in B$  sei  $0(y, B) :=$  Komponente von  $f(y, \mathbb{R}) \cap B$ , die  $y$  enthält,  $B_1 := B \setminus \bigcup_{y \in Y} 0(y, B)$  ist dann ebenfalls isolierender Block, mit  $b_1^- \subset \overline{U}$ .



- (2) Es sei  $T < \inf_{x \in B} \{|0(x, B)| \mid ( := \text{Länge des max. Intervalls } I \subset \mathbb{R} \text{ mit } 0 \in I, f(x, I) \subset B)\}$ ,  
 $B_2 := B \setminus f(b^-, [0, T))$



**Lemma.**  $B_1, B_2$  seien isolierende Blöcke für  $T$ .

Dann ist  $B_1/b_1^+ \sim B_2/b_2^+$ .

↑

Homotopieäquivalenz

**Definition.** Conleyindex von  $I := [B/b^+]$  (Homotopieklasse von  $B/b^+$ ,  $B$  isolierende Umgebung von  $I$ ).

**Satz.**  $I_1, I_2$  seien disjunkte isolierte invariante Mengen  
 $\Rightarrow I := I_1 \amalg I_2$  isolierte invariante Menge,  
 $h(I_1 \amalg I_2) = h(I_1) \vee h(I_2)$ .

**Satz.**  $N$  sei isolierende Umgebung der isolierten invarianten Menge  $I$ .  
Gilt  $h(I) \neq \bar{0}$ , so ist  $I \neq \emptyset$ , d.h.  $N$  enthält eine vollständige Bahn des Flusses.

*Beweis.*  $h(\emptyset) = \bar{0}$ .

**Satz.**  $B$  isolierender Block  $\Rightarrow (B, b^+)$  Indexpaar.

**Satz.**  $(M_0, M_1)$  und  $(M'_0, M'_1)$  seien Indexpaare für die isolierte invariante Menge  $I$ . Dann ist  $M_0/M_1 \sim M'_0/M'_1$ .

**Korollar.**  $H^*(M_0, M_1) \cong H^*(M'_0, M'_1)$ .

$Z \subset Y \subset X$  seien kompakte Räume. Dann gibt es die lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, Y) \rightarrow H^0(X, Z) \rightarrow H^0(Y, Z) \\ \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, Y) \rightarrow H^1(X, Z) \rightarrow H^1(Y, Z) \\ \xrightarrow{\delta^1} H^2(X, Y) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Alle Kohomologengruppen seien endlich erzeugt. Wir setzen

$$\begin{aligned} b^j(X, Y) &:= \text{rk } H^j(X, Y) \\ \nu^j(X, Y, Z) &:= \text{rk (Bild } \delta^j) \end{aligned}$$

**Lemma.**  $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{a_1} A_2 \xrightarrow{a_2} A_3 \rightarrow \dots$  sei exakte Sequenz von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen.

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{rk } A_1 - \text{rk } A_2 + \text{rk } A_3 - \dots - (-1)^k \text{rk } A + (-1)^k \text{rk (Bild } \delta^k) = 0$$

*Beweis.*  $\ell : V \rightarrow W$  linear  $\Rightarrow \text{rk } V = \text{rk (ker } \ell) + \text{rk (Bild } \ell)$ .

Exaktheit  $\Rightarrow \text{rk (ker } a_j) = \text{rk (Bild } a_{j-1})$

$\Rightarrow \text{rk } A_j = \text{rk (Bild } a_{j-1}) + \text{rk (Bild } a_j)$

mit  $\text{rk } A_1 = \text{rk (Bild } a_1)$  folgt Beh.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{Lemma}} \sum_{j=0}^m (-1)^j (b^j(X, Y) - b^j(X, Z) + b^j(Y, Z)) - (-1)^m \nu^m(X, Y, Z) = 0 \\ \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{m-1} \nu^{m-1}(X, Y, Z) \\ &= (-1)^m \nu^m(X, Y, Z) - (-1)^m b^m(X, Y) \quad (*) \\ &+ (-1)^m b^m(X, Z) - (-1)^m b^m(Y, Z) \end{aligned}$$

$$P(t, X, Y) := \sum_{m \geq 0} b^m(X, Y) t^m$$

$$Q(t, X, Y, Z) := \sum_{m \geq 0} \nu^m(X, Y, Z) t^m$$

Multiplikation von (\*) mit  $(-1)^m t^m$  u. Summation:

$$\Rightarrow Q(t, X, Y, Z) = -tQ(t, X, Y, Z) + P(t, X, Y) - P(t, Y, Z) + P(t, Y, Z) (**)$$

**Satz.**  $M_n \subset M_{n-1} \subset \dots \subset M_1 \subset M_0$  sei Filtrierung von  $M_0$ , z.B. Morsefiltrierung der Morsezerlegung  $(N_1, \dots, N_n)$  der isolierten invarianten Menge  $I$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n P(t, M_{j-1}, M_j) = P(t, M_0, M_n) + (1+t)Q(t)$$

$$\text{mit } Q(t) = \sum_{j=1}^{n-1} Q(t, M_{j-1}, M_j, M_n)$$

(Polynom in  $t$  mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten)

*Beweis.* (\*\*) für  $M_{j-1} \supset M_j \supset M_n, j = 1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow P(t, M_{j-1}, M_j) + P(t, M_j, M_n) = P(t, M_{j-1}, M_n) + (1+t)Q(t, M_{j-1}, M_j, M_n).$$

Summation über  $j$  ergibt die Behauptung. □

Wir setzen nun

$$P(t, h(I)) := P(t, M_0, M_1),$$

falls  $(M_0, M_1)$  Indexpaar für die isolierte invariante Menge  $I$  ist.

**Korollar.**  $I$  isolierte invariante Menge,  $(N_1, \dots, N_n)$  zulässige Anordnung einer Morsezerlegung von  $I$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n P(t, h(N_j)) = P(t, h(I)) + (1+t)Q(t),$$

$Q(t)$  Polynom mit Koeffizienten aus  $\mathbb{N}^0$ .

$\dot{x} = -\nabla f(x)$ ,  $f$  habe nur isolierte kritische Punkte  $p_1, \dots, p_n$  auf der kompakten Mf.  $M$ .

$N_i = \{p_i\}$  bilden Morsezerlegung (noch nicht notwendig in zulässiger Anordnung):

Für  $x \in M$  ist entweder  $x(t) \equiv x$  oder  $f(x(t)) < f(x)$  für  $t > 0$ . Im ersten Fall ist  $f$  konstant auf  $\alpha(x), \omega(x)$  und  $\alpha(x), \omega(x)$  erfüllen dann  $\nabla f(y) = 0$ .

Also ist entweder  $\nabla f(x) = 0$  oder  $f(\omega(x)) < f(\alpha(x))$ .

Eine derartige Anordnung, daß  $f(p_i) \leq f(p_j)$  für  $i > j$ , ist zulässig.

Nach dem Morselemma ist der Fluß in der Umgebung eines nicht entarteten kritischen Punktes in lokalen Koordinaten  $x \in \mathbb{R}^d$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_- &= A_- x_- + g_-(x) \\ \dot{x}_+ &= A_+ x_+ + g_+(x) \\ \text{mit } g_{\pm}(0) &= g'_{\pm}(0) = 0 \\ |g_{\pm}|, |g'_{\pm}| &\leq \delta \end{aligned}$$



für  $|x| \leq 2$ , wobei  $\delta$  beliebig klein bei geeigneter Koordinatenwahl ist, und es ist für

$$\begin{aligned} x &= (x_-, x_+) \in \mathbb{R}^{d^-} \times \mathbb{R}^{d^+} = \mathbb{R}^d \\ \langle x_-, A_- x_- \rangle &\leq -\lambda |x_-|^2 \\ \langle x_+, A_+ x_+ \rangle &\geq \lambda |x_+|^2 \text{ für ein } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Es sei  $Q := \{x \in \mathbb{R}^d : |x_\pm| \leq 1\}$ .

Für  $x \in \partial Q \Rightarrow |x_-| = 1$  oder  $|x_+| = 1$ .

Für  $x \in Q, |x_-| \leq |x_+| \Rightarrow \frac{d}{dt}|x_-|^2 = 2\langle x_-, A_- x_- + g_-(x) \rangle \leq -\lambda |x_-|^2$

für  $4\delta \leq \lambda$ .

Für  $x \in Q, |x_+| \leq |x_-| \Rightarrow \frac{d}{dt}|x_+|^2 \geq \lambda |x_+|^2$ .

$M_0 = Q, M_1 = \{x \in Q, |x_+| = 1\}$  bildet daher Indexpaar,

und es ist  $P(t, h(p_i)) = t^{d_i^-}$

sowie  $(M_0, M_1) \sim (D^{d_i^-}, \partial D^{d_i^-})$ .

$(M, \emptyset)$  ist Indexpaar für  $M$ , und es folgt aus der allgemeinen Theorie mit

$$\begin{aligned} P(t, h(M)) &= \sum_{j=0}^d b_j(M) t^j \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n t^{d_i^-} = \sum_{j=0}^d b_j(M) t^j + (1+t)Q(t) \\ &\Rightarrow m_j := \#\{\text{krit. Punkte } p_i \text{ mit } d_i^- = j\} \geq b_j(M). \end{aligned}$$

*Bemerkung.*  $X$  sei kompakt,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir setzen

$X^\mu := \{x \in X : \varphi(x) \leq \mu\}$  für  $\mu \in \mathbb{R}$ ,

$\mu_0 := \max_{x \in X} \varphi(x) > \mu_1 > \dots > \mu_n$  für reelle Zahlen  $\mu_0, \dots, \mu_n$ ,

$M_i := X^{\mu_i}$  ( $M_i = \emptyset$  für  $\mu_i < \min_{x \in X} \varphi(x)$ ).

Dann ist  $X = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_n$  Filtrierung von  $X$  durch Subniveaumengen von  $\varphi$ .

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{m \geq 0} b^m(M_{j-1}, M_j) t^m = \sum_{m \geq 0} b^m(M_0, M_n) t^m + (1+t)Q(t)$$

Dies ist eine Lokalisierung im Bilde. Um auch im Urbild  $X$  zu lokalisieren, wie z.B. in der Morsetheorie, benutzt man einen Fluß. Allerdings läßt sich auch ohne Zuhilfenahme eines Flusses definieren, was ein kritischer Punkt einer stetigen Funktion  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist, und sogar eine Art von Index eines solchen kritischen Punktes.

$x_0 \in X$  ist nicht kritisch für  $\varphi$  genau dann, wenn eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $X$  existiert mit einer stetigen Abbildung

$$\Phi : U \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi(\Phi(x, t)) &\text{ monoton fallend in } t \in [0, 1] \text{ für alle } x \in U \\ \varphi(\Phi(x, 1)) &< \varphi(x_0) \text{ für alle } x \in U. \end{aligned}$$

Um den Index eines kritischen Punktes  $x_0$  von  $\varphi$  zu definieren, setzen wir

$$X^-(x_0) := \{x \in X : \varphi(x) < \varphi(x_0)\}.$$

Der Index ist dann der Homotopietyp von

$$(X^-(x_0) \cup \{x_0\}) / X^-(x_0).$$

### 3.6 Kohomologischer Conleyindex

$I$  isolierte invariante Menge,  $(M_0, M_1)$  Indexpaar

$CH^*(I) := H^*(M_0, M_1)$  (Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}_2$ )

Beispiele:

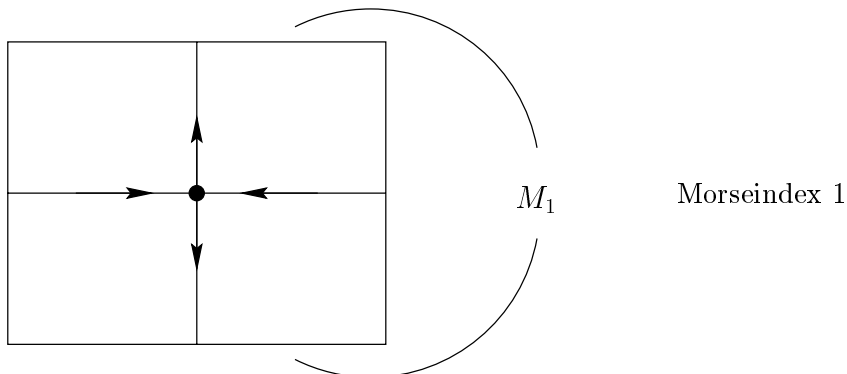
1.  $I = \emptyset \Rightarrow CH^*(\emptyset) = 0$

2.  $I$  hyperbolischer Fixpunkt mit instabiler Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$

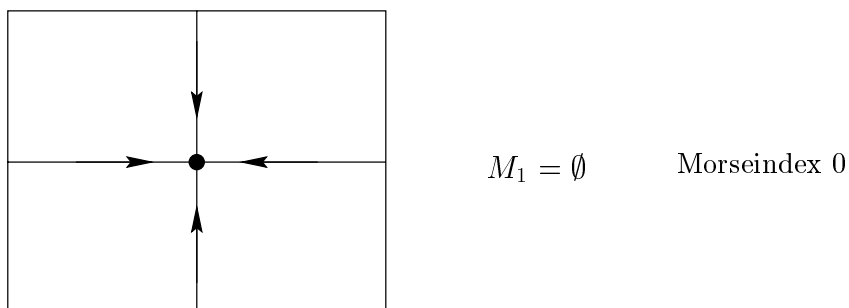
$$\Rightarrow CH^k(I) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Satz.** (McCord)  $CH^*(\text{Inv}(N)) = \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Inv}(N)$  enthält Fixpunkt.

2a)  $n = 1$ :

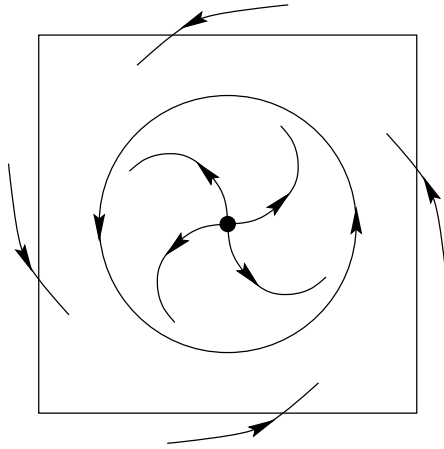


2b)  $n = 0$



aber

3.



$$CH^k(I) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gleicher Conleyindex wie in 2b), aber anderer Index des Fixpunktes

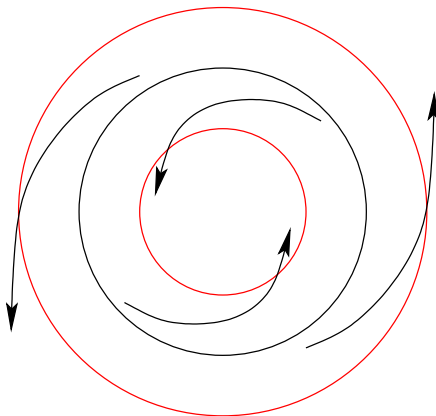
anziehende periodische Bahn und hyperbolischer Fixpunkt von Index 2

In diesem Falle ist eine feinere Aufspaltung möglich:

$$I_1 = \text{periodische Bahn} : CH^*(I_1) = H^*(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$I_2 = \text{Fixpunkt} : CH^*(I_2) = H^*(S^2, \text{Pkt.}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. instabile periodische Bahn:



rot:  $M_1$

$$CH^k(I) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1, 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5.  $I$  sei invariante Menge, welche normal hyperbolisch für einen differenzierbaren Fluß  $f$  ist, d.h. die Linearisierung habe keinen zu  $I$  transversalen Eigenvektor zu einem Eigenwert mit Realteil 0. Die lokale instabile Mannigfaltigkeit ist dann homotop zu einem Vektorbündel. Dieses sei vom Rang  $n$  und orientierbar. Dann gilt nach dem Isomorphiesatz von Thom:

$$CH^k(I) = H^{k-n}(I)$$

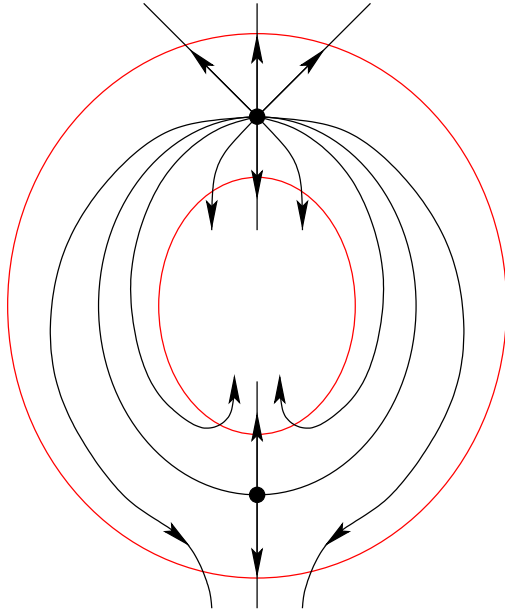
**Korollar.**  $I$  sei hyperbolische periodische Bahn mit einer orientierten instabilen Mf. der Dimension  $n + 1$ . Dann ist

$$CH^k(I) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = n, n + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies umfaßt die periodischen Bahnen in den Beispielen 3., 4.

6. Umgekehrt impliziert jedoch ein Conleyindex wie im Korollar noch nicht die Existenz einer periodischen Bahn:

Beispiel:



rot:  $M_1$ :

2 Fixpunkte (Index 2 bzw. 1) mit 2 heteroklinen Bahnen

7. hyperbolische periodische Bahn mit zweidimensionaler lokaler instabiler Mannigfaltigkeit, welche homöomorph zu einem Möbiusband, also nicht orientierbar ist.

Durch Zusammenziehen des Randes eines Möbiusbandes zu einem Punkt erhält man  $(\mathbb{RP}^2, \text{Pkt.})$

$$CH^k(I, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{für } k = 1, 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Allgemeine Beispiele lassen sich durch den Thom-Isomorphismus mit  $\mathbb{Z}_2$ -Koeffizienten verstehen.

### 3.7 Fortsetzungseigenschaft des Conleyindex:

$f^\Lambda : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  Familie von Flüssen,

stetig in  $\lambda \in \Lambda =$  kompakter, lokal zusammenziehbarer, zusammenhängender metrischer Raum mit Metrik  $d(., .)$ .

**Lemma.**  $N$  sei isolierende Umgebung für  $f^{\lambda_0}, \lambda_0 \in \Lambda$ .

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \lambda \in \Lambda$  mit  $d(\lambda, \lambda_0) < \varepsilon : N$  isolierende Umgebung für  $f^\lambda$ .

Dies gilt nicht mehr für Indexpaare.

**Satz.** Vor. wie in Lemma

$\Rightarrow h(\text{Inv}^\lambda(N)) = h(\text{Inv}^{\lambda_0}(N))$

( $\text{Inv}^\lambda(N) :=$  invariante Menge von  $N$  bzgl. des Flusses  $f^\lambda$ )

$$F : X \times \Lambda \times \mathbb{R} \rightarrow X \times \Lambda$$

$$(x, \lambda, t) \mapsto (f^\lambda(x, t), \lambda)$$

$$N \subset X \times \Lambda, N^\lambda := N \cap (X \times \{\lambda\})$$

ist Fluß auf  $X \times \Lambda$  und heißt

parametrisierter Fluß

**Definition.**  $\lambda_i \in \Lambda, i = 0, 1, I^i$  isolierte invariante Menge für  $f^{\lambda_i}$ .

$I^0$  und  $I^1$  sind durch Fortsetzung verbunden, falls eine isolierende Umgebung  $N \subset X \times \Lambda$  des parametrisierten Flusses mit  $\text{Inv}^{\lambda_i}(N^{\lambda_i}) = I^i$  ( $i = 0, 1$ ) existiert (invariante Menge von  $N^{\lambda_i}$  bzgl.  $f^{\lambda_i}$ )

**Satz.** Falls  $I^0$  und  $I^1$  durch Fortsetzung verbunden sind, gilt  $h(I^0) \sim h(I^1)$ .

**Allgemeinere Formulierung:**

$X$  kompakter metrischer Raum. Auf den Raum  $\Phi$  der Flüsse  $\varphi : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  sei die kompakt-offene Topologie gegeben, d.h.

$$\varphi_n \rightarrow \varphi : \Leftrightarrow \varphi_n \text{ konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen in } X \times \mathbb{R} \text{ gegen } \varphi.$$

$\Phi$  ist in dieser Topologie vollständig.

$N \subset X$  sei abgeschlossen mit  $\overset{\circ}{N} \neq \emptyset$ .

$\mathcal{U}(N) := \{f \in \Phi : N \text{ ist isolierende Umgebung für } f\}$

$\mathcal{U}(N)$  ist offen in  $\Phi$  (s. Lemma)

$A(X) := \{V \subset X, V \text{ abgeschlossen}\}$

$\mathcal{S} := \{(f, I) : I \text{ ist isolierte invariante Menge für } f \in \Phi\}$

$\subset \Phi \times A(X)$

$N \subset X$  abgeschlossen,  $\overset{\circ}{N} \neq \emptyset$ ,

$$\sigma_N : \mathcal{U}(N) \rightarrow \mathcal{S}$$

$$f \mapsto (f, I_f), I_f \text{ maximale invariante Teilmenge von } N \text{ bzgl. } f$$

$$\text{Projektion } \pi_1 : \mathcal{S} \rightarrow \Phi$$

$$\pi_1 \circ \sigma_N = id : \mathcal{U}(N) \rightarrow \mathcal{U}(N)$$

$\mathcal{S}$  trage nun die durch die Menge  $\sigma_N(\mathcal{U})$ ,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}(N)$  offen, erzeugte Topologie.

**Satz.**  $\pi_1 : \mathcal{S} \rightarrow \Phi$  ist lokaler Homöomorphismus, d.h.  $(\mathcal{S}, \Phi, \pi)$  ist Garbe.

**Satz.**  $(f^0, I^0)$  und  $(f^1, I^0)$  mögen in der gleichen Komponente von  $\mathcal{S}$  liegen. Dann stimmen die entsprechenden Conleyindices überein.

### 3.8 Der diskrete Conleyindex

Wir betrachten eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$  eines topologischen Raumes  $X$ .

Für ein Intervall  $J \subset \mathbb{Z}$ , i.e. eine Menge der Form  $J = \{m, m+1, \dots, M-1, M\}$ ,  $m, M \in \mathbb{Z}$ , heißt

$$\gamma : J \rightarrow X$$

eine Lösung von  $f$ , falls

$$\gamma(n) = f(\gamma(n-1)),$$

sofern  $n-1, n \in J$ . Ist  $0 \in J$  und  $\gamma(0) = x$ , so heißt  $\gamma$  Lösung durch den Punkt  $x$ .

Für  $N \subset X$  setzen wir

$$I^+(N) := \{x \in X : f^n(x) \in N \text{ für alle } n \geq 0\} \text{ (vorwärtige invariante Menge)}$$

$$I^-(N) := \{x \in X : \exists \text{ Lösung } \gamma : \{n \leq 0\} \rightarrow X \text{ mit } \gamma(0) = x\} \text{ (rückwärtige invariante Menge)}$$

$$I(N) := I^+(N) \cap I^-(N) \text{ (invariante Menge)}$$

Falls  $f : X \rightarrow X$  ein Homöomorphismus ist, so ist

$$I(N) = \{y \in X : f^n(y) \in N \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Ein kompaktes  $N \subset X$  heißt isolierende Umgebung, und  $I(N)$  isolierte invariante Menge, falls

$$I(N) \subset \overset{\circ}{N}.$$

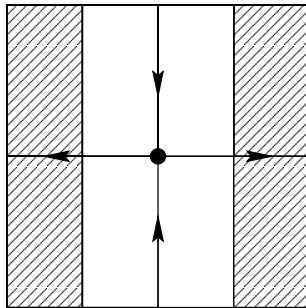
$M \subset N$  heißt positiv invariant bzgl.  $N$ , falls

$$f(M) \cap N \subset M.$$

Beispiele:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

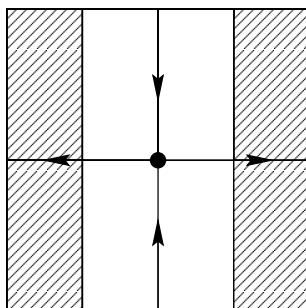
$$(x, y) \mapsto (2x, \frac{1}{2}y)$$



$M_0 = \text{Box}$   
schraffiert:  $M_1$

0 ist isolierter invarianter Punkt

$$H^k(M_0, M_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$M'_0 = \text{beide Boxen}$   
 $M'_1$  schraffiert

$$H^k(M'_0, M'_1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im diskreten Fall hängt die Kohomologie eines Indexpaares für eine isolierte invariante Menge also von der Wahl dieses Indexpaares ab. Daher ist eine Verfeinerung der Konstruktion erforderlich.

Ein Paar  $(M_0, M_1)$  von kompakten Teilmengen  $M_1 \subset M_0 \subset N$  der isolierenden Umgebung der isolierten invarianten Menge  $I(= I(N))$  heißt Indexpaar von  $I$  in  $N$  (bzgl.  $f$ ), falls

- (i)  $I$  liegt im Innern von  $M_0 \setminus M_1$
- (ii)  $M_0$  und  $M_1$  sind positiv invariant bzgl.  $N$
- (iii)  $\overline{M_0 \setminus M_1}, f(\overline{M_0 \setminus M_1}) \subset \overset{\circ}{N}$

Ist also  $x \in M_0$ , so ist entweder  $x \in \overline{M_0 \setminus M_1}$  oder  $x \in M_1 \setminus \overline{(M_0 \setminus M_1)}$ .

Im ersten Fall ist  $f(x) \in \overset{\circ}{N}$  nach (iii) und damit  $f(x) \in M_0$  nach (ii). Also kann  $f(x)$  nur im zweiten Fall außerhalb von  $M_0$  liegen. Insbesondere gilt: Ist  $x \in M_0, f(x) \notin M_0$ , so ist  $x \in M_1$  (Anders formuliert:  $f(\overline{M_0 \setminus M_1}) \subset M_0$ ). Ist nun  $x \in M_1$ , so ist nach (ii) entweder  $f(x) \in M_1$  oder  $f(x)$  außerhalb von  $N$  und damit auch außerhalb von  $M_0$ . In diesem Sinne kann  $M_1$  als Austrittsmenge angesehen werden.

Die isolierende Umgebung  $N$  der isolierten invarianten Menge  $I$  wird bei diesen Konstruktionen als gegeben angesehen. Es läßt sich dann die Existenz von Indexpaaren von  $I$  in  $N$  bzgl.  $f$  zeigen.

Wir haben die Inklusion

$$f(M_0) \setminus (M_0 \cap f(M_0)) \subset f(M_1),$$

denn für ein Indexpaar ist  $f(M_0 \setminus M_1) \subset M_0$ . Also ist  $M_0 \cup f(M_0) = M_0 \cup f(M_1)$ . Daher erhalten wir durch Ausschneidung von  $f(M_1)$  einen Isomorphismus

$$r : H^*(M_0 \cup f(M_0), M_1 \cup f(M_1)) \rightarrow H^*(M_0, M_1).$$

in der Alexander-Spanier-Kohomologie.

Außerdem induziert

$$f : (M_0, M_1) \rightarrow (M_0 \cup f(M_0), M_1 \cup f(M_1))$$

eine Abbildung

$$f^* : H^*(M_0 \cup f(M_0), M_1 \cup f(M_1)) \rightarrow H^*(M_0, M_1).$$

Wir definieren dann die Indexabbildung zu dem Indexpaar  $(M_0, M_1)$  als

$$f_{M_0, M_1}^* := f^* \circ r^{-1} : H^*(M_0, M_1) \rightarrow H^*(M_0, M_1).$$

Es sei  $V$  ein graduierter Vektorraum mit einem Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$ , der die Graduierung erhält (also  $\text{Grad } f = 0$ )

Wir setzen

$$\begin{aligned} g \ker(f) &:= \cup \{f^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\} \\ g \text{ im}(f) &:= \cap \{f^n(V) : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

$f$  induziert dann einen Monomorphismus

$$f' : V/g \ker(f) \rightarrow V/g \ker(f).$$

Ein Monomorphismus  $f : V \rightarrow V$  induziert einen Isomorphismus

$$f'' : g \text{ im}(f) \rightarrow g \text{ im}(f).$$

Die Leray-Reduktion eines Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  ist dann

$$Lf := (f')'' : LV \rightarrow LV$$

( $LV = g \text{ im}(f')$ )

$I$  sei isolierte invariante Menge mit Indexpaar  $(M_0, M_1)$ . Der zugehörige kohomologische Conleyindex von  $I$  ist dann definiert als

$$CH^*(I) := CH^*(M_0, M_1) := (LH^*(M_0, M_1), Lf_{M_0, M_1}^*)$$

Daß der Index einer isolierten invarianten Menge  $I$  wohldefiniert ist, folgt aus dem nachfolgenden

**Satz.** *I sei isolierte invariante Menge für die stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$*

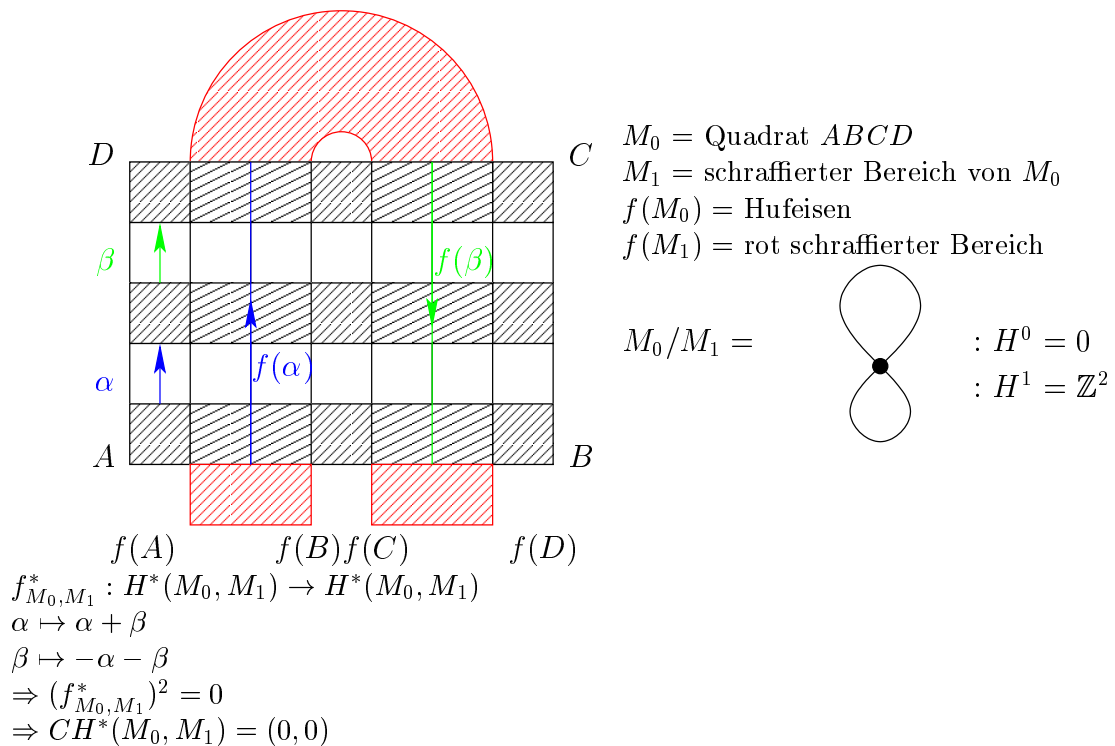
(i) *Dann existiert ein Indexpaar  $(M_0, M_1)$  für  $I$ .*

(ii) *Der kohomologische Conleyindex  $CH^*(M_0, M_1)$  hängt nicht von der Wahl dieses Indexpaares ab.*

Falls  $f$  die Zeit-1-Abbildung eines Flusses ist, so läßt sich zu einer isolierten invarianten Menge des Flusses ein Indexpaar  $(M_0, M_1)$  konstruieren, welches auch ein Indexpaar für  $f$  ist und für welches die obigen Abbildungen  $r, f^* : H^*(M_0 \cup f(M_0), M_1 \cup f(M_1)) \rightarrow H^*(M_0, M_1)$  zueinander homotop sind und folglich  $f^*_{M_0, M_1}$  die Identität ist. Daher kann der kohomologische Conleyindex für den Fluß mit dem Conleyindex bzgl. der Zeit-1-Abbildung identifiziert werden.

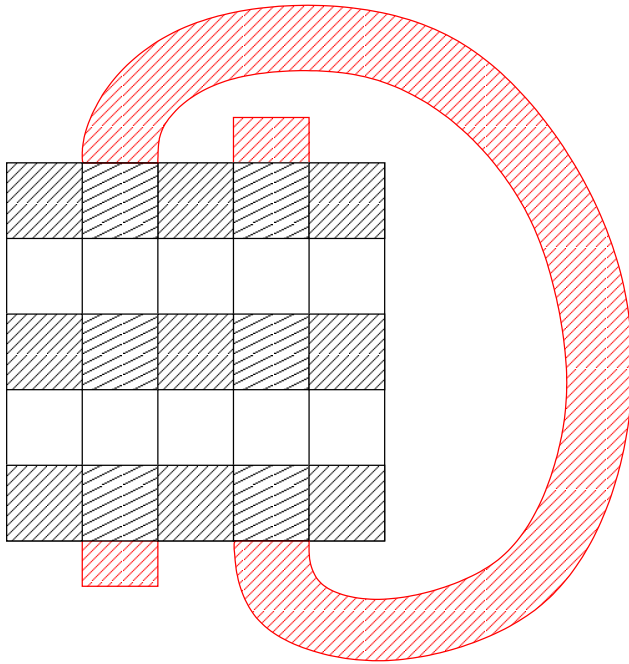
Beispiele:

1. Die Hufeisenabbildung von S. Smale:





## 2. G-Hufeisenabbildung



$M_0, M_1, f(M_0), f(M_1)$  analog wie in 1),  
aber jetzt ist

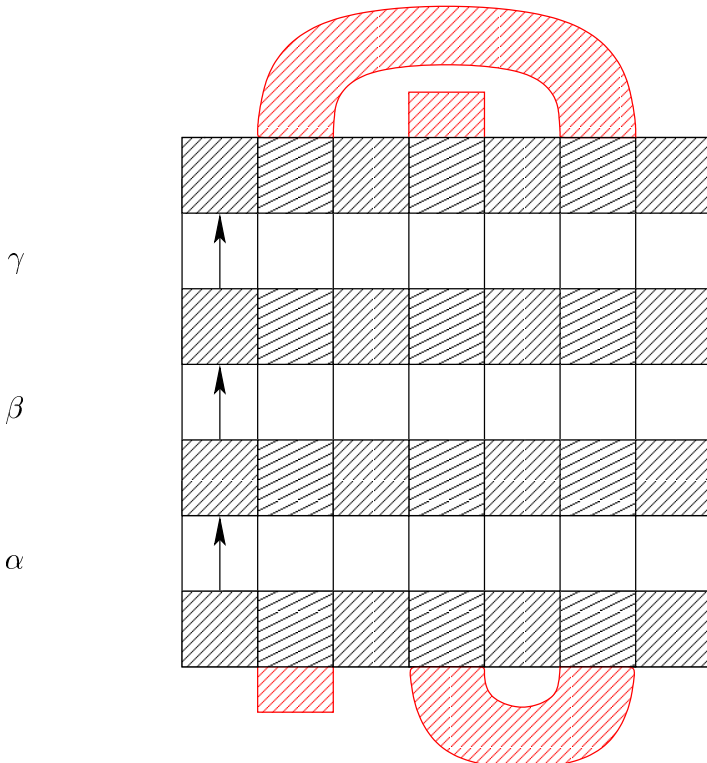
$$f_{M_0, M_1}^1 : H^1(M_0, M_1) \rightarrow H^1(M_0, M_1)$$

$$\alpha \mapsto \alpha + \beta$$

$$\beta \mapsto \alpha + \beta,$$

also  $(f_{M_0, M_1}^1)^2 = 2f_{M_0, M_1}^1$  und  $CH^*(M_0, M_1; \mathbb{Q}) = (\mathbb{Q}, 2id)$  (Mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  wäre der Conleyindex wieder 0, da  $2id : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  kein Isomorphismus ist.)

3.



$M_0, M_1, f(M_0), f(M_1)$  analog wie in 1)

$$f_{M_0, M_1}^1 : H^1(M_0, M_1) \rightarrow H^1(M_0, M_1)$$

$$\alpha \mapsto \alpha + \beta + \gamma$$

$$\beta \mapsto -\alpha - \beta - \gamma$$

$$\gamma \mapsto \alpha + \beta + \gamma$$

$$CH^*(M_0, M_1, \mathbb{Q}) = (\mathbb{Q}, id)$$

## 4 Entropie, Information und Komplexität

### 4.1 W-Räume (Wahrscheinlichkeitsräume)

Dieser Abschnitt stellt einige technische Grundlagen für das Folgende zusammen.

$X$  sei eine Menge. Eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $X$  ist eine Menge  $\mathcal{B}$  von Teilmengen von  $X$  mit:

- (i)  $X \in \mathcal{B}$
- (ii) ist  $B \in \mathcal{B}$ , so auch  $X \setminus B$
- (iii) ist  $B_n \in \mathcal{B}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ .

Aus diesen Eigenschaften folgt auch:

- (iv)  $\emptyset \in \mathcal{B}$
- (v) sind  $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$ , so auch  $\bigcap_{j=1}^m B_j$ .

$(X, \mathcal{B})$  wird dann als meßbarer Raum bezeichnet.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) auf  $(X, \mathcal{B})$  ist eine Funktion

$$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

mit:

- (i)  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$ , falls  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ , d.h. wenn die Mengen  $B_n$  paarweise disjunkt sind
- (ii)  $\mu(X) = 1$  .

Aus (i) folgt auch:

- (iii)  $\mu(\emptyset) = 0$  .

### 4.2 Ergodizität

#### Allgemeine Voraussetzung:

$T : X \rightarrow X$  sei eine maßtreue Transformation eines Wahrscheinlichkeitsraumes  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , d.h. für alle  $E \in \mathcal{B}$  ist  $T^{-1}E \in \mathcal{B}$  und  $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ .

Dann gilt der

#### Poincarésche Wiederkehrssatz:

*Es sei  $E \in \mathcal{B}$  mit  $\mu(E) > 0$ . Dann bilden die Iterierten  $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$  fast jedes  $x \in E$  unendlich oft nach  $E$  ab.*

*Beweis.*  $F := E \cap \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E \subset E$ .

Für jedes  $x \in F$  existieren beliebig große  $m \in \mathbb{N}$  mit  $T^m x \in E$ , und die Iterierten von  $T$  bilden daher ein solches  $x$  beliebig oft nach  $E$  ab.

Da  $T^{-1}(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E) = \bigcup_{n=N+1}^{\infty} T^{-n}E \subset \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E$  und  $\mu$  maßtreu ist, folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}E\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E\right) \text{ für alle } N \\ &= \mu\left(\bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}E\right) \end{aligned}$$

und wegen  $E \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}E$  daher

$$\mu(F) = \mu(E).$$

q.e.d.

Ist  $T^{-1}E = E$  für ein  $E \in \mathcal{B}$ , so ist auch  $T^{-1}(X \setminus E) = X \setminus E$ , und das dynamische Verhalten von  $T$  auf  $X$  läßt sich daher reduzieren auf dasjenige von  $T$  auf den beiden Teilmengen  $E$  und  $X \setminus E$ . Falls  $0 < \mu(E) < \mu(X) (= 1)$ , vereinfacht dies die Situation, während man im Falle  $\mu(E) = 0$  oder  $\mu(E) = 1$  die Nullmenge  $E$  bzw.  $X \setminus E$  weglassen kann, ohne im maßtheoretischen Sinne etwas am Verhalten von  $T$  zu ändern.

**Definition.**  $T$  heißt ergodisch, falls für jedes  $E \in \mathcal{B}$  mit  $T^{-1}E = E$  entweder  $\mu(E) = 0$  oder  $\mu(E) = 1$  ist.

**Satz.**  $T$  ist genau dann ergodisch, wenn jedes  $f \in L^2(\mu)$  mit  $f(Tx) = f(x)$  für fast alle  $x \in X$  (fast überall) konstant ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Durch Betrachtung der Mengen

$$E(k, n) := \{x \in X \mid 2^{-n}k \leq f(x) < 2^{-n}(k+1)\} \quad (k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$$

Diese Mengen bleiben bis auf Nullmengen unter  $T$  invariant, falls  $f(Tx) = f(x)$  für fast alle  $x$ , und daher ist ihr Maß entweder 0 oder 1. Da für festes  $n \in \mathbb{N}$   $X$  die disjunkte Vereinigung der Mengen  $E(k, n), k \in \mathbb{Z}$ , ist, hat genau eine von ihnen das Maß 1, für  $k = k(n)$ .  $E := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E(k(n), n)$  hat dann ebenfalls Maß 1, und  $f$  ist konstant auf  $E$ , somit fast überall auf  $X$ .

„ $\Leftarrow$ “: Es gelte  $T^{-1}E = E$  für ein  $E \in \mathcal{B}$ . Dann ist die charakteristische Funktion  $\chi_E$  aus  $L^2(\mu)$  und  $\chi_E(Tx) = \chi_E(x)$  für alle  $x \in X$ , somit  $\chi_E = \text{const.}$  und daher  $\chi_E = 0$  oder 1. Daher ist  $\mu(E) = \int \chi_E d\mu = 0$  oder 1.

q.e.d.

Beispiele:

1.  $S^1 = \{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$  mit dem Lebesgue(= Hausdorff = Haar)-Maß

$$\begin{aligned} T : S^1 &\rightarrow S^1 \\ z &\mapsto a \cdot z \text{ für } a \in S^1 \end{aligned}$$

ist genau dann ergodisch, wenn  $a$  keine Einheitswurzel ist.

2. Bernoullishift

$$Y := \{0, 1, \dots, \ell - 1\} (= \text{Zustandsraum}),$$

$$(p_0, \dots, p_{\ell-1}) \text{ mit } p_i > 0 \forall i \text{ und } \sum_{i=0}^{\ell-1} p_i = 1, \text{ liefert } W\text{-Maß } p \text{ auf } Y.$$

$X := Y^{\mathbb{Z}}$  (= Raum der zweiseitigen Folgen mit Werten in  $Y$ ),  $\mathcal{B}$  erzeugt von Mengen der Form  $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_m \in Y \text{ für } m < n_1 \text{ oder } m > n_2, x_{n_1} \in A_{n_1}, x_{n_1+1} \in A_{n_1+1}, \dots, x_{n_2} \in A_{n_2}\}, n_1 \leq n_2, A_i \subset Y$ , mit durch  $p$  bestimmtem Produktmaß  $\mu$ , also

$$\mu\{x : x_{i_1} = j_1, \dots, x_{i_k} = j_k\} = p_{j_1} p_{j_2} \dots \cdot p_{j_k} \quad (j_i \in Y \forall i)$$

Shift  $\sigma : X \rightarrow X$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (y_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ mit } y_n = x_{n+1}$$

ist dann maßtreu auf  $X$ .

*Beh.  $\sigma$  ist ergodisch*

*Beweis.* Es sei  $E \in \mathcal{B}$  mit  $\sigma^{-1}E = E$ . Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir dann  $A$  der oben beschriebenen Form mit  $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$ . Daher

$$|\mu(E) - \mu(A)| > \varepsilon.$$

$A$  wie oben,  $n_0 > n_2 - n_1, B = \sigma^{-n_0}A$ . Dann ist  $\mu(B) = \mu(A)$  und

$$\mu(B \cap A) = \mu(B)\mu(A) = \mu(A)^2.$$

Wegen  $\sigma^1 E = E$  ist

$$\mu(E \Delta B) = \mu(\sigma^{-n_0} E \Delta \sigma^{-n_0} A) = \mu(E \Delta A)$$

Daher auch  $\mu(E \Delta (A \cap B)) < 2\varepsilon$  und

$$|\mu(E) - \mu(A \cap B)| < 2\varepsilon$$

und

$$\begin{aligned} |\mu(E) - \mu(E)^2| &\leq |\mu(E) - \mu(A \cap B)| + |\mu(A \cap B) - \mu(E)^2| \\ &\leq 2\varepsilon + |\mu(A)^2 - \mu(E)^2| \\ &\leq 2\varepsilon + \mu(A)|\mu(A) - \mu(E)| \\ &\quad + \mu(E)|\mu(A) - \mu(E)| \\ &< 4\varepsilon \\ \Rightarrow \mu(E) = \mu(E)^2 &\Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ oder } 1. \end{aligned}$$

q.e.d.

### 3. Markovshift:

$X = Y^{\mathbb{Z}}$  und  $\sigma$  wie in 2., aber anderes invariantes Maß:

$$A = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,n-1} \text{ mit } a_{ij} \geq 0 \quad \forall i,j, \quad \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} = 1 \text{ für alle } i.$$

Dann ex.

$$p = (p_0, \dots, p_{n-1}) \text{ mit } p_i > 0 \quad \forall i, \quad \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1,$$

$$pA = p \text{ (d.h. } \sum_{i=0}^{n-1} p_i a_{ij} = p_j \forall j).$$

$$\mu_A\{x : x_i = j_0, x_{i+1} = j_1, \dots, x_{i+k} = j_k\} := p_{j_0} a_{j_0 j_1} \dots a_{j_{k-1} j_k}$$

( $p_{j_0}$  gibt die Wahrscheinlichkeit des Symbols  $j_0$  und  $a_{j_\ell j_{\ell+1}}$  die Übergangswahrscheinlichkeit vom Symbol  $j_\ell$  zum Symbol  $j_{\ell+1}$  an.)

$\mu_A$  läßt sich zu  $W$ -Maß auf  $(X, \mathcal{B})$  fortsetzen.

$\sigma$  läßt  $\mu_A$  invariant und heißt  $(p, A)$ -Markovshift.

(2. ist Spezialfall von 3. mit  $a_{ij} = p_j$  für alle  $i, j$ )

$\sigma$  ist auf  $(X, \mathcal{B}, \mu_A)$  ergodisch  $\Leftrightarrow A$  ist irreduzibel, d.h.  $\forall i, j \quad \exists m \in \mathbb{N}$  mit  $a_{ij}^{(m)} > 0$  ( $A^m = (a_{ij}^{(m)})$ ) für  $m \in \mathbb{N}$ ).

**Satz.** Birkhoffscher Ergodensatz:

$f \in L^1(\mu)$ .

$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x)$  konvergiert für f. a.  $x$  zu einem  $f^* \in L^1(\mu)$ , mit  $f^* \circ T = f^*$  f. ü. und  $\int f^* d\mu = \int f d\mu$ .

Ist  $T$  ergodisch, so ist  $f^*$  konstant f. ü. und daher

$$f^* = \int f d\mu \text{ f. ü.}$$

Anders formuliert: Ist  $T$  ergodisch, so gilt für alle  $f \in L^1(\mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f d\mu \text{ für f. a. } x$$

Analog gilt für einen ergodischen kontinuierlichen (Semi-) Fluß  $(T_t)_{t \geq 0}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (T_t x) dt = \int_X f d\mu \text{ für f. a. } x \text{ (zeitliches = räumliches Mittel).}$$

**Satz.** Von-Neumannscher Ergodensatz:

$$f \in L^p(\mu), 1 \leq p < \infty \Rightarrow \exists f^* \in L^p(\mu), f^* \circ T = f^*, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) \rightarrow f^* \text{ in } L^p(\mu)$$

**Korollar.**  $T$  ergodisch  $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{B}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i} A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$$

*Beweis.* „  $\Rightarrow$  “ :  $f = \chi_A$  im Birkhoffschen Ergodensatz

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i x) \rightarrow \mu(A) \text{ f. ü.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A(T^i x) \chi_B \rightarrow \mu(A) \chi_B \text{ f. ü.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(T^{-i} A \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B) \text{ (Satz über dominierte Konvergenz)}$$

„  $\Leftarrow$  “ : Es sei  $T^{-1}E = E$  für ein  $E \in \mathcal{B}$ .

$$A := B := E \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(E) \rightarrow \mu(E)^2$$

$$\Rightarrow \mu(E) = \mu(E)^2 \Rightarrow \mu(E) = 0 \text{ oder } 1.$$

q.e.d.

**Definition.** (i)  $T$  heißt schwach mischend

$$:\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{B} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\mu(T^{-i}A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

(ii)  $T$  heißt stark mischend

$$:\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{B} : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

stark mischend  $\Rightarrow$  schwach mischend  $\Rightarrow$  ergodisch.

Umkehrungen gelten i. a. nicht.

Beispiel: Drehung von  $S^1$  um den Faktor  $a$  ist ergodisch, falls  $a$  keine Einheitswurzel ist (s.o.), aber nicht schwach mischend, da für genügend kleine Intervalle  $A, B$  für die meisten  $i$   $T^{-i}A \cap B = \emptyset$ , also  $\mu(T^{-i}A \cap B) = 0, \mu(A)\mu(B) > 0$ .

### 4.3 Isomorphie und Konjugation:

Allgemeine Voraussetzung:  $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$  W-Räume,  $T_i : X_i \rightarrow X_i$  maßtreu,  $i = 1, 2$

**Definition.** (i)  $T_1$  und  $T_2$  heißen isomorph, wenn  $M_i \subset \mathcal{B}_i$  mit

$$\mu_i(M_i) = 1 \text{ und } T_i(M_i) \subset M_i \text{ für } i = 1, 2$$

sowie ein invertierbares, maßtreues

$$\varphi : M_1 \rightarrow M_2$$

mit

$$\varphi T_1 x = T_2 \varphi x \text{ für alle } x \in M_1$$

existieren.

(ii) Falls  $\varphi$  nicht notwendig invertierbar ist, heißt  $T_2$  Faktor von  $T_1$ .

(Beispiel:  $S, T$  maßtreu  $\Rightarrow S$  Faktor von  $S \times T$ )

$A, B \in \mathcal{B}$  heißen maßäquivalent, falls  $\mu(A \Delta B) = 0$ . Der Raum  $\tilde{\mathcal{B}}$  der Äquivalenzklassen bildet Borelsche  $\sigma$ -Algebra mit induziertem Maß  $\tilde{\mu}$  ( $\tilde{\mu}(\tilde{B}) = \mu(B)$ ).  $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$  heißt Maßalgebra.

Eine maßtreue Abbildung  $\psi : X_1 \rightarrow X_2$  induziert einen Homomorphismus von Maßalgebren

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{-1} : (\tilde{\mathcal{B}}_2, \tilde{\mu}_2) &\rightarrow (\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mu}_1) \\ \tilde{B} &\mapsto \widetilde{\psi^{-1}B} \end{aligned}$$

**Definition.**  $T_1$  und  $T_2$  heißen konjugiert, wenn ein Maßalgebren-Isomorphismus

$$\Phi : (\tilde{\mathcal{B}}_2, \tilde{\mu}_2) \rightarrow (\tilde{\mathcal{B}}_1, \tilde{\mu}_1)$$

mit

$$\Phi \tilde{T}_2^{-1} = \tilde{T}_1^{-1} \Phi \text{ existiert.}$$

Wenn  $\Phi$  nur als Homomorphismus vorausgesetzt wird, heißt  $T_2$  semikonjugiertes Bild von  $T_1$ .

#### 4.4 Entropie und Information

Allgemeine Voraussetzungen:  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  W-Raum,  $T : X \rightarrow X$  maßtreu

$\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$  Zerlegung von  $X$ ,

d.h.  $\mu(A_i) > 0 \forall i$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ,

$$\mu(X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i) = 0$$

Entropie von  $\alpha$

$$H(\alpha) := - \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i)$$

$\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}, \beta = \{B_1, \dots, B_m\}$  Zerlegungen von  $X$ ,

$\rightarrow$  Zerlegung  $\alpha \vee \beta := \{A_i \cap B_j : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$

Entropie von  $T$  bzgl.  $\alpha$  :

$$h(\alpha, T) := h_\mu(\alpha, T) := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(\alpha \vee T^{-1} \alpha \vee \dots \vee T^{-k+1} \alpha)$$

Die Existenz dieses Limes folgt aus

1.

$$\begin{aligned} H(\alpha \vee \beta) &= - \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) \log_2 \mu(A_i \cap B_j) \\ &= - \sum_i \mu(A_i) \sum_j \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)} \log_2 \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)} \\ &\quad - \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) \log_2 \mu(A_i) \\ &= - \sum_j \sum_i \mu(A_i) \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)} \log_2 \frac{\mu(A_i \cap B_j)}{\mu(A_i)} \\ &\quad - \sum_i \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i), \text{ da } \sum_j \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i) \\ &\leq - \sum_j \left( \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \right) \log_2 \left( \sum_i \mu(A_i \cap B_j) \right) \\ &\quad + H(\alpha), \end{aligned}$$

da die Funktion  $-x \log x$  konkav ist, also

$$- \sum_i a_i x_i \log x_i \leq - \left( \sum_i a_i x_i \right) \log \left( \sum_i a_i x_i \right)$$

für  $\sum a_i = 1$ ,

$$0 \leq a_i \leq 1$$

für alle  $i$

$$= H(\beta) + H(\alpha), \text{ da } \sum_i \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j)$$

(Subadditivität)

und

2.  $H(T^{-1} \alpha) = H(\alpha)$  für maßtreues  $T$ ,

also

3.

$$H(\alpha \vee T^{-1}\alpha \vee \dots \vee T^{-(k+\ell)+1}\alpha) \leq H(\alpha \vee \dots \vee T^{-k+1}\alpha) + H(\alpha \vee \dots \vee T^{-\ell+1}\alpha)$$

Für  $\eta_k := H(\alpha \vee \dots \vee T^{-k+1}\alpha)$  gilt also

$$\eta_{k+\ell} \leq \eta_k + \eta_\ell \quad \text{für } k, \ell \in \mathbb{N}$$

und somit für festes  $i \in \mathbb{N}$  und  $n = \nu i + j$  mit  $0 \leq j < i$

$$\frac{\eta_n}{n} \leq \frac{\eta_j}{\nu i} + \frac{\eta_{\nu i}}{\nu i} \leq \frac{\eta_j}{\nu i} + \frac{\eta_i}{i},$$

also

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{n} \leq \frac{\eta_i}{i},$$

und daher

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{n} \leq \inf_i \frac{\eta_i}{i} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta_n}{n}.$$

also die Existenz des Limes.

**Entropie** von  $T$ :

$$h(T) := h_\mu(T) := \sup_\alpha h(\alpha, T).$$

Die Entropie von  $T$  ist Isomorphie- und Konjugationsinvariante von  $T$ . Ist  $T_2$  Faktor von  $T_1$ , so ist  $h(T_2) \leq h(T_1)$ , da man aus jeder Zerlegung von  $X_2$  dann eine von gleicher Entropie in  $X_1$  erzeugen kann.

Der Zusammenhang dieses Konzeptes mit der Informationstheorie ist der folgende:

$p(dx)$  sei eine Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, ein Teilchen im Punkt  $x \in X$  zu finden.  $B$  sei die  $\sigma$ -Algebra der bzgl.  $p(dx)$  meßbaren Mengen, und für  $A \in B$  ist dann

$$\mu(A) := \int_A p(dx).$$

Die Entropie ist hier

$$H(X, p) = - \int p(dx) \log_2 p(x)$$

Im diskreten Fall werden natürlich Integrale durch Summen ersetzt.

Falls  $X = \{0, \dots, 7\}$  und  $p(i) = \frac{1}{8}$  für alle  $i \in X$  ist, so haben wir

$$H(X, p) = - \sum_{i=1}^8 p(i) \log_2 p(i) = \log_2 8 = 3,$$

und dies bringt gerade die Tatsache zum Ausdruck, daß man zur Beschreibung der Elemente aus  $X$  als Binärzahlen 3 Ziffern, d.h. 3 Bits, benötigt.

Falls jedoch beispielsweise

$$p(0) = \frac{1}{2}, p(1) = \frac{1}{4}, p(2) = \frac{1}{8}, p(3) = \frac{1}{16}, p(4) = \dots p(7) = \frac{1}{64},$$



so ist

$$H(X, p) = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - 4 \frac{1}{64} \log_2 \frac{1}{64} = 2.$$

Wir können die Elemente aus  $X$  z.B. durch die Binärketten 0, 10, 110, 1110, 111100, 111101, 111110, 111111 beschreiben, und die durchschnittliche (bzgl.  $p$ ) Länge dieser Ketten ist 2.

Im Vergleich mit der gleichmäßigen Verteilung hat also die jetzige Verteilung eine kleinere Entropie.

$H(X, p)$  drückt also die durchschnittliche Information aus, die wir durch Messung von  $x$  gewinnen.

Ebenso drückt  $H(\alpha)$  die durchschnittliche Information aus, die wir gewinnen, wenn wir messen, in welcher der Mengen  $A_i$  sich das Teilchen  $x$  befindet. Wir verzichten also auf die genaue Information von  $x$  und behalten nur noch die Information über diejenige Menge  $A_i \in \alpha$ , die  $x$  enthält.

Natürlich ist dann die Information, also die Entropie, umso geringer, je größer die Zerlegung  $\alpha$  ist.

Wenn wir nun eine maßtreue Transformation  $T : X \rightarrow X$  haben und nicht nur messen, in welcher Menge  $A_i \in \alpha$  sich  $x$  befindet, sondern auch, in welcher Menge  $A_i \in \alpha$  sich  $Tx$  befindet, d.h. in welchem  $T^{-1}A_j \in T^{-1}\alpha$  sich  $x$  befindet, so erhalten wir dadurch insgesamt eine genauere Information über  $x$ . Wir wollen jedoch nur diejenige Information messen, die wir zusätzlich gewinnen, wenn wir schon wissen, in welchem  $A_i$  sich  $x$  befindet und dann feststellen, in welchem  $A_j$  sich  $Tx$  befindet, und dies ist

$$\frac{1}{2} H(\alpha \vee T^{-1}\alpha).$$

Die asymptotische zusätzliche Information, die wir bekommen, wenn wir schon wissen, in welcher Menge aus  $\alpha$  sich  $x, Tx, \dots, T^{k-1}x$  befinden und dann feststellen, wo sich  $T^k x$  befindet, ist dann genau die Entropie von  $T$  bzgl.  $\alpha$ . Die Entropie von  $T$  entsteht dann, indem wir die Zerlegung  $\alpha$  so wählen, daß wir aus diesen Messungen asymptotisch die maximal möglich Information erhalten.

Nach dem Vorstehenden ist die folgende Bemerkung wohl offensichtlich und vielleicht sogar überflüssig:

Ein entscheidender Punkt bei der Definition von  $h(T)$  ist, daß wir erst den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  und erst danach das Supremum über alle Zerlegungen  $\alpha$  bilden. Würden wir nämlich zuerst das Supremum von  $H(\alpha)$  über alle  $\alpha$  bilden, so würden wir im kontinuierlichen Fall immer  $\infty$  als Resultat erhalten, denn die gewonnene Information könnte dann durch fortgesetzte Verfeinerung der Zerlegung beliebig vergrößert werden. Ein wesentlicher Gedanke des Entropiebegriffs und der Gehalt des unterstehenden Satzes von Kolmogorov-Sinai ist nun, daß durch Anwendung des dynamischen Systems, d.h. durch Iteration der Abbildung  $T$ , eine gegebene Zerlegung derart verfeinert wird, daß man asymptotisch sämtliche verfügbare Information gewinnen kann. Das Ergebnis bleibt (in den interessanten Fällen) im Limes endlich, weil man durch die Anzahl  $k$  der Beobachtungen oder Iterationen teilt.

Daß man den Logarithmus zur Basis 2 in der Definition der Entropie wählt, hat die Normalisierung zur Folge, daß die Entropie = 1 wird, wenn sich asymptotisch in jedem Schritt die Beobachtungsgenauigkeit verdoppelt.

Die tatsächliche Berechnung der Entropie wird ermöglicht durch den

**Satz von Kolmogorov-Sinai:**  $T$  sei eine invertierbare maßtreue Transformation des  $W$ -Raumes  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ .  $\mathcal{A}$  sei eine **endliche** Teilalgebra von  $\mathcal{B}$ , erzeugt von einer Zerlegung  $\alpha$ , mit

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathcal{A} = \mathcal{B} \text{ bis auf Nullmengen.}$$

Dann ist

$$h(T) = h(\alpha, T).$$

Falls sogar

$$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n} \mathcal{A} = \mathcal{B} \text{ bis auf Nullmengen}$$

so ist

$$h(T) = 0.$$

Ein  $\alpha$  wie im vorstehenden Satz heißt Erzeuger von  $\mathcal{B}$  bzgl.  $T$ .

Aufbauend auf Resultaten von Rohlin bewies Krieger, daß eine ergodische maßtreue Abbildung  $T$  auf einem Lebesgueraum mit endlicher Entropie stets einen endlichen Erzeuger besitzt. Der Satz von Kolmogorov-Sinai erlaubt dann die Berechnung der Entropie von  $T$ .

Beispiele:

1. Für  $id : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$  gilt

$$h(id) = 0,$$

$$\text{da } h(id, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha.$$

2. Ist  $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \mu)$  periodisch, d.h.

$$T^k = id \text{ für ein } k \in \mathbb{N},$$

so ist ebenfalls

$$h(T) = 0, \text{ da nach 1. } 0 = h(T^k) = kh(T).$$

Insbesondere hat jede maßtreue Abbildung eines endlichen Raumes verschwindende Entropie.

- 3.

$$T : S^1 \rightarrow S^1$$

$$z \mapsto az \text{ für } a \in S^1$$

Falls  $a$  eine Einheitswurzel ist, ist  $h(T) = 0$  nach 2.

Falls  $a$  keine Einheitswurzel ist, ist  $(a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  dicht in  $S^1$ .

$\mathcal{A}$  bestehe aus  $0, S^1$  und dem oberen und unteren Halbkreis. Da  $(a^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  dicht in  $S^1$  ist, gehört jeder Halbkreis und damit auch jedes andere Intervall in  $S^1$  zu  $\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n} \mathcal{A}$ . Also ist

$\bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n} \mathcal{A} = \mathcal{B}$ , und somit  $h(T) = 0$  nach dem zweiten Teil des Satzes von Kolmogorov-Sinai.

4. Der zu  $Y = \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$ ,  $(p_0, \dots, p_{\ell-1})$  gehörende Bernoullishift  $T$  hat Entropie

$$-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_j \log_2 p_j$$

*Beweis.* Es sei

$$A_j := \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_0 = j\}$$

$A_0, \dots, A_{\ell-1}$  bilden dann eine Zerlegung von  $X = Y^{\mathbb{Z}}$ ; die hiervon erzeugte Teilalgebra heiße  $\mathcal{A}$ . Es ist

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty} T^n \mathcal{A} = \mathcal{B} (= \text{Produkt-}\sigma\text{-Algebra}).$$

Nach dem Satz von Kolmogorov-Sinai ist

$$h(T) = h(T, \mathcal{A}).$$

Zur Berechnung von  $h(T, \mathcal{A})$  betrachten wir Mengen der Form

$$\begin{aligned} & A_{i_0} \cap T^{-1} A_{i_1} \cap \dots \cap T^{-(k-1)} A_{i_{k-1}} \\ &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} : x_0 = i_0, \dots, x_{k-1} = i_{k-1}\}. \end{aligned}$$

Das Maß einer solchen Menge ist  $p_{i_0} \cdot p_{i_1} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}}$ .

Daher ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} H(\mathcal{A} \vee T^{-1} \mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-k+1} \mathcal{A}) \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{\substack{i_0, \dots, i_{k-1} \\ =0}}^{\ell-1} p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}} \log(p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}}) \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{\substack{i_0, \dots, \\ i_{k-1}}} p_{i_0} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}} (\log p_{i_0} + \dots + \log p_{i_{k-1}}) \\ &= -\sum_{i=0}^{\ell-1} p_i \log p_i, \end{aligned}$$

und wegen  $h(T, \mathcal{A}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} H(\mathcal{A} \vee \dots \vee T^{-k+1} \mathcal{A})$  folgt die Behauptung.

5. Für einen Markovshift berechnet man die Entropie zu

$$-\sum_{i,j} p_i a_{ij} \log_2 a_{ij}.$$

Dies ist die durchschnittliche Information, die man über das nächste Symbol gewinnt, wenn man eine beidseitig unendliche Symbolkette mit den gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten von links nach rechts liest. Die Summation über  $i$  drückt dabei die Mittelung über die beispielsweise zur Zeit  $t = 0$  möglichen vorliegenden Symbole aus, und die Summation über  $j$  beinhaltet dann die jeweilige Wahrscheinlichkeit für das nächste Symbol (zur Zeit  $t = 1$ , wenn wir diskrete Einheitszeitschritte zugrunde legen). Kennt man also das Symbol  $i$  zur Zeit  $t = 0$ , so ist die Unsicherheit über das nächste Symbol dann

$$-\sum_j a_{ij} \log_2 a_{ij}.$$

Insbesondere hängt dies nicht von den zu früheren Zeiten aufgetretenen Symbolen ab, sondern nur von dem Symbol  $i$  zur Zeit  $t = 0$ . Dies ist die sogenannte Markoveigenschaft, daß nämlich das zukünftige Geschehen nur von dem gegenwärtigen Zustand, nicht aber von früheren vergangenen Zuständen mehr abhängt.

Falls  $a_{ij} = p_j$  für alle  $i$  und  $j$  ist, liegt ein Bernoullishift vor, denn dann hängt die Wahrscheinlichkeit des Auftretens für das nächste Symbol nicht von dem gegenwärtigen Symbol ab, und die obige Formel für die Entropie reduziert sich zu derjenigen für den Bernoullishift, nämlich

$$-\sum_j p_j \log_2 p_j, \quad \text{weil } \sum_i p_i = 1 \text{ ist.}$$

Konjugierte Transformationen haben die gleiche Entropie. Die Entropie kann also dazu dienen, nicht konjugierte Transformationen zu unterscheiden. Es ist sehr bemerkenswert, daß für Bernoullishifts die Entropie schon eine vollständige derartige Invariante ist: Es gilt nämlich der

**Satz von Ornstein:** *Zwei Bernoullishifts mit gleicher Entropie sind konjugiert (und daher auch isomorph).*

Der Zustandsraum kann hierbei ein Lebesgueraum sein, also isomorph zu einem W-Raum, welcher eine disjunkte Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Punkten  $y_1, y_2, \dots$  mit positivem Maß  $p_n$  von  $y_n$  und einem Intervall  $[0, s]$ ,  $s = 1 - \sum_n p_n$ , mit dem üblichen Lebesguemaß ist.

## 4.5 Topologische Entropie

$T : X \rightarrow X$  sei stetige Abbildung eines kompakten Hausdorffraumes.

Statt wie in bei der Definition der maßtheoretischen Entropie mit meßbaren Zerlegungen von  $X$  zu arbeiten, verwenden wir nun offene Überdeckungen  $\mathcal{U}$  von  $X$ . Eine andere Überdeckung  $\mathcal{V}$  heißt Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ , wenn jedes  $V \in \mathcal{V}$  in einem  $U \in \mathcal{U}$  enthalten ist. Für zwei Überdeckungen  $\mathcal{U}$  und  $\mathcal{V}$  besteht wie vorher  $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$  aus allen nichtleeren Mengen der Form  $U \cap V$  mit  $U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}$ . Schließlich heißt eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}'$  Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$ , wenn

$$\{U \in \mathcal{U}'\} \subset \{U \in \mathcal{U}\},$$

d.h. wenn  $\mathcal{U}$  alle Elemente von  $\mathcal{U}'$  enthält. Wichtig ist hierbei natürlich die Bedingung, daß  $\mathcal{U}'$  ebenfalls eine Überdeckung von  $X$  ist.

Für eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  definieren wir die Entropie als

$$H(\mathcal{U}) := \log_2 (\text{Minimum der Kardinalitäten aller Teilüberdeckungen von } \mathcal{U}).$$

Das Wort „Entropie“ wird hier nur verwandt, um die Analogie mit der Entropie einer Zerlegung zum Ausdruck zu bringen. Wenn man einmal den Unterschied zwischen einer Zerlegung und einer Überdeckung außer Acht läßt, würde dies dem Fall entsprechen, wo alle Elemente der Zerlegung  $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$  das gleiche Maß  $\frac{1}{n}$  haben. In diesem Fall wird natürlich der größtmögliche Wert für eine Zerlegung durch  $n$  Mengen realisiert; nämlich  $\log_2 n$ . Diese Bemerkung macht den weiter unten formulierten Satz plausibel, daß nämlich die zur maßtheoretischen Entropie ganz analog (mittels Überdeckungen statt Zerlegungen) definierte topologische Entropie von  $T$  das Supremum der maßtheoretischen Entropien  $h_\mu(T)$  bzgl. aller W-Maße  $\mu$  auf  $X$  ist.

Die Elemente von  $\mathcal{U}$  werden als mögliche Beobachtungen oder Kategorien angesehen; im Gegensatz zur obigen maßtheoretischen Entropie ordnen wir allerdings jetzt den Beobachtungen

keine Wahrscheinlichkeiten mehr zu. Außerdem arbeiten wir jetzt mit Überdeckungen anstatt Zerlegungen, d.h. die Beobachtungen können jetzt einander überlappen und brauchen nicht disjunkt zu sein. Daß wir mit Überdeckungen arbeiten, bedeutet, daß wir sicherstellen, daß jedes Element in  $X$  von mindestens einer Beobachtung erfaßt werden kann, oder zu mindestens einer Kategorie gehört.

Wenn wir nun mindestens  $m$  Mengen  $U_1, \dots, U_m$  aus  $\mathcal{U}$  brauchen, um  $X$  zu überdecken, wenn also

$$H(\mathcal{U}) = \log_2 m$$

ist, so können wir dies mit der maßtheoretischen Entropie vergleichen, indem wir jedem  $U_i$  die gleiche Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{m}$  zuordnen (wobei wir im Moment davon absehen, daß wegen des möglichen Überlappens zwischen Menge  $U_i$  und  $U_j$  ( $i \neq j$ ) die Axiome einer Wahrscheinlichkeitsverteilung dann nicht erfüllt sind), so wird auch die entsprechende maßtheoretische Entropie

$$-\sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log_2 \frac{1}{m} = \log_2 m.$$

Wenn dagegen die einzelnen Wahrscheinlichkeiten verschieden gewählt wurden, so wäre die maßtheoretische Entropie kleiner.

In diesem Sinne gehen wir also jetzt davon aus, daß wir eine maximale Unkenntnis besitzen, daß also zunächst jede Beobachtung gleich wahrscheinlich ist, oder anders ausgedrückt, daß wir diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Beobachtungen zugrunde legen, deren Entropie maximal ist. Dieses Prinzip überträgt sich dann auch auf die Entropie der Abbildung  $T$ , wie ein unten zitierter Satz aussagt.

Wie bei der Behandlung der maßtheoretischen Entropie zeigt man, daß

$$h(\mathcal{U}, T) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \mathcal{U} \right)$$

existiert und definiert die topologische Entropie von  $T$  als

$$h_{top}(T) := \sup_{\mathcal{U}} h(\mathcal{U}, T).$$

Man überlegt sich unschwer, daß die topologische Entropie unter topologischer Konjugation invariant bleibt, im Sinne von

**Satz.**  $T_i : X_i \rightarrow X_i$  seien Homöomorphismen der kompakten Hausdorffräume  $X_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  ein Homöomorphismus, mit  $\varphi T_1 = T_2 \varphi$ . Dann ist

$$h_{top}(T_1) = h_{top}(T_2).$$

Falls  $\mathcal{V}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  ist, so gilt

$$H(\mathcal{V}) \geq H(\mathcal{U})$$

und daher auch

$$h(\mathcal{V}, T) \geq h(\mathcal{U}, T).$$

Falls also  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von Überdeckungen mit der Eigenschaft ist, daß jeweils  $\mathcal{U}_{n+1}$  eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}_n$  ist und jedes  $\mathcal{U}$  durch ein geeignetes  $\mathcal{U}_n$  verfeinert wird, so gilt

$$h_{top}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\mathcal{U}_n, T).$$

Trägt nun  $X$  eine Metrik  $d$  und ist  $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Familie von einander verfeinernden Überdeckungen (d.h.  $\mathcal{U}_{n+1}$  verfeinert  $\mathcal{U}_n$  für alle  $n$  wie oben) mit

$$\text{diam}(\mathcal{U}_n) \rightarrow 0$$

(wobei der Durchmesser  $\text{diam} \mathcal{U}_n$  das Supremum der Durchmesser der Elemente von  $\mathcal{U}_n$  ist, berechnet mittels der Metrik  $d$ ), so wird jede Überdeckung  $\mathcal{U}$  durch ein  $\mathcal{U}_n$  verfeinert, und es gilt also

$$h_{\text{top}}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(\mathcal{U}_n, T).$$

Dies deutet an, daß es nützlich ist, Bowen folgend, Entropie unter Verwendung einer Metrik  $d$  auf  $X$  zu definieren.

Hierzu definiert man für  $x, y \in X$ , und einen Homöomorphismus  $T : X \rightarrow X$  eine dynamische Folge von Metriken

$$d_n(x, y) := \sup_{0 \leq k \leq n-1} d(T^k x, T^k y)$$

und schließt aus der vorstehenden Bemerkung, daß

$$h_{\text{top}}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 (\text{minimale Anzahl von} \\ \text{Abstandskugeln vom Radius } \varepsilon \\ \text{bzgl. } d_n, \text{ die } X \text{ überdecken}).$$

Insbesondere hängt also die Größe auf der rechten Seite nicht von der Metrik  $d$  ab (wobei  $X$  immer als kompakt vorausgesetzt wird). Dies kann man sich auch dadurch klarmachen, daß diese Größe für gleichmäßig äquivalente Metriken gleich ist und auf einem kompakten Raum zwei beliebige Metriken gleichmäßig äquivalent sind.

Eine Abstandskugel ist eine Menge der Form

$$B_n(x, \varepsilon) := \{y \in X : d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon \text{ für } 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Man könnte genausogut offene Kugeln verwenden, aber für das Nachfolgende sind abgeschlossene Kugeln ein klein wenig praktischer.

Eine Teilmenge  $F$  von  $X$  heißt  $(n, \varepsilon)$  aufspannend, falls zu jedem  $y \in X$  ein  $x \in F$  existiert mit

$$d_n(x, y) \leq \varepsilon,$$

also

$$d(T^k x, T^k y) \leq \varepsilon \text{ für } 0 \leq k \leq n-1.$$

Zur Interpretation dieses Begriffes ist es nützlich, Bahnen  $\{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$  der Länge  $n$  von Punkten aus  $X$  unter der Abbildung  $T$  zu betrachten. Wenn man Abstände nur mit Präzision  $\varepsilon$  messen kann, lassen sich also die Bahnen zweier Punkte  $x, y$  mit

$$d_n(x, y) \leq \varepsilon$$

nicht trennen. Eine  $(n, \varepsilon)$ -aufspannende Menge  $F$  enthält also zu jedem Punkt  $y \in X$  einen Punkt  $x \in F$ , dessen Bahn der Länge  $n$  sich von derjenigen von  $y$  nicht durch Messungen mit Präzision  $\varepsilon$  unterscheiden läßt.

Die Mittelpunkte einer Überdeckung von  $X$  durch Kugeln vom Radius  $\varepsilon$  bzgl.  $d_n$  bilden also eine solche  $(n, \varepsilon)$ -aufspannende Menge, und die obige Minimalzahl derartiger Kugeln, die  $X$  überdecken, ist dann

$$r(n, \varepsilon) := \text{Minimum der Kardinalitäten von} \\ (n, \varepsilon) \text{ aufspannenden Mengen.}$$

Nach unserer obigen Interpretation ist also  $r(n, \varepsilon)$  ein Maß für die Anzahl der Bahnen  $\{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$  der Länge  $n$  mit Präzision  $\varepsilon$ .

Also ist

$$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 r(n, \varepsilon).$$

Schließlich bezeichnen wir eine Menge  $E \subset X$  als  $(n, \varepsilon)$ -getrennt, falls für irgendzwei verschiedene  $x, y \in E$  ein  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  mit

$$d(T^k x, T^k y) > \varepsilon$$

existiert, und setzen

$$s(n, \varepsilon) := \text{Maximum der Kardinalitäten von} \\ (n, \varepsilon)\text{-getrennten Mengen.}$$

Es gilt

$$s(n, \varepsilon) \geq r(n, \varepsilon),$$

da eine  $(n, \varepsilon)$ -getrennte Menge von maximaler Kardinalität schon  $(n, \varepsilon)$ -aufspannend sein muß, weil man andernfalls noch ein weiteres Element aus  $X$  finden könnte, welches von derjenigen der gegebenen Menge  $(n, \varepsilon)$ -getrennt wäre.

Andererseits ist

$$s(n, \varepsilon) \leq r(n, \varepsilon/2),$$

denn wir können eine beliebige  $(n, \varepsilon/2)$ -aufspannende Menge  $F$  wählen und dann zu jeder  $(n, \varepsilon)$ -getrennten Menge  $E$  und  $x \in E$  genau ein  $y \in F$  mit

$$d_n(x, y) \leq \varepsilon/2$$

finden, weil  $F$   $(n, \varepsilon/2)$ -aufspannend ist, und zwar derart, daß hierbei verschiedenen Elementen aus  $E$  auch verschiedene Elemente aus  $F$  entsprechen, weil  $E$   $(n, \varepsilon)$ -getrennt ist.

$s(n, \varepsilon)$  kann natürlich ebenfalls als Maß für die Anzahl der Bahnen  $\{x, \dots, T^{n-1}x\}$  der Länge  $n$  mit Präzision  $\varepsilon$  angesehen werden.

Insgesamt folgt aus diesen Ungleichungen zwischen  $r$  und  $s$ , daß

$$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 s(n, \varepsilon).$$

Diese verschiedenen Charakterisierungen von  $h_{top}(T)$  sind nützlich für die Berechnung dieser Größe.

Schließlich zitieren wir noch den

**Satz.**  $T : X \rightarrow X$  sei Homöomorphismus des kompakten metrischen Raumes  $X$ . Dann ist

$$h_{top}(T) = \sup \{ h_\mu(T) : \mu \text{ } T\text{-invariantes Borelsches} \\ W\text{-Maß auf } X \}.$$

Z.B. folgt hieraus aufgrund unserer obigen Berechnung der maßtheoretischen Entropie direkt, daß der Bernoullishift auf der Menge

$Y = \{0, 1, \dots, \ell - 1\}$  die topologische Entropie  $\log_2 \ell$  hat, denn  $-\sum_{j=0}^{\ell-1} p_j \log p_j$  wird unter den Be-

dingungen  $0 \leq p_j \leq 1$  und  $\sum_{j=0}^{\ell-1} p_j = 1$  genau dann maximal, wenn  $p_j = \frac{1}{\ell}$  für alle  $j$  ist.

In diesem Zusammenhang gilt der folgende

**Satz.** (Katok)  $T : X \rightarrow X$  sei Homöomorphismus des kompakten metrischen Raumes  $X$ ,  $\mu$  sei  $T$ -invariantes, ergodisches, Borelsches  $W$ -Maß auf  $X$ . Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  sei  $r_\mu(n, \varepsilon, \delta)$  die minimale Anzahl von Kugeln vom Radius  $\varepsilon$  bzgl. der Metrik  $d_n$ , deren Vereinigung mindestens das  $\mu$ -Maß  $1 - \delta$  besitzt, die also  $X$  bis auf eine Menge höchstens vom Maß  $\delta$  überdecken. Dann ist

$$h_\mu(T) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 r_\mu(n, \varepsilon, \delta).$$

Es gilt auch

**Satz.** Jeder Homöomorphismus des Kreises  $S^1$  hat verschwindende topologische Entropie.

Dies beweist man z.B., indem man zeigt, daß jeder Homöomorphismus von  $S^1$  zu einer Drehung topologisch konjugiert ist, welche dann maßtheoretische Entropie Null besitzt.

Die vorstehenden Konstruktionen lassen sich allerdings auch für etwas allgemeinere Abbildungen als Homöomorphismen durchführen. Beispielsweise können wir die  $n$ -fache Überlagerung

$$\phi_m : S^1 \rightarrow S^1$$

betrachten (beispielsweise fassen wir  $S^1$  als den Einheitskreis in  $\mathbb{C}$  auf und schränken  $z \mapsto z^m$  auf  $S^1$  ein).

Für diese Abbildung verhalten sich  $s(n, \varepsilon)$  und  $r(n, \varepsilon)$  wie  $\varepsilon m^n$ , und es gilt daher

$$h_{top}(\phi_m) = \log_2 m > 0.$$

Es ist nicht allzu schwer zu zeigen, daß für jede Lipschitzabbildung

$$T : X \rightarrow X$$

eines kompakten metrischen Raumes mit Lipschitzkonstante

$$L(T) := \sup_{x \neq y \in X} \frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)}$$

die Entropie durch

$$\dim(X) \max(0, \log_2 L(0))$$

beschränkt ist, wobei die Dimension  $\dim(X)$  geeignet definiert ist, natürlich so, daß sie im Falle, wo  $X$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, mit der üblichen Dimension übereinstimmt.

Hierzu definiert man  $b(\varepsilon)$  als die minimale Kardinalität einer Überdeckung von  $X$  durch Kugeln vom Radius  $\varepsilon$  und setzt dann

$$\dim(X) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log b(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

Die Entropie einer stetigen Abbildung eines kompakten Zustandsraumes ist nur dann positiv, wenn sie in jedem Schritt neue Information erzeugt. Eine Möglichkeit, wie man diese Erzeugung von Information veranschaulichen kann, ist, zu einer gegebenen Überdeckung oder Zerlegung (je nachdem, ob wir die topologische oder maßtheoretische Entropie betrachten) Punkte  $x \neq y$  zu betrachten, die nicht in verschiedenen Mengen liegen, also nicht durch eine durch die Überdeckung oder Zerlegung ermöglichte Beobachtung getrennt werden können. Damit durch  $T$  Information erzeugt wird, muß es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft geben, daß  $T^n x$  und  $T^n y$  in verschiedenen der betrachteten Mengen liegen, daß also die dynamischen Iterierten von  $x$  und  $y$  irgendwann durch Beobachtung auseinandergehalten werden können. Man kann dies auch als



sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen im Sinne einer chaotischen Dynamik interpretieren. Ein wesentlicher Punkt ist aber, daß sich der Abstand zwischen  $T^n x$  und  $T^n y$  nicht mit wachsendem  $n$  immer weiter vergrößern kann, weil der zugrunde liegende Zustandsraum kompakt ist. Es muß also neben den auseinanderlaufenden Iterierten auch zusammenlaufende geben. Dieses Wechselspiel macht chaotische Dynamiken interessant und reizvoll.

Wenn man nur die Bahn eines einzigen Punktes  $x \in X$  unter der Iteration von  $T$  betrachtet, kann man die Informationserzeugung so auffassen, daß  $T^n x$  nicht irgendwann eine regelmäßige Abfolge der betrachteten Mengen  $U_1, \dots, U_m$  durchläuft, sondern daß man nie allein aus der Kenntnis der Aufenthaltsmengen von  $x, Tx, \dots, T^n x$  schon die Aufenthaltsmenge von  $T^{n+1}x$  voraussagen kann. Andernfalls würde wiederum asymptotisch keine neue Information mehr erzeugt, und die Entropie von  $T$  würde verschwinden.

#### 4.6 Komplexität und intrinsische Skalen

Bei Abbildungen positiver Entropie auf kompakten Zustandsräumen gibt es kein intrinsisches Längenmaß, weil die Entropie nur dann positiv sein kann, wenn infinitesimale Information immer weiter vergrößert wird<sup>1</sup>. Daher haben z.B. alle Gradientenflüsse auf kompakten Zustandsräumen verschwindende Entropie.

Wir wollen daher nun einen Begriff einführen, welcher Abbildungen bewerten kann, die verschwindende Entropie besitzen, und für diese einen intrinsischen Skalenfaktor bestimmen kann.  $(X, d)$  sei metrischer Raum, typischerweise kompakt, und

$$T : X \rightarrow X$$

sei eine stetige Abbildung.

$\varepsilon$  sei positiv, und es wird die Rolle eines Skalenfaktors übernehmen.  $E \subset X$  heißt wie vorher  $\varepsilon$ -getrennt, falls

$$d(x, y) > \varepsilon$$

für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  gilt, und

$$s(\varepsilon) := \max\{ \text{Kardinalität}(E) : E \subset X \text{ } \varepsilon\text{-getrennt} \}$$

sei die größtmögliche Anzahl  $\varepsilon$ -getrennter Elemente in  $X$ .  $E \subset X$  heißt  $\varepsilon$ -divergent, falls für irgendzwei Elemente  $x \neq y \in E$  mit  $d(x, y) < \varepsilon$  und jedes  $n_0 \in \mathbb{N}$  ein  $n \geq n_0$  mit

$$d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$$

existiert. Die Definition ist so formuliert, daß jede  $\varepsilon$ -getrennte Menge automatisch  $\varepsilon$ -divergent ist. Der entscheidende Punkt ist jedoch, daß Elemente, die ursprünglich näher als  $\varepsilon$  beisammen sind, durch die dynamische Iteration voneinander getrennt werden müssen.

(Eine Variante dieser Definition würde verlangen, daß für alle  $x \neq y \in E$  mit  $d(x, y) < \varepsilon$  für alle genügend große  $n \in \mathbb{N}$

$$d(T^n x, T^n y) > \varepsilon$$

gilt, daß also die Elemente nach genügend vielen Iterationen immer getrennt bleiben; dies scheint jedoch in vielen Fällen zu einschränkend zu sein.)

---

<sup>1</sup>Kein intrinsisches Längenmaß gibt es auch für sog. selbstähnliche Strukturen, d.h. Gebilde, die sich bei Umskalierungen nicht ändern. Manche Fraktale haben diese Eigenschaft, und dies ist ein Grund für manche Verwandtschaften zwischen der Theorie chaotischer Systeme und derjenigen der Fraktale.

Es sei dann

$$\sigma(\varepsilon) := \max\{ \text{Kardinalität}(E) : E \subset X \text{ } \varepsilon\text{-divergent} \}.$$

Wie oben bemerkt, ist jede  $\varepsilon$ -getrennte Menge auch  $\varepsilon$ -divergent, und somit ist

$$\sigma(\varepsilon) \leq s(\varepsilon).$$

Wir definieren die Komplexität von  $T : X \rightarrow X$  dann als

$$c(T) := \sup_{\varepsilon > 0} \log \frac{\sigma(\varepsilon)}{s(\varepsilon)}.$$

$c(T)$  ist also immer nicht negativ.

Im Gegensatz zur Entropie wird hier das Supremum i.a. nicht für  $\varepsilon \rightarrow 0$  realisiert, sondern für einen positiven Wert von  $\varepsilon$ . Dieses  $\varepsilon$  gibt dann die Größenordnung größtmöglicher Komplexität von  $T$  an.

Die Komplexität  $c(T)$  verschwindet, wenn  $T$  kontrahierend ist, d.h. falls

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \text{ für alle } x, y \in X.$$

Bei Gradientenflüssen wird Komplexität bei kritischen Punkten  $p$  von positivem Index erzeugt. Ein solches  $p$  bleibt fest unter dem Fluß, hat aber Nachbarpunkte, die in verschiedene Richtungen weglaufen, i.a. umso mehr, je größer der Index ist, auch wenn dies keine völlig allgemeingültige Tatsache ist, da man unschwer Spezialfälle angeben kann, in denen dies nicht in dieser Form gilt. Ein  $\varepsilon$  größtmöglicher Komplexität wäre in diesem Fall etwa von der Größenordnung des durchschnittlichen Abstandes verschiedener solcher kritischer Punkte.  $\varepsilon$  darf nicht zu groß gewählt werden, weil sonst Punkte nicht dynamisch trennbar wären, und nicht zu klein, weil es sonst verhältnismäßig zu viele schon  $\varepsilon$ -getrennte Punkte gäbe, also der Nenner  $s(\varepsilon)$  zu groß wäre. Jedenfalls stellen kritische Punkte von höherem Index diejenigen Stellen dar, in denen im Sinne der Definition Komplexität erzeugt wird, oder, anders ausgedrückt, in deren Umgebung man die meiste Information über das qualitative Verhalten des dynamischen Systems gewinnt.

$c(T)$  ist invariant unter Isometrien, aber i.a. nicht unter Homöomorphismen von  $X$ . Durch die Wahl der Metrik erzwingen wir nämlich eine gleichmäßige Größenordnung  $\varepsilon$  für ganz  $X$ . Dies mag nicht immer wünschenswert sein, und so formulieren wir nun ein Komplexitätskonzept für Abbildungen topologischer Räume, welches variable Skalenfaktoren erlaubt.

$X$  sei also jetzt ein kompakter topologischer Raum,

$$T : X \rightarrow X$$

wiederum stetig.

Für eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  sei

$$\nu(\mathcal{U}) := \text{Minimum der Kardinalitäten aller Teilüberdeckungen von } \mathcal{U};$$

dies fassen wir als Analogon zu der obigen Größe  $s(\varepsilon)$  auf.

Zu einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  definieren wir nun eine dynamische Überdeckung

$$\mathcal{U}_T := \bigcup_{\substack{U_n \in \mathcal{U}, n_0 \in \mathbb{N} \\ (n=0, n_0, n_0+1, \dots)}} (U_0 \cap T^{-n_0} U_{n_0} \cap T^{-(n_0+1)} U_{(n_0+1)} \cap \dots)$$

Falls  $x, y \in X$  in dem gleichen der hier auftretenden Schnitte enthalten sind, also

$$T^n x, T^n y \in U_n \text{ für } n = 0 \text{ und } n = n_0, n_0 + 1, \dots,$$

und wenn dies für jeden Schnitt, d.h. für jede Wahl der  $U_n$  gilt, so können sie nicht durch die dynamische Iteration getrennt werden. Die verschiedenen Elemente von  $\mathcal{U}_T$  entsprechen also den Möglichkeiten der dynamischen Trennung der Punkte aus  $X$ .

Wir definieren nun die (topologische) Komplexität von  $T$  als

$$\gamma(T) := \sup_{\substack{\mathcal{U} \text{ offene} \\ \text{Überdeckung von } X}} \frac{\nu(\mathcal{U}_T)}{\nu(\mathcal{U})}$$

Eine Überdeckung, für welche dieses Supremum angenommen wird, ist dann eine Überdeckung maximaler Komplexität. Die Größe der einzelnen Elemente<sup>1</sup> einer derartigen Überdeckung liefert uns jetzt die lokale Skalenordnung größter Komplexität von  $T$ , und im Gegensatz zu dem vorherigen metrischen Konzept ist diese nunmehr variabel.  $\gamma(T)$  ist im Gegensatz zu  $c(T)$  invariant unter Homöomorphismen von  $X$ .

Im Gegensatz zur Entropie ist die hier definierte Komplexität eine relative Größe insofern, als der Quotient zweier Quantitäten gebildet wird, von denen die eine die statische Trennungseigenschaft des Raumes und die andere die dynamische Trennungseigenschaft des Prozesses mißt. Man kann natürlich auch das Teilen durch  $s(\varepsilon)$  oder  $\nu(U)$  als Normalisierung auffassen, in Analogie dazu, daß man in der Definition der Entropie durch einen Faktor teilt, der die Anzahl der dynamischen Iteration mißt. Schließlich ist die hier definierte Komplexität eine intensive Größe in dem Sinne, daß die disjunkte Vereinigung mehrerer identischer Systeme die gleiche Komplexität besitzt wie jedes einzelne dieser Systeme.

---

<sup>1</sup>sofern wir diese Größe messen können, beispielsweise bei Vorliegen einer Metrik oder eines Maßes

## Literatur

- [1] S. N. Chow, J. Hale, *Methods of bifurcation theory*, Springer, 1996
- [2] C. Conley, E. Zehnder, Morse-type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, *CPAM* 37, 207 - 253 (1984)
- [3] R. Easton, *Geometric methods for discrete dynamical systems*, Oxford Univ. Press, 1998
- [4] J. Hofbauer, K. Sigmund, *The theory of evolution and dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 1988
- [5] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge Univ. Press, 1995
- [6] J. Jost, On the notion of complexity, *Theory in Bioscienc.* 117, 161 - 171 (1998)
- [7] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 3. Aufl., in Vorbereitung
- [8] K. Mischaikow, Conley Index theory, *Springer Lecture Notes Math.* 1609, 119 - 207 (1995)
- [9] M. Mrozek, *Trans. AMS* 318, 149 - 178 (1990)
- [10] M. Mrozek, K. Rybakowski, *J. Diff. Eq.* 90, 143 - 171 (1991)
- [11] D. Ruelle, *Elementary differentiable dynamics and bifurcation theory*, Academic Press, 1989
- [12] M. Schwarz, *Morse homology*, Birkhäuser, 1993
- [13] J. Smoller, *Shock waves and reaction diffusion equations*, Springer, 1983
- [14] K. Petersen, *Ergodic theory*, Cambridge Univ. Press, 1983
- [15] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, GTM 79, 1982
- [16] E. Zeidler, *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teil II, Kapitel 13, Teubner, 1995