Max-Planck-Institut
für Mathematik
in den Naturwissenschaften
Leipzig

Endlichkeitssätze und positive Krümmung

by

Wilderich Tuschmann

Lecture notes no.: 9 2000

Endlichkeitssätze und positive Krümmung

Wilderich Tuschmann

Habilitationsschrift, Leipzig 2000

The curvature tensor of a Riemannian manifold
is a little monster of (multi)linear algebra
whose full geometric meaning remains obscure.

M. GROMOV

Inhalt

Einleitung

Positive Krümmung impliziert nichttriviale Topologie. Diese Tatsache erklärt, weshalb in der Globalen Riemannschen Geometrie bei der Untersuchung der Zusammenhänge zwischen geometrischen Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten und deren globaler topologischer Gestalt das Studium positiv gekrümmter Räume insbesondere im Hinblick auf Klassifikations- und Endlichkeitsresultate stets von besonderem Interesse gewesen ist. Das Wechselspiel von Topologie, positiven Krümmungsgrößen und Endlichkeitsaussagen läßt sich bereits am klassischen Satz von Gauß und Bonnet illustrieren, denn nach diesem ist einerseits unter allen orientierbaren geschlossenen Flächen die Sphäre die einzige Fläche, die eine Metrik mit durchweg positiver Gauß-Krümmung tragen kann, und andererseits ist für jede Riemannsche Metrik auf einer einfach zusammenhängenden geschlossenen Fläche das Integral ihrer Gaußschen Krümmung immer positiv.

Welche topologischen Restriktionen ergeben sich aus der Existenz von Metriken mit positiver Schnitt- oder Ricci-Krümmung? Auf welchen Mannigfaltigkeiten existieren solche Metriken, und welche geometrisch-topologischen Endlichkeitsaussagen gelten für die unterliegenden Räume? Führen topologische Eigenschaften einer positiv gekrümmten Mannigfaltigkeit zu Implikationen für Invarianten der Riemannschen Metrik und daraus wiederum zu Konsequenzen für die Topologie?

Diese Fragestellungen bilden die Leitmotive der vorliegenden Schrift, welche auf einzeln und in Zusammenarbeit verfaßten Arbeiten des Autors zu dieser wie auch allgemeinerer Thematik aufbaut und unter diesem Aspekt kombiniert.

Die nachstehenden Teile dieses einleitenden Kapitels geben einen Überblick über die in der vorliegenden Arbeit behandelten Resultate und beinhalten eine die Endlichkeitssätze der Riemannschen Geometrie einschließende Darstellung der Ergebnisse zu den Beziehungen zwischen positiver Krümmung und Topologie.

Zur Herleitung nichttrivialer Beziehungen zwischen Krümmung und Topologie ist es erforderlich, Riemannsche Mannigfaltigkeiten stets als im Sinne des Satzes von Hopf und Rinow vollständig anzunehmen, denn ohne diese Annahme gibt es nach Gromov auf *jeder* glatten nichtkompakten Mannigfaltigkeit Riemannsche Metriken mit rein positiver wie zudem auch mit rein negativer Schnittkrümmung. Diese Konvention versteht sich in der vorliegenden Schrift als stillschweigend getroffen.

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung bestehen zunächst die zwei grundsätzlichen Möglichkeiten, daß entweder das Infimum ihrer Schnittkrümmungen positiv ist oder nicht. Im letzteren Fall ist nach dem Seelensatz von Cheeger-Gromoll-Meyer die Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einem Euklidischen Raum, so daß es im Hinblick auf topologische Fragestellungen genügt, sich im weiteren auf den ersten Fall zu beschränken. In diesem ist die Mannigfaltigkeit nach dem Satz von Bonnet und Myers kompakt und bis auf eine isometrische Wirkung einer endlichen Gruppe durch ihre ebenfalls kompakte Riemannsche universelle Überlagerung bestimmt. Gleiches gilt unter der schwächeren Voraussetzung einer strikt positiven unteren Schranke für die Ricci-Krümmung. Darüber hinaus besitzt nach Synge (siehe [Sy]) die Fundamentalgruppe einer geradedimensionalen Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung zudem höchstens die Ordnung 2. Bis auf spezielle weitere die Fundamentalgruppen betreffende Fragestellungen (siehe dazu die Arbeiten von Shankar ([Sha]) und Wu ([Wu2]) sowie die darin enthaltenen Referenzen) reicht es für das Studium von Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnitt- oder Ricci-Krümmung daher stets aus, nur den kompakten einfach zusammenhängenden Fall zu betrachten.

Während nach Hamilton (siehe [Ha]) jede kompakte einfach zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Metrik positiver Ricci-Krümmung diffeomorph zur 3-Sphäre ist, sind topologische Hindernisse für die Existenz von Riemannschen Metriken mit positiver Schnitt- oder Ricci-Krümmung auf kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten einer Dimension ≥ 4 so gut wie unbekannt. Die bisher einzigen allgemeinen (das heißt im Gegensatz zur bei Pinching-Sätzen vorliegenden Situation nicht gleich in Klassifikationsaussagen resultierenden) Obstruktionen ergeben sich entweder aus Gromovs Bettizahlensatz (siehe [G3], 1981) oder den spin-geometrischen Verschwindungssätzen von Lichnerowicz und Hitchin für topologische Geschlechter wie Hirzebruchs $\hat{A}$-Geschlecht oder Hitchins α-Invariante (siehe [Li], 1963, [Hi], 1974, sowie [Ros], [G7], [St]). Diese Resultate gelten jedoch bereits unter den schwächeren Voraussetzungen der Nichtnegativität der Schnitt- beziehungsweise der Positivität der Skalarkrümmung und liefern damit keine Aussagen, die genuin auf Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung zuträfen.

So sind auch die auf Hopf und Yau zurückgehenden Fragen, ob es auf Produkten kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung keine positiv gekrümmten Metriken geben kann, beziehungsweise ob kompakte einfach zusammenhängende nichtnegativ gekrümmte Mannigfaltigkeiten stets auch Metriken mit positiver Schnittkrümmung tragen, bis dato ungelöst.

Angesichts der Tatsache fehlender Obstruktionen ist es umso erstaunlicher, daß man im Gegensatz zur Situation positiver Ricci-Krümmung bis heute nur sehr wenige Beipiele kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung kennt. Diese sind gegeben durch

- Die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1:

  S^m, $\mathbb{CP}^m$, $\mathbb{HP}^m$ und $\mathbb{C}a\mathbb{P}^2$;

- Bergers normal homogene Räume ([Be3], 1961):

  $B^7 = Sp(2)/SU(2)$ und $B^{13} = SU(5)/(Sp(2) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1)$;

- Wallachs Fahnenmannigfaltigkeiten ([Wa], 1972):

  $F^6 = SU(3)/T^2$, $F^{12} = Sp(3)/(SU(2))^3$, $F^{24} = F_4/Spin(8)$;

- Eschenburgs "getwistete Fahne" ([E2], 1984):

  $E^6 = T^2 \backslash SU(3)$;

- Aloff und Wallachs homogene Räume ([AW], 1975):

  $M^7_{p,q} = SU(3)/S^1_{p,q}$;

- Eschenburgs ([E1], 1982, siehe ferner [E2], [E5]) und Bažaikins ([Bas], 1996) inhomogene Biquotienten:

  $E^7_{p,q,k,l} = S^1_{p,q,k,l} \backslash SU(3)$ und $B^{13}_{p,q,k,l,r} = S^1_{p,q,k,l,r} \backslash U(5)/(Sp(2) \times S^1)$.

Insbesondere sind nur in Dimension 7 und Dimension 13 unendliche Beispielserien kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit Metriken positiver Schnittkrümmung bekannt, und ab Dimension 25 kennt man an solchen Beispielen bis heute nur die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1, und in ungerader Dimension ≥ 25 damit nur noch die Sphären !

Dieser Sachverhalt steht in krassem Gegensatz zu der Tatsache, daß aufgrund der Konstruktion Shas und Yangs von Metriken positiver Ricci-Krümmung auf zusammenhängenden Summen $M_j^{k,l}$ einer beliebigen Anzahl j von Kopien von $S^k \times S^l$, $k, l \geq 2$ (siehe [SY]) andererseits wohlbekannt ist, daß in jeder Dimension $m \geq 4$ unendliche Beispielserien paarweise nicht homotopieäquivalenter kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung existieren. Geeignete unendliche Folgen von Eschenburg-Räumen und deren Produkte mit Sphären entsprechender Kodimension zeigen ferner, daß es in Dimension 7 und jeder Dimension $m \geq 9$ unendliche Folgen kompakter einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung und wechselseitig verschiedenem Homotopietyp gibt, die zudem sogar eine Piching-Bedingung der Form $Ricc \geq \delta > 0$, $K \leq 1$ (siehe unten) erfüllen.

Während die von Berger Anfang der sechziger Jahre begonnene und von Wallach und Aloff-Wallach fortgeführte Klassifikation der Riemannsch homogenen kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung 1976 von Berard Bergery mit dem Ergebnis abgeschlossen wurde, daß die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1 sowie Bergers Beispiele, die Fahnenmannigfaltigkeiten Wallachs und die Aloff-Wallach-Räume die einzigen solchen Mannigfaltigkeiten sind (siehe [Be3], [Wa], [AW], [B1], und für die speziellere Klassifikation der normal homogenen positiv gekrümmten Räume von Berger, korrigiert durch Wilking, die Arbeiten [Be3], [Wi]), ist eine allgemeine Klassifikation aller kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, auf denen Metriken mit positiver Schnittkrümmung existieren, nicht in Sicht.

In den bis heute fortdauernden Unterfangen, den topologischen Typ positiv gekrümmter Mannnigfaltigkeiten allgemeiner Dimension anstelle nur des Vorzeichens der Krümmung durch zusätzliche Voraussetzungen an deren Geometrie zu kontrollieren oder gar zu charakterisieren, gab es dahingegen bereits um 1960 in Bezug auf die in diesem Zusammenhang wichtigste Invariante einer positiv gekrümmten Metrik auf einer kompakten Mannigfaltigeit, die *Pinching-Konstante*, definiert als das Verhältnis von Minimum und (meist zu Eins normiertem) Maximum der von der Metrik angenommenen Schnittkrümmungen, grundlegende neue Ergebnisse. In diesem Zeitraum gelangten Berger und Klingenberg in den Arbeiten [Kl1], [Be1], [Be2], [Kl2], [Kl3] (zu der letztgenannten Arbeit vergleiche auch [CGr2], [KS1] sowie die Diskussion in [AM3]) in Verallgemeinerung früherer Ergebnisse von Rauch (siehe [Ra]) zu folgendem Resultat:

Eine kompakte m-dimensionale einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Schnittkrümmung $0 < \delta \leq K \leq 1$ ist für $\delta > 1/4$ homöomorph zur Sphäre S^m, und für $\delta \geq 1/4$ entweder homöomorph zu S^m oder isometrisch zu $\mathbb{CP}^{m/2}$, $\mathbb{HP}^{m/4}$, oder $\mathbb{C}a\mathbb{P}^2$.

Spätestens seit Anfang der achtziger Jahre war jedoch bekannt, daß eine allgemeine Klassifikation positiv gekrümmter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten bis auf endlich viele Möglichkeiten über deren Pinching-Konstanten unmöglich ist, denn aus den Arbeiten von Huang und Eschenburg sowie Püttmann folgt (siehe [Hua], [E1], [Pü], und für weitere Ergebnisse zu Pinching-Konstanten Eliasson ([El]), Heintze ([H]) und Valiev ([Va])), daß für hinreichend kleine Werte der Pinching-Konstanten δ (nach [Pü] für $\delta < 1/37$) unter den Aloff-Wallach–, Eschenburg– und Bažaikin-Räumen unendliche Folgen von paarweise nichtdiffeomorphen, doch uniform δ-gepinchten Mannigfaltigkeiten existieren.

Das in seinen verschiedenen Teilen auch als Topologischer Sphärensatz von Berger-Klingenberg beziehungsweise Bergerscher Starrheitssatz bezeichnete obige Resultat warf bei Erscheinen jedoch zunächst die naheliegende Frage auf, ob es in diesem Sinne nicht direkt auf kleinere Pinching-Werte verallgemeinerbar sein könnte. Aufgrund der fundamentalen Rolle, die die von Klingenberg angegebenen uniformen Injektivitätsradius-Abschätzungen im Beweis dieser Ergebnisse gespielt hatten, galt dabei der Untersuchung dieser Problematik besonderes Interesse.

Der Injektivitätsradius einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist definierbar als die größte reelle Zahl, für die sich je zwei Punkte in der Mannigfaltigkeit, deren Abstand kleiner als diese Zahl ist, durch eine eindeutige kürzeste Geodätische miteinander verbinden lassen. Insbesondere ist jeder offene Ball in der Mannigfaltigkeit, dessen Radius kleiner als der Injektivitätsradius ist, diffeomorph zu einem Euklidischen Raum. Untere Schranken für den Injektivitätsradius einer Riemannschen Mannigfaltigkeit beschränken also auch die Komplexität der Topologie der Mannigfaltigkeit. Dies gilt insbesondere im kompakten Fall, denn hier ist der Injektivitätsradius stets positiv und die Mannigfaltigkeit läßt sich somit durch eine endliche Anzahl von kontrahierbaren Bällen überdecken.

Die für neue Sphärensätze erforderliche Lösung des Problems, untere Schranken für den Injektivitätsradius kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung zu finden, die nur von der Pinching-Konstanten und/oder der Dimension der Mannigfaltigkeit, aber nicht von der speziellen Metrik oder Mannigfaltigkeit selbst abhingen, erwies sich jedoch als äußerst schwierig.

Bereits 1962 demonstrierte Berger anhand der Stauchung der kanonischen Metrik auf dem Totalraum der Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$ längs deren Orbiten, daß solche unteren Schranken, falls überhaupt existent, für Pinching-Konstanten unterhalb von 1/9 selbst bei fester Wahl der Mannigfaltigkeit und im Gegensatz zu Klingenbergs Ergebnissen im allgemeinen vom speziellen Wert der Pinching-Konstanten abhängen (vergleiche [Be4]). Darüber hinaus zeigt die Existenz unendlicher Folgen von uniform positiv gepinchten und paarweise nichtdiffeomorphen Aloff-Wallach–, Eschenburg– oder Bažaikin–Räumen in Verbindung mit Cheegers Endlichkeitssatz (siehe unten), daß dieses Problem für kleine Werte der Pinching-Konstanten tatsächlich überhaupt keine Lösung besitzt.

Ausgehend vom ersten diesbezüglichen Resultat Pogorelovs (vergleiche [Po]) waren bis zum letzten Jahr aus den Arbeiten Klingenbergs ([Kl1], [Kl2]), Burago-Toponogovs ([BT]), Cheeger-Gromolls ([CGr2]), Klingenberg-Sakais ([KS1]) und Abresch-Meyers ([AM1]) schließlich in den folgenden Fällen nur vom Wert der Pinching-Konstanten δ und/oder der Dimension der Mannigfaltigkeit abhängende untere positive Schranken für den Injektivitätsradius einer einfach zusammenhängenden m-dimensionalen δ-gepinchten beziehungsweise δ-Ricci-gepinchten Riemannschen Mannigfaltigkeit bekannt:

- Die Dimension m ist gerade und $\delta > 0$ beliebig
  (Klingenberg 1959);

  (Pogorelov 1946 : $m = 2$)

- Die Dimension m ist beliebig und $\delta \geq 1/4 - \varepsilon$, $\varepsilon \approx 10^{-6}$
  (Abresch-Meyer 1994);

  (Klingenberg 1961 : $\delta > 1/4$)
  (Cheeger-Gromoll, Klingenberg-Sakai 1980 : $\delta \geq 1/4$)

- Die Mannigfaltigkeit ist dreidimensional und $Ricci \geq \delta > 0$ beliebig, $K \leq 1$
  (Burago-Toponogov 1973).

Während das Resultat von Burago und Toponogov zeigte, daß Abschätzungen für den Injektivitätsradius auch unter der Bedingung positiven Ricci-Pinchings existieren konnten, führte die Abschätzung von Abresch und Meyer insbesondere zu neuen Sphärensätzen (siehe [AM1], [AM2] sowie [Be5], [Be6], und für andersartige Sphärensätze vor allem Grove-Shiohama ([GrS]) und Micallef-Moore ([MM])).

Parallel zur Suche nach neuen Injektivitätsradius-Abschätzungen erfuhren der Topologische Sphärensatz und Bergers Starrheitssatz in den Endlichkeitssätzen der Riemannschen Geometrie zudem noch ganz andere Weiterentwicklungen und Verallgemeinerungen.

Während der gesamten sechziger Jahre hatte man außer den Berger-Räumen keine weiteren Beispiele positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten finden können, doch sprach andererseits außer dem Satz von Lichnerowicz nichts gegen die Existenz vieler weiterer Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung.

Die Arbeiten Rauchs, Bergers und Klingenbergs hatten demonstriert, daß spezielle Krümmungs-Schranken und uniforme Schranken für den Injektivitätsradius es erlaubten, den topologischen Typ solcher Mannigfaltigkeiten bis auf endlich viele Möglichkeiten zu bestimmen. Hier waren diese bekannt und explizit gegeben. Doch wenn es schon schwierig schien, neue Beispiele positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten zu konstruieren und es sich deshalb erst recht als kompliziert gestaltete, Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung allgemein näher zu charakterisieren, so ließ sich als allererster Schritt in Richtung einer Klassifikation und unabhängig von ihrer genauen, da unbekannten Gestalt zumindest fragen, unter welchen geometrischen Voraussetzungen, vor allem: unter welchen Pinching-Bedingungen, eventuell jeweils nur endlich viele solcher Räume existierten.

Im Jahre 1967 veröffentlichte Weinstein (siehe [We1]) das unter Verwendung von Klingenbergs Injektivitätsradius-Abschätzung von 1959 erhaltene Ergebnis, daß für jedes $0 < \delta \leq 1$ unter den kompakten Mannigfaltigkeiten einer gegebenen geraden Dimension, welche eine δ-gepinchte Riemannsche Metrik tragen, stets nur endlich viele verschiedene Homotopietypen auftreten können. Ebenfalls unter Benutzung von Klingenbergs Resultat verschärfte Cheeger (siehe [Ch1]) im selben Jahr Weinsteins Ergebnis zu einer Endlichkeitsaussage für Diffeomorphietypen:

In jeder geraden Dimension gibt es für jedes $0 < \delta \leq 1$ bis auf Diffeomorphie nur endlich viele Mannigfaltigkeiten, auf denen eine δ-gepinchte Riemannsche Metrik existiert.

Weinsteins und Cheegers Resultate gaben den Anstoß zur Entwicklung weiterer Endlichkeitssätze. Dabei beschränkte man sich nicht mehr auf Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung, sondern studierte im folgenden in Kombination mit (zuvor durch den Satz von Bonnet und Myers automatisch gegebenen) Durchmesser-Schranken auch allgemeinere Krümmungsbedingungen.

Darüber hinaus untersuchte man die Frage, wann sich untere Schranken für den Injektivitätsradius, die bei Präsenz einer beidseitigen Krümmungs- und einer oberen Durchmesserschranke zur Existenz einer unteren Schranke für das Volumen äquivalent sind, durch die im allgemeinen schwächere Voraussetzung einer unteren positiven Volumenschranke ersetzen ließen.

Die nachstehende Übersicht listet die bis 1998 bekannten Endlichkeitssätze auf, in deren Voraussetzungen nur Schranken an bestimmte Krümmungsgrößen, Durchmesser und Volumen eingehen:

1970 veröffentlichte Cheeger das erste allgemeine Resultat dieser Art (siehe [Ch2]). Ein vollständiger Beweis des folgenden Satzes findet sich jedoch erst 1984 in einer Arbeit von Peters (siehe [Pet1]):

Für gegebene m, C, D und $V > 0$ enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Betrag der Schnittkrümmung $|K| \leq C$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$ stets nur endlich viele Diffeomorphietypen.

1988 erschien von Grove und Petersen (siehe [GrP1]) ein Endlichkeitssatz für Homotopietypen, der im Gegensatz zu Cheegers Resultat keine obere Krümmungsschranke benötigt:

Für gegebene m, C, D und $V > 0$ enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $K \geq C$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$ nur endlich viele Homotopietypen.

1990 publizierten Grove, Petersen und Wu (siehe [GrPW]) folgendes Ergebnis:

Für gegebene m, C, D und $V > 0$ enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $K \geq C$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$ für $m \geq 4$ nur endlich viele Homöomorphietypen, und für $m \geq 5$ nur endlich viele Diffeomorphietypen.

Hier ist anzumerken, daß dieses Resultat keine Aussage über den dreidimensionalen Fall macht und für Dimension $m \geq 5$ nach differentialtopologischen Resultaten von Kirby und Siebenmann (vergleiche [KS]) die Endlichkeit der Diffeomorphietypen aus der der Homöomorphietypen folgt.

Deshalb verschärft das folgende Ergebnis Perelmans von 1991 (siehe [Per1]), welches tatsächlich sogar allgemeiner auch für Alexandrov-Räume gilt (vergleiche hierzu Satz 1.19 in Kapitel 1), den vorstehend genannten Satz:

Für gegebene m, C, D und $V > 0$ enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $K \geq C$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$ nur endlich viele Homöomorphietypen.

1991 publizierten Anderson und Cheeger (siehe [AC]) einen Diffeomorphietypenendlichkeitssatz, in den Schranken an Ricci- und Totalkrümmung eingehen:

Für gegebene m, C, C', D und $V > 0$ enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $\int_M |R|^{m/2} \leq C$, $|Ricc| \leq C'$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$ nur endlich viele Diffeomorphietypen.

Allen diesen Sätzen ist gemein, daß sie eine positive untere Schranke für das Volumen benötigen, die Kollaps-Phänonome aussschließt. Daß eine solche Schranke in sämtlichen dieser Resultate notwendig ist, ist bereits am Beispiel einer Folge von Linsenräumen $M_n = S^3/\mathbb{Z}_n$ ersichtlich.

Für allgemein vorgegebene Klassen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist die Existenz uniformer Volumenschranken jedoch wenn überhaupt, dann oftmals nur schwer zu etablieren. Der folgende Satz von Gromov nimmt deshalb unter sämtlichen der oben genannten Resultate eine Sonderstellung ein und wurde bei seinem Erscheinen im Jahre 1981 als Sensation aufgefaßt. Gromovs Bettizahlen-Satz (siehe [G3]) liefert bei unterer Krümmungs- und oberer Durchmesserschranke anstelle von Homöo- oder Diffeomorphietypenendlichkeit zwar "nur" Endlichkeit der Homologietypen, benötigt dafür aber keinerlei Volumen-Annahme:

Ist $\mathbb{K}$ ein gegebener Körper und bezeichnet $b_i(M) = b_i(M;\mathbb{K})$ die Dimension der i-ten singulären Homologiegruppe $H_i(M;\mathbb{K})$ eines topologischen Raumes M über $\mathbb{K}$, so existiert eine Konstante $B = B(m)$ mit folgenden Eigenschaften:
Die totale Bettizahl $\Sigma_i\, b_i(M) = dim_{\mathbb{K}} H_*(M;\mathbb{K})$ jeder m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit nichtnegativer Schnittkrümmung ist von oben beschränkt durch $B(m)$, und die totale Bettizahl jeder m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq -\kappa^2$ und Durchmesser $\leq D$ ist von oben beschränkt durch $B(m)^{1+\kappa D}$.

Nach dieser Darstellung vorangegangener Untersuchungen zu Endlichkeitsaussagen und den Beziehungen zwischen positiver Krümmung und Topologie sei nun ein Überblick über die Gliederung der nachstehenden Teile der vorliegenden Schrift und einige der dort enthaltenen Resultate gegeben.

Kapitel 1 gibt eine Einführung in die von Gromov beziehungsweise Burago-Gromov-Perelman respektive Cheeger-Gromov initiierten Theorien der Konvergenz metrischer Räume, der Alexandrov-Räume und der Struktur kollabierter und kollabierender Riemannscher Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung. Spätere Kapitel der Arbeit greifen oftmals auf Ergebnisse dieser Theorien zurück, welche in der Literatur bislang nur in verstreuter oder teilweise wenig transparenter und uneinheitlicher Form zu finden sind, und die hier gegebenene systematische Zusammenschau ist insbesondere auch dazu gedacht, die Lektüre der an diese anschließenden Teile der Arbeit zu erleichtern.

Kapitel 2 diskutiert die Konstruktion und Eigenschaften positiv gekrümmter Metriken auf Totalräumen von Faserbündeln und präsentiert ein Ergebnis von Gilkey, Park und dem Autor dieser Schrift, das sich im Kontext von Prinzipalbündeln als Umkehrung des Satzes von Bonnet und Myers deuten läßt und neue Beispielklassen von Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung und zudem Invarianzbedingungen erfüllende Metriken liefert:

Satz *Ist (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik positiver Ricci-Krümmung, G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel über M, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Fundamentalgruppe des Totalraumes P ist endlich.*

(b) *Auf P existiert eine G-invariante Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung, bezüglich der die Projektion π eine Riemannsche Submersion ist.*

Kapitel 3 behandelt einen keine untere Volumenschranke erfordernden Diffeomorphietypen-Endlichkeitssatz, der in gemeinsamer Arbeit mit Petrunin entstand und aus dem sich insbesondere neue Obstruktionen für die Existenz unendlicher Beispielserien von uniform positiv oder Ricci-positiv gepinchten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ergeben:

Satz *Für gegebene m, C, und D enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, welche eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ tragen, nur endlich viele Diffeomorphietypen.*

Kapitel 4 behandelt neben einem Endlichkeitsresultat für Homotopiegruppen eine Diffeomorphietypen-Endlichkeitsaussage, die zeigt, daß bis Dimension sieben im oben stehenden Ergebnis die einschneidende Voraussetzung der Endlichkeit der zweiten Homotopiegruppe unnötig ist und sich in Cheegers Endlichkeitssatz die untere Volumenschranke durch nur die Bedingung der Trivialität der Fundamentalgruppe ersetzen läßt, und die insbesondere auch erklärt, weshalb unendliche Beispielserien von uniform positiv oder Ricci-positiv gepinchten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten erst in dieser Dimension auftreten können:

Satz *Für gegebene C und D enthält die Klasse der kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten der Dimension < 7 mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ nur endlich viele Diffeomorphietypen.*

Kapitel 5 behandelt direkt mit dem Injektivitätsradius positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten in Zusammenhang stehende Fragen. Neben einem Struktursatz für positiv gekrümmte Mannigfaltigkeiten mit kleinem Injektivitätsradius, aus dem sich eine qualitative Erklärung und Version der Klingenbergschen Abschätzungen für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension ergibt (vergleiche hierzu Seite 66 ff.), handelt es sich dabei um die folgende, mit Petrunin erarbeitete und den Satz von Burago-Toponogov auf beliebige Dimension verallgemeinernde Injektivitätsradius-Abschätzung sowie einen als deren Anwendung gegebenen neuen Sphärensatz:

Satz *Für jedes m und $\delta > 0$ existieren nur von m und δ abhängende positive Konstanten i_0, so daß der Injektivitätsradius jeder m-dimensionalen einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit endlicher zweiter Homotopiegruppe und $Ricc \geq \delta$, $K \leq 1$ von unten durch i_0 beschränkt ist.*

Satz *Für jedes m und jedes C existiert eine nur von diesen Größen abhängende positive Konstante $\varepsilon = \varepsilon(m, C) > 0$, so daß für jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit M gilt: Existiert auf M eine vollständige Riemannsche Metrik mit $Ricc \geq m - 1$, $K \leq C$ und Durchmesser $\geq \pi - \varepsilon$, so ist M diffeomorph zu S^m.*

Das abschließende Kapitel 6 diskutiert einen Formalismus, der es gestattet, Endlichkeitsaspekte aus einer allgemeineren und vereinheitlichenden konvergenztheoretischen Sichtweise heraus zu betrachten.

1. Konvergenz, Alexandrov-Räume und Kollaps

Dieses Kapitel stellt die wichtigsten der im folgenden benötigten Begriffe und Resultate aus den Theorien der Gromov-Hausdorff-Konvergenz metrischer Räume und Alexandrov-Räume sowie der Strukturtheorie kollabierter Mannigfaltigkeiten zusammen. Als allgemeine Referenzen zu diesen Themen seien für Abschnitt 1 die Arbeit [Fu4] und Monographie [G8], für Abschnitt 2 die Arbeit [BGP], und für Abschnitt 3 die Arbeit [CFG] genannt.

Der Abstand zweier Punkte p and q eines metrischen Raumes wird im folgenden mit $|pq|$ bezeichnet. Ferner wird die Konvention getroffen, metrische Räume stets nur bis auf Isometrie zu betrachten, so daß also zwischen einem solchen Raum und seiner Isometrieklasse nicht weiter unterschieden wird.

1. Konvergenz metrischer Räume

Der klassische *Hausdorff-Abstand* $d_H^Z(X,Y)$ zweier Teilmengen X und Y eines metrischen Raumes Z ist definiert als das Infimum aller positiven Zahlen ε, für die die abgeschlossene ε-Umgebung von X sowie die entsprechende Umgebung von Y sich wechselseitig enthalten. Auf der Klasse $\mathcal{C}_Z$ aller (nichtleeren) abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von Z definiert d_H^Z sodann eine Metrik, und falls Z kompakt oder vollständig ist, gilt dasselbe für $(\mathcal{C}_Z, d_H^Z)$.

Dieser Abstandsbegriff für Teilmengen eines fest vorgegebenen metrischen Raumes wurde von Gromov in [G2] verallgemeinert wie folgt:

1.1. Definition *Der (Gromov-)Hausdorff-Abstand $d_H(X,Y)$ zweier metrischer Räume X und Y ist erklärt als die größte untere Schranke der Hausdorff-Abstände $d_H^Z(X,Y)$, wobei Z die disjunkte Vereinigung von X und Y bezeichnet und das Infimum über alle Metriken auf Z gebildet wird, welche die Metriken auf X und auf Y fortsetzen.*

Versehen mit dem Hausdorff-Abstand d_H ist die Menge $\mathcal{M}$ (der Isometrieklassen) aller kompakten metrischen Räume ein vollständiger und separabler metrischer Raum.

Eine Teilfamilie $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ kompakter metrischer Räume heißt *gleichmäßig kompakt*, falls ein $D > 0$ existiert, so daß der Durchmesser aller $X \in \mathcal{S}$ von oben durch D beschränkt ist, und ferner für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, so daß sich jedes $X \in \mathcal{S}$ durch höchstens N abgeschlossene ε-Bälle überdecken läßt.

Nach *Gromovs Kompaktheitskriterium* (siehe [G2], [G8]) sind gleichmäßig kompakte Teilmengen von $\mathcal{M}$ präkompakt bezüglich d_H: Jede in einer gleichmäßig kompakten Teilmenge von $\mathcal{M}$ enthaltene Folge metrischer Räume enthält eine Hausdorff-konvergente Teilfolge. Aus dem Kompaktheitskriterium und der Bishop-Gromov-Ungleichung folgt (vergleiche [G8]) *Gromovs Präkompaktheitssatz*:

1.2. Satz *Für gegebene m, κ und D ist die Klasse $\mathcal{S}_m(\kappa, D)$ aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Durchmesser $\leq D$ und Ricci-Krümmung $Ricc \geq (m-1)\kappa$ bezüglich des Hausdorff-Abstandes d_H in $\mathcal{M}$ präkompakt.*

1.3. Definition *Der Lipschitz-Abstand $d_L(X, Y)$ zweier metrischer Räume X und Y ist definiert als das Infimum der Zahlen $|\log \text{dil } f| + |\log \text{dil } f^{-1}|$, wobei* $\text{dil f} = \sup \{ \, |f(p)f(q)| \, / \, |pq| \, : \, p \neq q \in X\}$ *die beste Lipschitz-Konstante von f bezeichnet und f über alle Bi-Lipschitz–Homöomorphismen von X und Y läuft.*

Der Lipschitz-Abstand d_L erfüllt für bi-Lipschitz-homöomorphe metrische Räume die Axiome einer Pseudometrik, und kompakte metrische Räume sind genau dann isometrisch, wenn ihr Lipschitz-Abstand gleich Null ist.

1.4. Definition *Für gegebene m, C, D und $V > 0$ bezeichne $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ die Klasse aller m-dimensionalen kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Betrag der Schnittkrümmung $|K| \leq C$, Durchmesser $\leq D$ und Volumen $\geq V$.*

Lipschitz-Konvergenz impliziert Hausdorff-Konvergenz, aber die Umkehrung dieses Sachverhaltes gilt im allgemeinen nicht. Gromov zeigte jedoch (vergleiche [G8], und für einen detaillierten Beweis [Kat]), daß der Hausdorff-Abstand und der Lipschitz-Abstand auf den Klassen $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ dieselbe Topologie induzieren. Zusammen mit Shikatas Resultat, daß Mannigfaltigkeiten aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$, deren Lipschitz-Abstand hinreichend klein ist, diffeomorph sind (vergleiche [Shik]), wird diese Aussage auch als *Gromovs Diffeomorphismussatz* bezeichnet:

1.5. Satz *Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(m, C, D, V) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist der Hausdorff-Abstand zweier Riemannscher Mannigfaltigkeiten aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ kleiner als δ, so ist ihr Lipschitz-Abstand kleiner als ε und die Mannigfaltigkeiten sind diffeomorph.*

Als unmittelbare Folgerung aus dem Präkompaktheits- und dem Diffeomorphismussatz erhält man die von Peters gegebene stärkere Fassung von Cheegers Endlichkeitssatz (vergleiche [Ch1], [Pet1]):

1.6. Satz *Für gegebene m, C, D und $V > 0$ enthält $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ höchstens endlich viele Diffeomorphietypen.*

Eine Lipschitz-Präkompaktheitsaussage für die Klassen $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ liefert *Gromovs Konvergenzsatz*, welcher in der Originalfassung (vergleiche [G8]) besagt, daß diese in der Klasse glatter Mannigfaltigkeiten der Dimension m mit stetigen metrischen Tensoren und $C^{1,1}$-Abstandsfunktionen d_L-präkompakt sind. Elaborierte Versionen dieses Satzes wurden von Greene-Wu ([GW]), Kasue ([Kas]), Peters ([Pet2]), Hebey-Herzlich ([HH]) (siehe auch [Pugh]) sowie von Nikolaev ([Nik3]) angegeben. Die erstgenannten Arbeiten verwenden Approximationen von Lipschitz-Limiten aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ durch glatte Riemannsche Mannigfaltigkeiten und beruhen darauf, daß sich nach Jost und Karcher ([JK]) Mannigfaltigkeiten aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ durch eine nicht von der Mannigfaltigkeit abhängende endliche Anzahl von Bällen mit speziellen harmonischen Koordinatensystemen überdecken lassen. Nikolaevs Zugang basiert auf einer von diesem in den Arbeiten [Nik1], [Nik2] entwickelten Parallelverschiebung und Regularisierungskonstruktion für stetige Riemannsche Tensoren auf metrischen Räumen mit lokal fortsetzbaren Geodätischen und im Alexandrov-Sinn beidseitig beschränkter Krümmung (vergleiche Abschnitt 2), wobei die Existenz solcher Metriken auf Lipschitz-Limiten von Elementen aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ aus Resultaten Berestovskijs ([Ber], siehe auch [BN]) folgt. Der Konvergenzsatz läßt sich in der folgenden Form angeben:

1.7. Satz *Für jede Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_m(C, D, V)$ und jedes $0 < \alpha < 1$ existieren eine Teilfolge $(M_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ von (M_n), eine glatte Mannigfaltigkeit M mit metrischem Tensor g der Hölder-Klasse $C^{1,\alpha}$ und Diffeomorphismen $f_{n_k} : M \to M_{n_k}$, so daß die Folge $(M_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ in der Lipschitz-Topologie gegen (M, g) konvergiert und für jedes $0 < \alpha' < 1$ die auf M zurückgezogenen Metriken $f_{n_k}^* g_{n_k}$ in der $C^{1,\alpha'}$-Topologie gegen g konvergieren.*

Das Konzept der Hausdorff-Konvergenz kompakter metrischer Räume erlaubt verschiedene nichtkompakte und/oder äquivariante Verallgemeinerungen, siehe [Fu4]. Um die hier benötigten einzuführen, sei zunächst daran erinnert, daß ein metrischer Raum *eigentlich* genannt wird, falls seine sämtlichen Abstandsfunktionen eigentliche Abbildungen sind, also jeder abgeschlossene Ball von endlichem Radius kompakt ist. Nach dem Satz von Hopf und Rinow ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann eigentlich, wenn sie vollständig ist.

1.8. Definition *Es sei $\mathcal{M}^{pt}$ die Klasse aller eigentlichen metrischen Räume (X, p) mit ausgezeichnetem Basispunkt. Eine Folge $(X_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^{pt}$ konvergiert in der Hausdorff-Topologie mit Basispunkt gegen einen eigentlichen metrischen Raum (X, p), falls auf der disjunkten Vereinigung der Menge der Räume X_n und X eine Metrik d existiert, die die Metriken sämtlicher Räume X_n sowie die Metrik von X fortsetzt, und so daß bezüglich des klassischen Hausdorff-Abstandes auf dieser disjunkten Vereinigung für jedes $R > 0$ die abgeschlossenen d-Bälle $B_n = B(p_n, R) \subset X_n$ zu $B = B(p, R) \subset X$ konvergieren.*

Gromovs Präkompaktheitssatz gilt nunmehr in folgender Form (siehe [G8]):

1.9. Satz *Die Klasse $\mathcal{S}_m^{pt}(\kappa)$ aller vollständigen m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Basispunkt und Ricci-Krümmung $Ricc \geq (m-1)\kappa$ ist bezüglich der Hausdorff-Topologie mit Basispunkt präkompakt in $\mathcal{M}^{pt}$.*

Haben alle Räume X_n gleichmäßig beschränkten Durchmesser, so reduziert sich Konvergenz in der Hausdorff-Topologie mit Basispunkt auf gewöhnliche Hausdorff-Konvergenz. Insbesondere ist in dieser Situation der Grenzwert eindeutig bestimmt und unabhängig von der Wahl der Basispunkte.

Da selbst bei fester positiver unterer Schranke für die Injektivitätsradii Konvergenz in der Hausdorff-Topologie mit Basispunkt nicht notwendig Lipschitz-Konvergenz nach sich zieht, überträgt sich der Diffeomorphismussatz nicht auf die Situation unbeschränkten Durchmessers. Gromovs Konvergenzsatz verallgemeinert sich (vergleiche [Fu4]) jedoch wie folgt:

1.10. Satz *Konvergiert eine Folge $(M_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vollständiger m-dimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit Basispunkt und Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und von unten durch $i > 0$ beschränktem Injektivitätsradius in der Hausdorff-Topologie mit Basispunkt gegen einen metrischen Raum (X, p), so ist X eine glatte m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor der Klasse $C^{1,\alpha}$.*

1.11. Definition *Es bezeichne $\mathcal{M}(G)$ die Klasse aller kompakten metrischen Räume (X, G) mit isometrischer Wirkung einer kompakten topologischen Gruppe G. Eine Folge $(X_n, G)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(G)$ konvergiert in der G-Hausdorff-Topologie gegen einen kompakten metrischen G-Raum (X, G), falls auf der disjunkten Vereinigung der Menge der Räume X_n und X eine Metrik d existiert, so daß d die Metriken sämtlicher Räume X_n sowie die Metrik von X fortsetzt und die Räume X_n als Teilmengen der disjunkten Vereinigung bezüglich des klassischen Hausdorff-Abstandes gegen X konvergieren, und ferner Automorphismen $A_n : G \to G$ existieren, so daß bezüglich der Metrik d die Gruppe G isometrisch auf der disjunkten Vereinigung aller $(X_n, A_n(G))$ und (X, G) wirkt.*

Die G-Hausdorff-Konvergenz–Analoga des Präkompaktheits- und Diffeomorphismussatzes und der Zusammenhang zwischen G-Konvergenz und Konvergenz der Quotientenräume sind nach [Fu2] und [Fu4] gegeben durch folgende Resultate:

1.12. Satz *Die Klasse $\mathcal{S}_m(G, \kappa, D)$ aller kompakten Riemannschen m-dimensionalen G-Mannigfaltigkeiten mit Ricci-Krümmung $Ricc \geq (m-1)\kappa$ und Durchmesser $\leq D$ ist bezüglich der G-Hausdorff-Topologie präkompakt in $\mathcal{M}(G)$.*

1.13. Satz *Es existiert $\varepsilon = \varepsilon(m, C, D, V) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist der G-Hausdorff-Abstand zweier G-Mannigfaltigkeiten $M, N \in \mathcal{M}_m(C, D, V)$ kleiner als ε, so existieren ein Bi-Lipschitz-Diffeomorphismus $F : M \to N$ sowie ein Automorphismus A von G, welche die G-Wirkungen auf M und N konjugieren.*

1.14. Satz *Konvergiert eine Folge $(X_n, G)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(G)$ in der G-Hausdorff-Topologie gegen einen kompakten metrischen G-Raum (X, G), so konvergieren die (mit den von den isometrischen G-Wirkungen induzierten Metriken versehenen) Quotientenräume X_n/G bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes gegen den Quotientenraum X/G.*

Ersetzt man die Volumen- durch eine Injektivitätsradiusschranke, so gilt Satz 1.13 nach ([PT], Lemma 2.7) auch bei fehlender oberer Krümmungsschranke.

2. Alexandrov-Räume

Ein metrischer Raum X heißt *Längenraum*, falls der Abstand je zweier Punkte in X gegeben ist durch das Infimum der Längen aller (stetigen) Kurven, die diese Punkte miteinander verbinden. Eine *kürzeste Geodätische* $\overline{xy}$ zwischen zwei Punkten $x, y \in X$ ist eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve von x nach y, deren Länge mit dem Abstand $|xy|$ dieser Punkte übereinstimmt.

Ein *Dreieck* xyz in einem Längenraum X wird bestimmt durch drei Punkte $x, y, z \in X$ und drei kürzeste Geodätische $\overline{xy}, \overline{xz}, \overline{yz}$. Bezeichnet für eine gegebene reelle Zahl κ das Symbol S_κ die zweidimensionale Fläche konstanter Krümmung κ, so versteht man unter einem ($\kappa-$) *Vergleichsdreieck* für ein Dreieck xyz in X ein Dreieck $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ in S_κ, dessen Seitenlängen mit den jeweiligen Seitenlängen des Dreiecks xyz übereinstimmen. Vergleichsdreiecke existieren und sind für $\kappa \leq 0$ oder für $\kappa > 0$ und $|xy| + |xz| + |yz| < 2\pi/\sqrt{\kappa}$ bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

Ein Längenraum X heißt *Raum mit unterer Krümmungsschranke* κ, oder kurz *Raum mit* $K \geq \kappa$, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so daß für je vier Punkte $a, b, c, d \in U_x$ die Vergleichswinkel von a in den entsprechenden Vergleichsdreiecken in S_κ die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\tilde{\measuredangle} bac + \tilde{\measuredangle} cad + \tilde{\measuredangle} dab \;\leq\; 2\pi$$

Ist der Längenraum X eine eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\kappa > 0$, so verlangt man aus Konsistenzgründen zusätzlich, daß in diesem Fall der Durchmesser von X den Wert $\pi/\sqrt{\kappa}$ nicht überschreitet. Es gilt dann nach [BGP] in Verallgemeinerung der Sätze von Toponogov und Bonnet-Myers: Der Durchmesser eines vollständigen Raumes mit $K \geq \kappa > 0$ beträgt höchstens $\pi/\sqrt{\kappa}$.

Kehrt man in der obigen Ungleichung das Ungleichheitszeichen um, erhält man die Definition eines Raumes mit oberer Krümmungsschranke $K \leq \kappa$.

Ist X ein Raum mit $K \geq \kappa$ und vollständig, so gilt die obige Ungleichung global, also für beliebige (verschiedene) Punkte $a, b, c, d \in X$. Für lokalkompakte Räume stimmt die oben gegebene Definition von $K \geq \kappa$ mit der üblichen Abstandsvergleichsdefinition überein, nach der ein lokalkompakter Längenraum X ein Raum mit unterer Krümmungsschranke κ ist, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so daß für jedes Dreieck xyz in U_x und je zwei Punkte $y_o \in \overline{xy}, z_o \in \overline{xz}$ die Abstandsungleichung $|y_o z_o| \geq |\tilde{y}_o \tilde{z}_o|$ erfüllt ist, wobei $\tilde{y}_o$ und $\tilde{z}_o$ den Punkten y_o und z_o entsprechende Punkte im zum Dreieck xyz korrespondierenden κ-Vergleichsdreieck bezeichnen.

Erste Beispiele von Räumen mit $K \geq \kappa$ sind gegeben durch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $Sec \geq \kappa$ sowie Quotienten von Räumen mit $K \geq \kappa$ nach isometrischen Wirkungen mit abgeschlossenen Orbiten. Insbesondere weisen Räume mit $K \geq \kappa$ im allgemeinen metrische und/oder topologische Singularitäten auf.

Oftmals bezeichnet man Räume mit einer unteren Krümmungsschranke $K \geq \kappa$ synonym auch als Alexandrov-Räume. In der vorliegenden Schrift wird dieser Terminus für eine speziellere Klasse von Räumen verwandt:

1.15. Definition *Ein Alexandrov-Raum ist ein vollständiger Längenraum mit unterer Krümmungsschranke und endlicher Hausdorff-Dimension.*

Die Hausdorff-Dimension eines Alexandrov-Raumes stimmt nach [BGP] mit seiner topologischen Dimension überein und ist somit stets ganzzahlig.

Da Alexandrov-Räume lokalkompakt sind (vergleiche [BGP]), lassen sich in einem solchen Raum je zwei Punkte durch eine kürzeste Geodätische miteinander verbinden. Sind $\overline{xy}$ und $\overline{xz}$ zwei kürzeste Geodätische in einem Alexandrov-Raum X mit gemeinsamem Anfangspunkt x, so ist der *Winkel* zwischen $\overline{xy}$ und $\overline{xz}$ definiert als $\lim_{y_o, z_o \to x} \measuredangle y_o x z_o$, wobei $y_o \in \overline{xy}$ und $z_o \in \overline{xz}$. Die Existenz von Winkeln zwischen kürzesten Geodätischen in X folgt aus der Existenz einer unteren Krümmungsschranke und der Abstandsvergleichsdefinition.

Für einen Punkt x eines Alexandrov-Raumes X bezeichne G_x die Menge der Äqivalenzklassen von kürzesten Geodätischen mit Anfangspunkt x. Zwei solche Geodätische werden dabei als äquivalent betrachtet genau dann, wenn der Winkel zwischen ihnen Null ist, und somit also, da in Alexandrov-Räumen Geodätische nicht verzweigen, eine von beiden Geodätischen die andere enthält. Der Winkel zwischen kürzesten Geodätischen definiert auf G_x eine Metrik, und bezeichnet man mit Σ_x die diesbezügliche Vervollständigung von G_x, so ist Σ_x ein kompakter Alexandrov-Raum mit unterer Krümmungsschranke $K \geq 1$ (siehe [BGP]), der sogenannte *Richtungsraum* von X im Punkt x.

Im Falle einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist der Richtungsraum eines Punktes nichts anderes als die Einheitssphäre im betreffenden Tangentialraum. Das Analogon des Tangentialraums einer Riemannschen Mannigfaltigkeit bilden in Alexandrov-Räumen die Tangentialkegel:

Ist X ein Alexandrov-Raum und $x \in X$, so heißt der euklidische Kegel $C_x = C(\Sigma_x)$ über dem Richtungsraum Σ_x, d.h. der Kegel $C_x = (\Sigma_x \times [0, +\infty))/\Sigma_x \times 0$, versehen mit der Metrik $|(v,s)(w,t)|^2 = t^2 + s^2 - 2st \cos(\min\{|vw|, \pi\})$, *Tangentialkegel* von X in x.

Die Tangentialkegel eines Alexandrov-Raumes sind Alexandrov-Räume nichtnegativer Krümmung von gleicher Dimension wie der unterliegende Raum.

Die grundlegenden Strukturaussagen über Alexandrov-Räume stammen von Perelman. Sie basieren auf der soeben skizzierten Beschreibung derer infinitesimalen Struktur sowie einer Modifikation der von Grove und Shiohama initiierten Morse-Theorie für Abstandsfunktionen (siehe [Gr]) und werden im folgenden als *Perelmans Struktursatz* und *Perelmans Stabilitätssatz* bezeichnet (vergleiche dazu die Arbeiten [Per1]–[Per3]):

1.16. Satz *Jeder Punkt eines Alexandrov-Raumes besitzt eine offene Umgebung, welche zum Tangentialkegel dieses Punktes homöomorph ist. Ferner gilt: Ein Alexandrov-Raum besitzt eine Stratifikation in topologische Mannigfaltigkeiten. Die Strata der Dimension l bestehen aus den Punkten, deren Tangentialkegel homöomorph ist zum Produkt eines Kegels mit einem euklidischen Raum $\mathbb{R}^k$ einer Dimension $k \leq l$.*

1.17. Satz *Für jeden kompakten Alexandrov-Raum X existiert $\varepsilon(X) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist Y ein kompakter Alexandrov-Raum der gleichen Dimension und unteren Krümmungsschranke wie X und der Hausdorff-Abstand zwischen X und Y kleiner als ε, so sind X und Y homöomorph.*

Ein Punkt eines m-dimensionalen Alexandrov-Raumes X heißt *regulär*, falls sein Tangentialkegel isometrisch ist zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$, und ansonsten *singulär*. Bezeichnet S_X die Menge der singulären Punkte von X, so kann S_X dicht in X sein, besitzt aber nach [BGP] höchstens Hausdorff-Dimension $m - 1$. Nach Otsu und Shioya ([OS]) ist die Menge der regulären Punkte von X lokal wegzusammenhängend und besitzt eine differenzierbare Struktur der Klasse C^1 sowie eine assoziierte stetige Riemannsche Metrik, die mit der Restriktion der Metrik von X übereinstimmt.

Weitere Aussagen zu Struktur und Eigenschaften von Alexandrov-Räumen finden sich in den Arbeiten [FY2], [PP1], und [PP2].

Metrische Eigenschaften von Längen- und Alexandrovräumen bleiben unter Hausdorff-Konvergenz oftmals erhalten:

Hausdorff-Grenzwerte von Längenräumen sind selbst Längenräume, und ist (X_n) eine Hausdorff-konvergente Folge von Längenräumen, so übertragen sich, falls vorhanden, (gleichmäßige) obere Schranken für die Durchmesser oder die Hausdorff-Dimension der X_n oder untere Schranken für die Krümmung der X_n entsprechend auf den Hausdorff-Grenzwert X.

Als Konsequenz ergeben sich damit weitere Kompaktheitsresultate:

1.18. Satz *Die Klasse $\mathfrak{A}_m(\kappa, D)$ aller kompakten Alexandrov-Räume der Dimension $\leq m$ mit Durchmesser $\leq D$ und unterer Krümmungsschranke $K \geq \kappa$ ist kompakt in der Gromov-Hausdorff-Topologie.*

Die Klasse $\mathfrak{A}_m^{pt}(\kappa)$ aller Alexandrov-Räume mit Basispunkt der Dimension $\leq m$ und unterer Krümmungsschranke $K \geq \kappa$ ist kompakt in der Gromov-Hausdorff-Topologie mit Basispunkt.

Ferner gilt: Sind X_n und X kompakte Alexandrov-Räume gleicher Dimension m und gleicher unterer Krümmungsschranke, so folgt aus Hausdorff-Konvergenz der X_n gegen X die schwache Konvergenz der m-dimensionalen Hausdorff-Maße der X_n gegen das m-dimensionale Hausdorff-Maß von X ([BGP]). Definiert man das Volumen eines Alexandrov-Raumes der Dimension m als sein m-dimensionales Hausdorff-Maß, so ergibt sich aus dieser Tatsache und Perelmans Stabilitätssatz ein insbesondere den Endlichkeitssatz von Grove-Petersen-Wu verallgemeinernder Endlichkeitssatz für Alexandrov-Räume:

1.19. Satz *Die Klasse $\mathfrak{A}_m(\kappa, D, V)$ aller kompakten Alexandrov-Räume der Dimension m mit Durchmesser $\leq D$, unterer Krümmungsschranke $K \geq \kappa$ und Volumen $\geq V > 0$ enthält höchstens endlich viele Homöomorphietypen.*

Topologische Beziehungen zwischen den Elementen Hausdorff-konvergenter Folgen aus den Klassen $\mathfrak{A}_m(\kappa, D)$ und ihren Grenzwerten sind dagegen nur unter speziellen Zusatzvoraussetzungen (siehe zum Beispiel [Per6]) zu erwarten, da bei Fehlen unterer Volumenschranken solche Folgen im generischen Fall *kollabieren*, ihr Hausdorff-Limes also echt kleinere Dimension als die Folgeelemente hat.

Über das Verhalten der *Fundamentalgruppen* unter Hausdorff-Konvergenz in $\mathfrak{A}_m(\kappa, D)$ läßt sich allerdings eine allgemeine Aussage machen: Unter Benutzung der Tatsache, daß nach Perelmans Struktursatz Alexandrov-Räume lokal einfach zusammenhängend sind, überträgt sich ein in [Tu1] für kollabierende Folgen Riemannscher Mannigfaltigkeiten gegebener Beweis auf Alexandrov-Räume, so daß gilt:

1.20. Satz *Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}_m(\kappa, D)$ Hausdorff-konvergent mit Grenzwert X, so existieren für hinreichend große n surjektive Gruppenhomomorphismen von $\pi_1(X_n)$ auf $\pi_1(X)$.*

3. Kollaps Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Während Gromovs Diffeomorphismus- und Konvergenzsatz über die metrische und topologische Struktur der Hausdorff-Grenzwerte von Folgen aus $\mathcal{M}_m(C, D, V)$ vollständig Auskunft geben, erfordert die Beschreibung der im Falle fehlender Volumen- oder Injektivitätsradiusschranken auftretenden Phänomene zusätzliche Konzepte.

In den Arbeiten von Cheeger, Fukaya und Gromov existieren dazu zwei unterschiedliche Ansätze, aus deren Kombination sich im Fall beschränkten Durchmessers als grundlegender Struktursatz der sogenannte äquivariante Faserbündelsatz (siehe Satz 1.26) ergibt. Dieses Resultat folgt zwar aus den Originalarbeiten von Cheeger, Fukaya und Gromov, ist jedoch nur in Teilen oder lokalen Versionen in diesen enthalten. Zum besseren Verständnis des äquivarianten Faserbündelsatzes und seiner Konsequenzen für Hausdorff-konvergente kollabierende Folgen kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten, aber auch dessen Herleitung, erläutert dieser Abschnitt vor deren Darstellung zuächst die von Cheeger–Gromov und Fukaya ursprünglich gewählten Zugänge.

Ausgangspunkt für das Studium von Kollaps-Phänomenen ist die Vorstellung, daß eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung in Punkten mit hinreichend kleinem Injektivitätsradius längs der Richtungen, in denen kurze geschlossene Geodätische existieren, gewisse lokale Symmetrien aufweisen muß, was heuristisch motivierbar ist wie folgt:

Es sei $(M_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von vollständigen m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit gleichmäßig beschränkter Schnittkrümmung $|K| \leq C$, in denen Punkte $p_n \in M_n$ existieren, so daß die Injektivitätsradii $i_n = inj_{g_n}(p_n)$ der Metriken g_n in diesen Punkten für $n \to \infty$ gegen Null konvergieren. Ersetzt man die Metriken g_n durch $h_n := g_n/i_n^2$, so erfüllen diese $inj_{h_n}(p_n) = 1$ und $|K_{h_n}| \leq i_n^2 \to 0$, so daß aufgrund des Präkompaktheits- und Konvergenzsatzes nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge die Räume $((M_n, p_n), h_n)$ in der Gromov-Hausdorff-Topologie gegen eine flache Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, p) konvergieren. Nach dem Seelensatz von Cheeger und Gromoll ([CGr1]) ist M diffeomorph zum Normalenbündel einer kompakten flachen und total geodätischen Untermannigfaltigkeit $S \subset M$, so daß auf einer endlichen Riemannschen Überlagerung von M eine isometrische Toruswirkung existiert. Da Bälle in M um p Lipschitz-nah sind zu Bällen in (M_n, h_n) um p_n, gibt es somit für hinreichend große n auf endlichen Überlagerungen von Umgebungen von p_n in (M, g_n) eine nichttriviale Toruswirkung.

Die Dimension dieser Tori hängt im allgemeinen von der Wahl der Basispunkte ab, doch ihre lokalen Wirkungen erfüllen gewisse Verträglichkeitsbedingungen.

Cheeger und Gromov entwickelten zur Beschreibung der Struktur kollabierter Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung in der Arbeit [CG1] zunächst die Theorie der $\mathcal{F}$-Strukturen, in der Gruppenwirkungen durch das allgemeinere Konzept der Wirkungen von Garben ersetzt werden.

1.21. Definition *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{X}(M)$ die Garbe der glatten Vektorfelder auf M. Ist $\mathcal{G}$ eine Garbe zusammenhängender Liegruppen auf M mit assoziierter Garbe $\mathfrak{G}$ von Liealgebren, so versteht man unter einer Wirkung der Garbe $\mathcal{G}$ auf M einen Garben-Homomorphismus $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{X}(M)$.*

Operiert auf einer Mannigfaltigkeit M eine Garbe $\mathcal{G}$ von Liegruppen vermöge eines Homomorphismus $\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{X}(M)$ und ist U eine offene Teilmenge von M, so versteht man unter einer *Integralkurve* eines Schnittes $X \in \mathcal{G}(U)$ eine differenzierbare Kurve $\gamma : (a,b) \to U$, die in jedem Punkt ihres Bildes tangential an $\Phi(X)$ ist. Eine Teilmenge von M heißt *invariant* unter der Wirkung von $\mathcal{G}$, falls jede Integralkurve eines jeden Schnittes von $\mathfrak{G}$, die diese Teilmenge trifft, bereits ganz in dieser enthalten ist. Der ($\mathcal{G}$-) *Orbit* $\mathcal{O}_p$ eines Punktes $p \in M$ ist definiert als die eindeutig bestimmte minimale $\mathcal{G}$-invariante Teilmenge von M, die p enthält. Eine Riemannsche Metrik auf M heißt *G-invariant*, falls die Bildgarbe $\Phi(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{X}(M)$ aus lokalen Killing-Vektorfeldern dieser Metrik besteht.

Nach [CG2] gibt es in jeder Dimension m eine nur von m abhängige positive Konstante ε mit folgender Eigenschaft: Ist (M,g) eine m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Betrag der Schnittkrümmung $|K| \leq 1$, so existiert auf der Teilmenge aller Punkte von M, in denen der Injektivitätsradius der Metrik g kleiner als ε ist, eine *$\mathcal{F}$-Struktur von positivem Rang*, d.h. eine spezielle Wirkung einer Garbe von Abelschen Liegruppen auf M, deren sämtliche Orbiten positive Dimension haben. Die Orbiten der $\mathcal{F}$-Struktur beschreiben die Richtungen, in denen der Injektivitätsradius kleiner als ε ist, und nach einer leichten Deformation der Metrik g (vergleiche [CG2]) läßt sich annehmen, daß diese bezüglich der $\mathcal{F}$-Struktur invariant ist.

In gewisser Umkehrung der obigen Aussagen gilt andererseits nach [CG1]: Existiert auf einer Mannigfaltigkeit M eine $\mathcal{F}$-Struktur positiven Ranges, so gibt es auf M invariante Metriken mit beschränkter Krümmung $|K| \leq 1$ und beliebig kleinen Injektivitätsradien.

Das exemplarische Beispiel einer $\mathcal{F}$-Struktur von positivem Rang auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist gegeben durch eine glatte und fixpunktfreie Toruswirkung auf M mit Orbiten hinreichend kleinen Durchmessers.

Eine *reine* $\mathcal{F}$-Struktur auf M, d.h. eine $\mathcal{F}$-Struktur, für die die Halme der wirkenden Garbe konstante Dimension besitzen, läßt sich nach [CG1] und [CG2] (siehe auch [Fu4]) auch beschreiben als ein flaches T^k-Bündel über M mit Holonomie in $SL(k, \mathbb{Z})$ und einem Homomorphismus des assoziierten Liealgebra-Bündels in die Garbe der glatten Vektorfelder auf M. Da die Holonomiegruppe eines solchen Bündels, also die durch Parallelverschiebung längs geschlossener Kurven gegebene Darstellung von $\pi_1(M)$ in $SL(k, \mathbb{Z})$, im allgemeinen nicht-trivial ist, sind (wie sich bereits am Beispiel einer Kleinschen Flasche veranschaulichen läßt) selbst reine $\mathcal{F}$-Strukturen in den meisten Fällen nicht durch globale Wirkungen definierbar.

Ist andererseits die Holonomiegruppe eines solchen flachen T^k-Bündels über M trivial, so reduziert sich nach Wahl eines Isomorphismus zwischen einer Faser und dem Standard-Torus $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ die reine $\mathcal{F}$-Struktur stets zu einer globalen T^k-Wirkung. Wie zuerst in [CG3] (siehe auch [CR]) bemerkt wurde, gilt somit:

1.22. Bemerkung Jede reine F-Struktur von positivem Rang auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist gegeben durch eine globale glatte und fixpunktfreie T^k-Wirkung.

Fukayas Ansatz zum Studium kollabierter Mannigfaltigkeiten basiert dagegen auf dessen Faserbündel-Versionen ([Fu1], [Fu3]) von Gromovs Satz über fast flache Mannigfaltigkeiten (siehe [G1], [Ruh]). Kollabiert eine Folge kompakter m-dimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeit M_n beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit N niedrigerer Dimension, so besitzen nach [Fu3] (siehe auch [Fu4]) für hinreichend große n die Mannigfaltigkeiten M_n die Struktur eines Faserbündels über N, dessen Fasern Infranilmannnigfaltigkeiten sind und dessen Strukturgruppe in der affinen Gruppe der Faser enthalten ist. Setzt man nicht voraus, daß N eine Mannigfaltigkeit ist, so gilt eine äquivariante Version dieses Sachverhaltes (vergleiche [Fu3], [Fu4]): Nach eventueller Regularisierung der Metrik von M_n konvergieren die mit der kanonischen Metrik (siehe unten) versehenen Rahmenbündel FM_n der M_n in der $O(m)$-Hausdorff-Topologie gegen eine glatte Mannigfaltigkeit Y mit metrischem Tensor der Klasse $C^{1,\alpha}$, deren Quotientenraum $Y/O(m)$ isometrisch zu N ist, und die Rahmenbündel FM_n sind Faserbündel über Y mit Nilmannigfaltigkeiten als Faser und in der affinen Gruppe der Faser enthaltener Strukturgruppe.

Die $\mathcal{F}$-Strukturen Cheegers und Gromovs beschreiben kollabierte Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung nur aus der Sicht des Injektivitätsradius und somit nur die "kürzesten" Richtungen in der Mannigfaltigkeit. Im allgemeinen finden Kollapsphänome jedoch gleichzeitig auf verschiedenen Längenskalen statt. Um beispielsweise eine Nilmannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe nicht Abelsch und die ein Faserbündel über einem Torus ist, bei beschränkter Krümmung zu einem Punkt zu kollabieren, ist es erforderlich, den Durchmesser der Fasern linear, den der Basis aber quadratisch zu Null zu skalieren.

Unter der zusätzlichen Voraussetzung beschränkten Durchmessers liefert Fukayas Zugang dagegen Informationen über sämtliche kollabierte Richtungen.

In der gemeinsamen Arbeit [CFG] erfolgte schließlich eine Synthese beider Ansätze, in der die Abelschen F-Strukturen durch Wirkungen von Garben nilpotenter Liegruppen ersetzt und mit einer äquivarianten lokalen Version von Fukayas Faserbündelsatz auf den kollabierten Mannigfaltigkeiten Metriken konstruiert werden, die nunmehr unter solchen "$\mathcal{N}$-Strukturen" invariant sind.

Da in der vorliegenden Arbeit nur Ergebnisse über kollabierte Mannigfaltigkeiten *beschränkten Durchmessers* benötigt werden, wird zur Vermeidung einer unnötig komplizierten Darstellung von einer weiteren Erläuterung der allgemeinen Resultate aus [CFG] abgesehen und im folgenden nur dieser speziellere Fall betrachtet.

Die Spezialisierung auf Mannigfaltigkeiten beschränkten Durchmessers gestattet es, sämtliche Ergebnisse äquivariant auf deren Rahmenbündeln zu formulieren, was zu einer wesenlich einfacheren und praktischer zu handhabenderen Beschreibung führt. Insbesondere ist in dieser Situation — auch wenn es für ein weiteres Verständnis der im folgenden auf den Rahmenbündeln definierten invarianten Strukturen und Metriken durchaus hilfreich ist, aus den vorangegangenen Erläuterungen darüber in Kenntnis zu sein, daß diese letztlich von allgemeineren Objekten auf der Basismannigfaltigkeit herrühren — keinerlei Rückgriff auf Garbenterminologie erforderlich.

Diese Vereinfachungen erklären sich dadurch, daß im Fall beschränkten Durchmessers eine $\mathcal{N}$- oder $\mathcal{F}$-Struktur stets rein ist, und zudem (in Analogie zur Tatsache, daß eine Isometrie einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit durch ihr Differential in einem Punkt eindeutig bestimmt ist) nach Hochhebung durch Differentiation auf das Rahmenbündel die lokalen Wirkungen einer solchen Struktur von besonders einfacher Gestalt, nämlich frei sind.

Ist G eine zusammenhängende Liegruppe, so ist der *kanonische Zusammenhang* ∇^0 von G definiert als der affine flache Zusammenhang auf dem Tangentialbündel von G, für den alle linksinvarianten Vektorfelder auf G parallel sind. Bezeichnet $\mathrm{Aff}(G, \nabla^0)$ die Gruppe der affinen Transformationen von ∇^0, also die Gruppe aller Diffeomorphismen von G auf sich, die ∇^0 invariant lassen, so ist nach Wahl eines Basispunktes $\mathrm{Aff}(G, \nabla^0)$ isomorph zum semidirekten Produkt $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$, versehen mit der Gruppenstruktur $(\lambda, k) \cdot (\mu, l) = (\lambda \cdot k(\mu), k \circ l)$, und die effektive Wirkung der Gruppe der affinen Transformationen auf G ist gegeben durch $(\lambda, k) \cdot g = \lambda \cdot k(g)$.

Operiert eine diskrete Untergruppe $\Gamma < \mathrm{Aff}(G, \nabla^0)$ frei auf G, so ist der Quotientenraum $\Gamma \backslash G$ eine Mannigfaltigkeit und trägt einen induzierten flachen Zusammenhang, der ebenfalls mit ∇^0 bezeichnet wird. Gilt darüber hinaus, daß Γ endlichen Index in G hat, so nennt man den Quotienten $\Gamma \backslash G$ *infrahomogenen Raum* der Liegruppe G. Ist die Untergruppe Γ in der zu G isomorphen Untergruppe der Linkstranslationen enthalten, so ist der Quotientenraum ein homogener Raum der Gruppe G, und zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes verwenden wir dann statt $\Gamma \backslash G$ die Notation G/Γ. Infrahomogene bzw. homogene Räume nilpotenter Liegruppen bezeichnet man als *Infranil-* bzw. *Nilmannigfaltigkeiten*.

1.23. Bemerkung In der Literatur werden Infranilmannigfaltigkeiten oftmals fälschlicherweise als Mannigfaltigkeiten definiert, die eine endliche Überlagerung durch eine Nilmannigfaltigkeit N/Γ besitzen. Tatsächlich ist jedoch zusätzlich zu verlangen, daß die Wirkung der Deckbewegungsgruppe einer solchen Überlagerung durch affine Transformationen des kanonischen Zusammenhanges auf N/Γ gegeben ist. Beispielsweise wird jeder exotische Torus vom Standard-Torus der entsprechenden Dimension endlich überlagert, doch sind exotische Tori nie zu einer Infranilmannigfaltigkeit diffeomorph (vergleiche hierzu [Tu2]).

Es sei (M, g) eine Riemannsche m-Mannigfaltigkeit und FM das Rahmenbündel von M, also das $O(m)$-Prinzipalbündel der Orthonormalbasen der Tangentialräume von M. (Ist M orientiert, benutzt man dieselbe Notation, betrachtet aber stattdessen das $SO(m)$-Bündel der orientierten Basen; alle weiteren Aussagen gelten sinngemäß.) Der Levi-Civita-Zusammenhang von g induziert nach Wahl einer bi-invarianten Metrik auf $O(m)$ eine eindeutig bestimmte Metrik auf FM, den *kanonischen Lift* g^{FM} von g, für die $O(m)$ isometrisch wirkt und die Projektion $FM \to M$ eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen Fasern ist.

Ist FM der Totalraum eines weiteren Faserbündels $F \to FM \to Y$, so nennt man das Faserbündel $F \to FM \to Y$ *$O(m)$-invariant*, falls die $O(m)$-Wirkung auf FM die Fasern und die Strukturgruppe dieses Bündels erhält.

1.24. Definition *Ein $O(m)$-invariantes Faserbündel $F \to FM \to Y$ heißt invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur auf FM, falls die Fasern F faserweise glatt variierende affine flache Zusammenhänge tragen und affin isomorph zu einer Nilmannigfaltigkeit der Form $(N/\Gamma, \nabla^0)$ sind und die Strukturgruppe des Bündels in der affinen Gruppe von N/Γ enthalten ist.*

1.25. Definition *Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, FM das Rahmenbündel von (M, g) und $F \to FM \to Y$ eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur auf FM. Ist $\bar{g}$ eine weitere Riemannsche Metrik auf M, so nennt man $\bar{g}$ invariant bezüglich der $\mathcal{N}$-Struktur auf FM, falls der kanonische Lift $\bar{g}^{FM}$ von $\bar{g}$ zu FM die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

Die Restriktion von $\bar{g}^{FM}$ auf die Fasern der $\mathcal{N}$-Struktur induziert linksinvariante Metriken auf den Fasern, und die Metrik $\bar{g}^{FM}$ induziert eine Riemannsche Metrik $\bar{g}^Y$ auf Y, bezüglich der die Projektion $p : FM \to Y$ eine Riemannsche Submersion ist.

Da die durch zwei Riemannsche Metriken auf einer Mannigfaltigkeit definierten Rahmenbündel als Mannigfaltigkeiten $O(m)$-äquivariant diffeomorph sind, ist diese Definition sinnvoll.

Aufgrund ihrer $O(m)$-Invarianz induziert eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur auf FM eine Partition von M in Orbiten, die Infranilmannigfaltigkeiten von im allgemeinen verschiedener Dimension sind. Besitzen alle diese Orbiten positive Dimension, spricht man von einer *$\mathcal{N}$-Struktur von positivem Rang*. Nach [CFG], [Fu1]–[Fu3] und [Ro2] gilt folgendes Resultat:

1.26. Satz *Ist (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 2$ mit Betrag der Schnittkrümmung $|K_g| \leq 1$ und Durchmesser $diam(g) \leq D$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Konstante $v = v(m, D, \varepsilon) > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

Ist das Volumen von (M, g) kleiner als v, so existiert auf dem Rahmenbündel von M eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur $p : FM \to Y$ von positivem Rang sowie auf M eine bezüglich dieser $\mathcal{N}$-Struktur invariante Metrik g_ε.

Diese erfüllen darüber hinaus die folgenden Bedingungen:

(a) *Es existieren nichtnegative Konstanten $C(m,l,\varepsilon)$, $l = 0,1,\ldots$, $C(m,0,\varepsilon) = 1$, und positive Konstanten $c(m)$ und $c'(m)$, so daß für die invariante Metrik g_ε gilt:*

$$e^{-\varepsilon} g < g_\varepsilon < e^{\varepsilon} g \ , \qquad |\,\nabla_g - \nabla_{g_\varepsilon}\,| < \ \varepsilon \ , \qquad |\,\nabla^l_{g_\varepsilon} R_{g_\varepsilon}\,| \leq \ C(m,l,\varepsilon) \ ,$$

$$\min K_g - c(m)\,\varepsilon \ \leq \ K_{g_\varepsilon} \ \leq \ \max K_g + c(m)\varepsilon \ ,$$

$$\min Ricc_g - c'(m)\,\varepsilon \ \leq \ Ricc_{g_\varepsilon} \ \leq \ \max Ricc_g + c'(m)\varepsilon \ ;$$

(b) *Für den kanonischen Lift g_ε^{FM} der invarianten Metrik g_ε zu FM gilt: Der Durchmesser aller Fasern der $\mathcal{N}$-Struktur $p : FM \to Y$ ist kleiner als ε, und es existieren höchstens von m, D und ε abhängende Konstanten L, $i > 0$, C' und D' mit folgenden Eigenschaften: Die Normen der zweiten Fundamentalformen der Fasern der $\mathcal{N}$-Struktur sind beschränkt durch L, der Injektivitätsradius der von g_ε^{FM} auf Y induzierten Riemannschen Metrik g_ε^Y ist von unten beschränkt durch i, die Krümmung der Metrik g_ε^Y erfüllt die Bedingung $|K| \leq C'$, und der Durchmesser von g_ε^Y ist von oben beschränkt durch D'.*

1.27. Bemerkung Der obige Satz ist nicht explizit, aber in lokaler Version in der Arbeit [CFG] enthalten; ähnliche Formulierungen von Satz 1.26 finden sich in den Arbeiten von Cheeger-Rong und Rong ([CR], [Ro2]). Daß die in Satz 1.26 auftretende $\mathcal{N}$-Struktur tatsächlich rein sowie von positivem Rang ist, folgt aus der Präsenz einer oberen Durchmesserschranke (vergleiche [Fu3]) und Proposition A1.14 in [CFG]. Die Eigenschaften der invarianten Metrik g_ε in 1.26(a) ergeben sich aus Theorem 1.3 in [CFG] und Theorem 2.1 in [Ro2]; für die letzte Abschätzung siehe auch Theorem 1.3(e) in [PT]. Die Aussagen in 1.26(b) folgen aus Satz 6.1 in [Fu2] sowie Satz 1.7, Proposition 5.4 und Abschätzung 8.7 in [CFG].

(Ohne dieses im folgenden zu benutzen, sei bemerkt, daß die in [CFG] konstruierten invarianten Metriken tatsächlich leicht stärkere Bedingungen als die in Definition 1.25 geforderten erfüllen: Eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur $p : FM \to Y$ definiert auf dem Rahmenbündel FM eine Garbe, deren lokale Schnitte bei Restriktion auf die Fasern der $\mathcal{N}$-Struktur lokale rechtsinvariante Vektorfelder sind und welche bezüglich der in [CFG] konstruierten invarianten Metrik lokale Killing-Vektorfelder auf dem Rahmenbündel definieren.)

1.28. Bemerkung Läßt man auch triviale Faserungen zu, so ergibt sich aus Satz 1.26 in Verbund mit Cheegers Endlichkeitssatz (Satz 1.6):

Für gegebene m und D existieren endlich viele kompakte Mannigfaltigkeiten Y_i, $i = 1, \ldots, l$, der Dimension $\leq m$, so daß für jede m-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit $|K| \leq 1$ und Durchmesser $\leq D$ gilt: Auf dem Rahmenbündel FM existiert eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur $F \to FM \to Y$, so daß Y diffeomorph zu einer der Mannigfaltigkeiten Y_i ist.

1.29. Bemerkung Ist $p : FM \to Y$ eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur von positivem Rang auf M und g_ε eine bezüglich dieser $\mathcal{N}$-Struktur invariante Metrik, so hat die $O(m)$-Invarianz der $\mathcal{N}$-Struktur zur Konsequenz, daß die $O(m)$-Wirkung auf (FM, g_ε^{FM}) zu einer isometrischen Wirkung auf (Y, g_ε^Y) hinabsteigt und ferner die Faserung von FM durch Nilmannigfaltigkeiten eine (im allgemeinen singuläre) Faserung von M durch Infranilmannigfaltigkeiten, $\bar{p} : M \to Y/O(m)$, induziert, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ M & \xrightarrow{\bar{p}} & Y/O(m) \end{array}$$

1.30. Bemerkung Da Nilmannigfaltigkeiten mit Abelscher Fundamentalgruppe diffeomorph zu Tori sind, folgt aus der langen exakten Homotopiesequenz von Faserbündeln: Ist die Fundamentalgruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M endlich, so ist die Faser einer invarianten reinen $\mathcal{N}$-Struktur auf FM ein Torus. $\mathcal{N}$-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe reduzieren sich somit stets auf $\mathcal{F}$-Strukturen. Nach Bemerkung 1.22 und Bemerkung 1.28 gilt damit insbesondere: Eine invariante reine N-Struktur von positivem Rang auf dem Rahmenbündel einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist gegeben durch eine freie T^k-Wirkung auf FM, die der Lift einer globalen glatten und fixpunktfreien T^k-Wirkung auf M ist und die mit der $O(m)$-Wirkung auf FM kommutiert.

Wendet man Satz 1.26 auf kollabierende Folgen von einfach zusammenhängenden (und ohne Einschränkung orientierten) kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers an, so ergibt sich aus diesem, zusammen mit den obenstehenden Bemerkungen, Perelmans Stabilitätssatz (Satz 1.17) und den Sätzen 1.12–1.14 (vergleiche auch [PT]):

1.31. Satz *Es sei $(M_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge einfach zusammenhängender m-dimensionaler kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $\lambda \leq K(g_n) \leq \Lambda$ und Durchmesser $\leq D$, die für $n \to \infty$ bezüglich des Hausdorff-Abstandes gegen einen metrischen Raum X der Dimension $m-k < m$ konvergiere.*

Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$, so daß für $n \geq N$ auf dem orientierten Rahmenbündel von M_n eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur $p_n : FM_n \to Y_n$ von positivem Rang sowie auf M_n eine bezüglich dieser $\mathcal{N}$-Struktur invariante Metrik $\bar{g}_n = \bar{g}_n^\varepsilon$ existiert, die (nach eventueller Reskalierung) die Aussagen aus Satz 1.26 erfüllt, und für die $\mathcal{N}$-Strukturen $p_n : FM_n \to Y_n$ und Metriken $\bar{g}_n$ gilt:

(a) *Die $\mathcal{N}$-Struktur $p_n : FM_n \to Y_n$ ist gegeben durch eine freie T^k-Wirkung, die der Lift einer fixpunktfreien und bezüglich $\bar{g}_n$ isometrischen T^k-Wirkung auf M_n ist, und es gelten die Abschätzungen*

$$e^{-\varepsilon} g_n < \bar{g}_n < e^{\varepsilon} g_n \ , \qquad \lambda - \varepsilon \ \leq \ K(\bar{g}_n) \ \leq \ \Lambda + \varepsilon;$$

(b) *Versieht man FM_n mit dem kanonischen Lift $\bar{g}_n^{FM}$ von $\bar{g}_n$, so existieren von ε, m, D, λ und Λ abhängende Konstanten C, $i > 0$, C' und D', so daß die Schnittkrümmung von FM_n beschränkt ist durch $|K(FM_n)| \leq C$, der Injektivitätsradius der auf $Y_n = FM_n/T^k$ induzierten Metrik $\bar{g}_n^{Y_n}$ von unten beschränkt ist durch i, die Schnittkrümmung von $(Y_n, \bar{g}_n^{Y_n})$ beschränkt ist durch $|K(Y_n)| \leq C'$ und der Durchmesser der Metrik $\bar{g}_n^{Y_n}$ von oben beschränkt ist durch D'.*

(c) *Der Quotientenraum M_n/T^k und der kompakte Alexandrov-Raum X sind homöomorph, und bezüglich der von $\bar{g}_n$ auf M_n/T^k induzierten Metrik ist der Gromov-Hausdorff-Abstand zwischen X und M_n/T^k kleiner als ε.*

(d) *Nach Übergang zu einer Teilfolge der M_n gilt ferner:*
Für $n \to \infty$ konvergieren die orientierten Rahmenbündel $(FM_n, \bar{g}_n^{FM})$ in der $SO(m) \times T^k$-Hausdorff–Topologie gegen eine glatte Mannigfaltigkeit Y mit im Alexandrov-Sinn beschränkter Krümmung, metrischem Tensor der Klasse $C^{1,\alpha}$ und trivialer $T^k < (SO(m) \times T^k)$-Wirkung. Die Durchmesser der Torus-Orbiten der Bündel $p_n : FM_n \to Y_n$ konvergieren gleichmäßig gegen Null.
Die Riemannschen $SO(m) = (SO(m) \times T^k)/T^k$-Mannigfaltigkeiten $(Y_n, \bar{g}_n^{Y_n})$ sind $SO(m)$-äquivariant bi-Lipschitz-diffeomorph, und für $n, n' \to \infty$ konvergieren die Lipschitz-Konstanten der $SO(m)$-Diffeomorphismen zwischen Y_n und $Y_{n'}$ gegen 1.

Die Mannigfaltigkeit Y ist der $SO(m)$-Hausdorff-Limes der Y_n und zu den Y_n diffeomorph. Der Hausdorff-Grenzwert der $(M_n, \bar{g}_n)$ existiert und ist isometrisch zu $Y/SO(m)$.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß die in diesem Abschnitt dargestellten Strukturresultate wesentlich auf dem Vorhandensein beidseitiger Krümmungsschranken beruhen. Ergebnisse zum Thema Kollaps und Hausdorff–Konvergenz Riemannscher Mannigfaltigkeiten unter unteren Schranken für die Schnitt- oder Ricci-Krümmung finden sich bei Yamaguchi (siehe [Yam2], [Yam3]) sowie bei Colding und Cheeger–Colding (vergleiche [Co], [CC1], [CC2]); in den Arbeiten Yamaguchis sind insbesondere gewisse Analoga zu Fukayas Faserbündelsatz enthalten.

2. Positive Krümmung und Faserbündel

Die bekannten Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung beruhen auf zwei Tatsachen: Die bi-invariante Metrik einer kompakten Liegruppe ist nichtnegativ gekrümmt, und beim Übergang zu Quotienten nach isometrischen Wirkungen wird die Krümmung nicht vermindert.

Untere Schranken für die Ricci-Krümmung bleiben unter Riemannschen Submersionen dagegen im allgemeinen nicht erhalten.

In beiden Fällen läßt sich jedoch fragen, ob man die O'Neill-Formeln auch in "entgegengesetzter" Richtung verwenden kann, um auf Totalräumen von Bündeln mit positiv gekrümmten Fasern und Basen Metriken mit positiver Schnitt- oder Ricci-Krümmung zu definieren. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden dazu invariante Metriken auf S^1-Bündeln diskutiert, in Abschnitt 2 die Konstruktion invarianter Metriken mit positiver Ricci-Krümmung auf Prinzipalbündeln, und in Abschnitt 3 der Fall positiver Schnittkrümmung und ein Zusammenhang zwischen S^1-invarianten Metriken positiver Schnittkrümmung und Kontaktstrukturen. Die Resultate der ersten beiden Paragraphen basieren auf der Arbeit [GPT]. Anstelle des dort erfolgten Zugangs über zu S^1-Bündeln assoziierte komplexe Geradenbündel und deren ersten Chernklassen werden in der nachstehend gegebenen Darstellung jedoch S^1-Bündel und deren Eulerklassen verwandt.

1. Invariante Metriken auf S^1-Prinzipalbündeln

Es sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit und $\pi : P \to M$ ein S^1-Prinzipalbündel über M. Als Bündel ist P klassifiziert durch seine Eulerklasse $e \in H^2(M;\mathbb{Z})$. Unter der reellen Eulerklasse $e^{\mathbb{R}}$ von P versteht man das Bild von e unter der kanonischen Abbildung $H^2(M;\mathbb{Z}) \to H^2(M;\mathbb{R})$.

Für jeden Prinzipalbündel-Zusammenhang θ auf P ist die Krümmungsform $\Omega = d\theta$ von θ der Pullback $\Omega = \pi^*(\omega)$ einer geschlossenen 2-Form ω auf M.

Die Kohomologieklasse von ω erfüllt die Beziehung $[\omega] = 2\pi e^{\mathbb{R}}$, und umgekehrt existiert zu jeder geschlossenen 2-Form ω in der Kohomologieklasse $2\pi e^{\mathbb{R}}$ ein Prinzipalbündel-Zusammenhang θ auf P, dessen Krümmung Ω der Pullback der Form ω ist (siehe [Ko1]).

Es sei $\pi : P \to M$ ein S^1-Prinzipalbündel über M mit Eulerklasse $e \in H^2(M;\mathbb{Z})$. Ist g eine Riemannsche Metrik auf M, $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion und ω eine geschlossene 2-Form auf M, deren Kohomologieklasse mit $2\pi e^{\mathbb{R}}$ übereinstimmt, sowie θ ein Prinzipalbündel-Zusammenhang auf P, dessen Krümmungsform gleich dem Pullback von ω ist, so definieren diese Daten auf P eine Riemannsche Metrik h, indem man fordert:

(a) Für $y \in M$ ist die Länge der Faser $\pi^{-1}(y)$ über y gegeben durch $2\pi e^{f(y)}$, und die freie S^1-Wirkung auf P erfolgt durch Isometrien;

(b) Für die durch den Zusammenhang θ induzierte Zerlegung $TP = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ mit $\mathcal{V} = \ker \pi_*$ des Tangentialbündels von P gilt: Diese Zerlegung ist eine orthogonale Summe, und die Einschränkung von π auf die horizontale Distribution $\mathcal{H}$ liefert eine Isometrie $\mathcal{H} \to TM$.

Die so definierte Metrik $h = h(f, \omega)$ ist S^1-invariant und die Projektion $\pi : (P, h) \to (M, g)$ ist eine Riemannsche Submersion.

Es seien $y = (y^1, ..., y^m)$ lokale Koordinaten auf einer offenen Teilmenge U von M, über der das Bündel P trivial ist. Für einen lokalen Schnitt γ von P über U definiert die Vorschrift $(s, y) \mapsto e^{\sqrt{-1}s}\gamma(y)$ dann lokale Koordinaten (s, y) auf P, und das assoziierte und von der S^1-Wirkung auf P induzierte vertikale Vektorfeld ∂_s der Länge $|\partial_s|^2 = e^{2f}$ ist invariant definiert und erzeugt die vertikale Distribution $\mathcal{V}$.

Es seien R^M und R^P die Krümmungstensoren von M und P. In den gewählten lokalen Koordinaten sei die Metrik g von M gegeben durch $g_{ab}\, dy^a \otimes dy^b$. Ferner bezeichne $\{F_a\}$ ein orthonormales m-Bein der horizontalen Distribution $\mathcal{H}$ über U.

Aus technisch aufwendigen, doch ansonsten wenig aufschlußreichen Rechnungen, auf deren Reproduktion hier verzichtet wird (siehe dazu [GPT]), ergibt sich, daß sich in diesen Koordinaten der Krümmungstensor von P durch R^M, die Faserlängenfunktion f und die zur Krümmungsform assoziierte 2-Form ω ausdrücken läßt wie folgt:

2.1. Lemma

(1) $R^P(\partial_s, F_a, F_a, \partial_s) = e^{2f}\{-f_{;aa} - f_{;a}f_{;a} + \sum_b e^{2f}\omega_{ab}\omega_{ab}/4\}$.

(2) $R^P(F_a, F_b, F_b, \partial_s) = e^{2f}\{\omega_{ab;b} + 3f_{;b}\omega_{ab}\}/2$.

(3) $R^P(F_a, F_b, F_b, F_a) = R^M(\partial_a, \partial_b, \partial_b, \partial_a) - 3e^{2f}\omega_{ab}\omega_{ab}/4$.

Es sei E eine zweidimensionale Ebene in TP. Dann gibt es horizontale und orthonormale Vektoren F_a, F_b und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, so daß die Ebene E aufgespannt wird von $\alpha F_a + \beta e^{-f}\partial_s$ und F_b, und die Schnittkrümmung von E ist demgemäß gegeben durch

$$\begin{aligned}
K^h(E) &= R^P(\alpha F_a + \beta e^{-f}\partial_s, F_b, F_b, \alpha F_a + \beta e^{-f}\partial_s) \\
&= \alpha^2\{R^M(\partial_a, \partial_b, \partial_b, \partial_a) - 3e^{2f}\omega_{ab}\omega_{ab}/4\} \\
&+ \alpha\beta e^f\{\omega_{ab;b} + 3f_{;b}\omega_{ab}\} \\
&+ \beta^2\{-f_{;bb} - f_{;b}f_{;b} + e^{2f}\textstyle\sum_c \omega_{bc}\omega_{bc}/4\}.
\end{aligned}$$

Es seien ρ_M and ρ_P die Ricci-Tensoren von M und P. Bezeichnet *ext* äußere und *int* innere Multiplikation sowie $\Delta = \delta d$ den skalaren Laplace-Operator auf Funktionen und identifiziert man horizontale Vektoren mit ihren Bildern unter dem Differential der Abbildung $\pi : P \to M$ und Vektoren und 1-Formen über die Metrik, so ergibt sich aus dem obigen Lemma in invarianter Formulierung die folgende Aussage:

2.2. Lemma *Ist $F \in TP$ ein horizontaler Einheitsvektor und $\mathcal{T} := e^{-f}\partial_s$, so gelten für den Ricci-Tensor von (P, h) die Beziehungen*

(1) $\rho_P(\mathcal{T}, \mathcal{T}) = \Delta f - |df|^2 + e^{2f}|\omega|^2/4$;

(2) $\rho_P(\mathcal{T}, F) = e^f\{-\delta\omega(F) + 3\omega(F, df)\}/2$;

(3) $\rho_P(F, F) = \rho_M(F, F) - e^{2f}|\mathrm{int}(F)\omega|^2/2 - f_{;FF} - F(f)^2$.

Als Bedingung für die Positivität des Ricci-Tensors folgt damit:

2.3. Lemma *Der Ricci-Tensor von (P, h) ist positiv definit genau dann, wenn für alle horizontalen Einheitsvektoren F und $\mathcal{T} = e^{-f}\partial_s$ gilt:*

$$\rho_P(F, F) > 0 \quad \text{und} \quad \rho_P(\mathcal{T}, \mathcal{T})\ \rho_P(F, F) > \rho_P(\mathcal{T}, F)^2 .$$

2. Invariante Metriken positiver Ricci-Krümmung

Es sei $\pi : E \to M$ ein Faserbündel mit kompakter Faser F und Lie-Strukturgruppe G über einer kompakten Mannigfaltigkeit M. Existiert auf M eine Metrik g mit positiver Ricci-Krümmung, und auf F eine G-invariante Metrik g_F mit positiver Ricci-Krümmung, so trägt nach Bérard Bergery ([B2]) (für speziellere Resultate vergleiche auch Poor ([Poor] und Nash ([Nash]) der Totalraum E eine ausgezeichnete Metrik h mit positiver Ricci-Krümmung: Nach Wahl eines G-Zusammenhangs auf dem zu $\pi : E \to M$ assoziierten G-Prinzipalbündel gibt es nach einem Resultat von Vilms ([Vi]) auf E eine Riemannsche Metrik h, so daß die Projektion $\pi : (E, h) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen und zu (F, g_F) isometrischen Fasern ist. Haben die Metriken g und g_F positive Ricci-Krümmung, so gilt dies nicht notwendig für h; doch die O'Neill-Formeln und ein Kompaktheitsargument zeigen, daß nach Multiplikation der Metrik der Fasern mit einer hinreichend kleinen positiven Konstanten dann auch die Metrik h auf E diese Eigenschaft besitzt.

Ist G eine kompakte Liegruppe, $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel über M und das Zentrum von G positiv-dimensional, so gibt es, da jede linksinvariante Metrik auf einem Torus flach ist, auf G keine invariante Metrik mit positiver Ricci-Krümmung, und die obige Konstruktion ist somit nicht direkt anwendbar.

Bérard Bergery konnte jedoch unter Verwendung dieses Vorgehens und eines Deformationsresultates von Aubin ([Au], siehe auch [Eh]) zeigen, daß im Fall von Torus-Prinzipalbündeln $T^k \to P \to M$ über einer Mannigfaltigkeit positiver Ricci-Krümmung auch der Totalraum eines solchen Bündels eine Metrik mit positiver Ricci-Krümmung trägt, falls dieser endliche Fundamentalgruppe besitzt. Dazu konstruierte er mit dem obigen Ansatz auf dem Totalraum P eine Metrik mit nicht-negativer Ricci-Krümmung, die in einem Punkt strikt positive Ricci-Krümmung besitzt, und verwies dann auf das Ergebnis Aubins, nach dem eine Metrik mit diesen Eigenschaften sich stets in eine Metrik mit auf ganz P positiver Ricci-Krümmung deformieren läßt. Allerdings bestehen zwischen der so erhaltenen Metrik und der Toruswirkung bzw. der Metrik auf der Basis keinerlei Zusammenhänge mehr; insbesondere ist die durch die Aubin-Konstruktion gegebene Metrik auf P weder invariant unter der Strukturgruppe T^k, noch ist bezüglich dieser Metrik die Projektion $P \to M$ eine Riemannsche Submersion.

In Verallgemeinerung und Verschärfung dieser Aussagen gilt nach [GPT] jedoch das folgende Resultat:

2.4. Satz *Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik positiver Ricci-Krümmung, G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel über M. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Die Fundamentalgruppe von P ist endlich.*

(b) *Auf P existiert eine G-invariante Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung, bezüglich der die Projektion π eine Riemannsche Submersion ist.*

Die Endlichkeit der Fundamentalgruppe des Totalraumes ist nach dem Satz von Bonnet-Myers notwendig für die Existenz einer Metrik mit positiver Ricci-Krümmung. Satz 2.4 zeigt, daß im Kontext von Prinzipalbündeln auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Der wesentliche Unterschied zwischen der Konstruktion der G-invarianten Metrik in Satz 2.4 und den oben geschilderten Verfahren besteht darin, daß im Beweis dieses Satzes anstelle von Metriken mit total geodätischen Fasern ein Warping-Ansatz (vergleiche hierzu auch die Arbeiten [An1], [An2], [SY]) verwandt wird, der es erlaubt, die Metrik längs der Fasern mit einem konformen Faktor zu variieren. Der Beweis von Satz 2.4 erfolgt in drei Schritten:

Beweis von Satz 2.4 im Fall $G = S^1$.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(P)$ des S^1-Prinzipalbündels $\pi : P \to M$ ist nach Voraussetzung endlich, und deshalb ist der freie Anteil der Eulerklasse des Bündels und damit auch seine reelle Eulerklasse $e^{\mathbb{R}}$ nicht-trivial.

Es sei θ ein Prinzipalbündel-Zusammenhang auf P, dessen Krümmungsform $\Omega = d\theta$ mit dem Pullback des harmonischen Repräsentanten ω der Kohomologieklasse $2\pi e^{\mathbb{R}}$ übereinstimmt. Da ω harmonisch ist, gilt $\delta\omega = 0$.

Wähle $\epsilon > 0$, so daß für alle horizontalen Einheitsvektoren F gilt:

$\rho_M(F, F) \geq \epsilon.$

Wähle eine nichtleere offene Menge $\mathcal{O} \subset M$ und $\epsilon_1 > 0$, so daß für alle $y \in \mathcal{O}$ gilt:

$|\omega(y)|^2 \geq \epsilon_1.$

Wähle auf M eine glatte Funktion ϕ, so daß für alle $y \notin \mathcal{O}$ gilt:

$\Delta\phi(y) \geq 1.$

Setze $f := -C_1 + \varrho\phi$. Wähle C_1 dergestalt, daß für alle $\varrho \in (0, 1)$ gilt:

$e^{2f}|\mathrm{int}(F)\omega|^2 < \epsilon/3.$

Wähle $\epsilon_2 > 0$, so daß für alle $\varrho \in (0, 1)$ gilt:

$e^{2f}/4 \geq \epsilon_2$.

Wähle $\varrho_0 > 0$, so daß für alle $\varrho \in (0, \varrho_0)$ und für alle F gilt:

$|\varrho\phi_{;FF}| + |\varrho^2 F(\phi)^2| \leq \epsilon/3$. Dann gilt $\rho_P(F, F) \geq \epsilon/3$.

Wähle eine Konstante K, so daß auf $\mathcal{O}$ die Ungleichung

$\rho_P(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \geq \epsilon_1\epsilon_2 - K\varrho$

und auf dem Komplement $\mathcal{O}^c$ die Ungleichung

$\rho_P(\mathcal{T}, \mathcal{T}) \geq \varrho - K\varrho^2$

erfüllt ist und daß ferner gilt:

$\rho_P(\mathcal{T}, F)^2 \leq K\varrho^2$.

Es folgt, daß für kleine Werte von ϱ das Produkt von $\rho_P(\mathcal{T}, \mathcal{T})$ und $\rho_P(F, F)$ den Term $\rho_P(\mathcal{T}, F)^2$ majorisiert, und nach Lemma 2.3 ist der Ricci-Tensor der von f und ω auf P definierten S^1-invarianten Metrik damit positiv definit.

Beweis von Satz 2.4 im Fall $G = T^k$.

Ein T^k-Prinzipalbündel $\pi : P \to M$ ist klassifiziert durch k Kohomologieklassen $e_1, \ldots, e_k \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Bezeichnet bezüglich der kanonischen Zerlegung von T^k, $T^k = S^1 \times \ldots \times S^1$, für $i \in \{1, \ldots, k\}$ $T_i < T^k$ den durch Auslassung des i-ten S^1-Faktors entstehenden $(k-1)$-dimensionalen Untertorus von T^k, so entspricht die Kohomologieklasse e_i der Eulerklasse des S^1-Prinzipalbündels $C_i := P/T_i \to M$.

Die Behandlung des Falles höherdimensionaler Tori erfolgt über ein Induktionsargument. Es sei $\pi : P \to M$ ein T^k-Prinzipalbündel über einer kompakten Mannigfaltigkeit M mit positiver Ricci-Krümmung. Das Bündel sei klassifiziert durch $e_1, \ldots, e_k \in H^2(M; \mathbb{Z})$ mit zugehörigen S^1-Prinzipalbündeln $C_1, \ldots, C_k$, und der Totalraum P habe endliche Fundamentalgruppe. Ferner sei angenommen, daß Satz 2.4 für T^{k-1}-Prinzipalbündel bereits bewiesen ist.

Bezüglich der Zerlegung $T^k = T_k \times S^1 = T^{k-1} \times S^1$ ist das Bündel $\pi : P \to M$ ein S^1-Prinzipalbündel $\pi' : P \to P_{k-1}$ über dem durch die S^1-Bündel $C_1, \ldots, C_{k-1}$ definierten T^{k-1}-Prinzipalbündel $\pi_{k-1} : P_{k-1} \to M$. Aus der langen exakten Homotopiesequenz der Faserung $S^1 \to P \to P_{k-1}$ folgt, daß $\pi_1(P_{k-1})$ endlich ist. Nach Induktionsannahme existiert damit auf P_{k-1} eine T^{k-1}-invariante Riemannsche Metrik g_{k-1} mit positiv definitem Ricci-Tensor, bezüglich der die Projektion $\pi_{k-1} : P_{k-1} \to M$ eine Riemannsche Submersion ist.

Ist θ ein S^1-Prinzipalbündel-Zusammenhang auf dem Bündel $\pi' : P \to P_{k-1}$, so läßt sich nach Mittelung über die T^{k-1}-Wirkung auf P annehmen, daß θ unter der Wirkung von T^{k-1} invariant und die Krümmungsform $\Omega = d\theta$ der Pullback $\Omega = \pi^*(\tilde{\omega})$ einer geschlossenen und T^{k-1}-invarianten 2-Form auf P_{k-1} ist.

Es sei ω der harmonische Repräsentant der reellen Eulerklasse des Bündels $P \to P_{k-1}$. Als zusammenhängende Liegruppe wirkt T^{k-1} auf der Kohomologie von P_{k-1} trivial, und da T^{k-1} isometrisch wirkt, ist ω als harmonische Form T^{k-1}-invariant. Es gilt $\tilde{\omega} = \omega + d\eta$, wobei η ebenfalls als T^{k-1}-invariant vorausgesetzt werden darf. Setzt man $\Theta := \theta + \omega$, so ist Θ ein T^{k-1} invarianter Zusammenhang auf dem S^1-Prinzipalbündel $\pi' : P \to P_{k-1}$ mit assoziierter harmonischer Krümmungsform ω.

Da die Eulerklasse des Bündels $\pi' : P \to P_{k-1}$ nicht-trivial ist, existiert eine nichtleere offene Teilmenge $\mathcal{O} \subset P_{k-1}$, auf der gilt: $|\omega|^2 \geq \epsilon_1 > 0$. Da ω T^{k-1}-invariant ist, läßt sich annehmen, daß die Teilmenge $\mathcal{O}$ und damit auch deren Komplement $\mathcal{O}^c$ unter der Wirkung von T^{k-1} invariant ist. Wählt man auf P_{k-1} eine glatte Funktion ϕ mit $\Delta\phi \geq 1$ auf $\mathcal{O}^c$, so darf nach Mittelung von ϕ über die T^{k-1}-Wirkung auch ϕ als T^{k-1}-invariant angenommen werden. Wendet man nun die im Fall $G = S^1$ gegebene Konstruktion an, so erhält man auf P eine Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung, die sowohl S^1- als auch T^{k-1}-invariant und damit T^k-invariant ist. Da die Komposition Riemannscher Submersionen eine Riemannsche Submersion ist, ist Satz 2.4 für Tori bewiesen.

Beweis von Satz 2.4 im allgemeinen Fall.

Es sei G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe und $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel über einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) positiver Ricci-Krümmung. Die Fundamentalgruppe von P sei endlich.

Es sei Z die Zusammenhangskomponente der Identität des Zentrums von G. Als zusammenhängende kompakte Abelsche Liegruppe ist Z isomorph zu einem k-dimensionalen Torus T^k. Setzt man $\tilde{G} := G/Z$ und $\tilde{M} := P/Z$, so definiert die natürliche Projektion von $\tilde{M}$ auf M ein $\tilde{G}$-Prinzipalbündel. Da G reduktiv ist, ist $\tilde{G}$ halbeinfach. Somit existiert (vergleiche [Nash]) auf $\tilde{G}$ eine invariante Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung. Wie zu Beginn dieses Paragraphen dargelegt wurde, existiert deshalb auf $\tilde{M}$ eine $\tilde{G}$-invariante Metrik $h_{\tilde{G}}$ mit positiver Ricci-Krümmung, bezüglich der die Projektion $\tilde{\pi} : (\tilde{M}, h_{\tilde{G}}) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen Fasern ist.

Die natürliche Projektion von P auf $\tilde{M}$ definiert ein T^k-Prinzipalbündel. Da Z zentral in G ist, wirkt die Strukturgruppe G auf diesem Prinzipalbündel. Verfährt man nun wie im Beweis von Satz 2.4 für Tori und mittelt in der dort angegebenen Konstruktion bei jedem Schritt zusätzlich über die kompakte Liegruppe G, so erhält man auf P eine G-invariante Metrik h mit positiver Ricci-Krümmung, bezüglich der die Projektion $\pi : (P, h) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion ist. Der Beweis von Satz 2.4 ist damit vollständig. $\square$

3. Positive Schnittkrümmung und Kontaktstrukturen

Auf die Frage, wann Totalräume von Bündeln über kompakten Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung (invariante) Metriken mit positiver Schnittkrümmung tragen, gibt es trotz zahlreicher Bemühungen und der Untersuchung verwandter Fragestellungen (vergleiche hierzu, insbesonders im Hinblick auf die Konstruktion von Metriken nichtnegativer Krümmung, etwa die Arbeiten [Cha], [Ch3], [DR], [GrZ], [Ri], [We3], [Yang] und die darin enthaltenen Referenzen) bis heute keine befriedigenden Antworten.

Dies gilt bereits im Fall von S^1-Prinzipalbündeln. Stellt man hier die Lemma 2.3 entsprechende Positivitätsbedingung für die Schnittkrümmungen auf, ist zunächst nicht ersichtlich, wie sich die auftretenden Ableitungen der Faserlängenfunktion f und der Krümmungsform ω im allgemeinen in geeigneter Weise kontrollieren ließen. Zudem ist nicht klar, wie man nun ausnutzen könnte, daß sich die Krümmungsform als harmonische Form wählen läßt, so daß ihr Kodifferential $\delta\omega$ verschwindet. Im Falle des Ricci-Tensors waren aufgrund des Verschwindens des Kodifferentials die Terme $\rho_P(\mathcal{T}, F)$ unabhängig von Ableitungen von ω (vergleiche Lemma 2.2), und diese Tatsache ging in den Beweis von Satz 2.4 entscheidend ein.

Um die Positivitätsbedingungen zu vereinfachen, bietet es sich (wie in den oben genannten Arbeiten geschehen) zur Kontrolle der Ableitungen an, anstelle allgemeiner Warping-Funktionen nur den Fall total geodätischer Fasern, also konstanter Längenfunktion, zu betrachten. Mit dieser Spezialisierung folgt:

2.5. Bemerkung Es sei $\pi : P \to M$ ein S^1-Prinzipalbündel über einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) positiver Schnittkrümmung mit endlicher Fundamentalgruppe des Totalraumes und Eulerklasse e. Verwendet man für die Faserlängenfunktion f in der in Abschnitt 1 definierten Metrik $h = h(f, \omega)$ mit $\omega = 2\pi e^{\mathbb{R}}$ den Ansatz $f := ln(t)$, $t > 0$, so ist die Projektion $\pi : (P, h) \to (M, g)$ eine Riemannsche Submersion mit total geodätischen Fasern der Länge $2\pi t$, und in der Notation des ersten Abschnitts dieses Kapitels gilt:

Genau dann existiert ein $t_0 > 0$, so daß für alle $0 < t \leq t_0$ die Metrik $h = h_t$ auf P positive Schnittkrümmung besitzt, wenn es ein $t_1 > 0$ gibt, so daß für alle orthonormalen Einheitsvektoren $F, F' \in TM$ neben der — leicht zu erfüllenden — Bedingung $R^M(F, F', F', F) > 3/4\ t_1^2\ \omega(F, F')^2$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\| int(F)\omega \|^2 \left(R^M(F, F', F', F) - 3/4\, t_1^2\, (\omega(F, F'))^2 \right) \ > \ \left((\nabla_F \omega)(F, F') \right)^2$$

Da die obige Ungleichung die Metrik auf M und die Krümmungsform ω in nicht-trivialer Weise miteinander koppelt, erweist sich diese jedoch ebenfalls als im allgemeinen schwer verifizierbare Bedingung. Die einzigen uns bekannten Beispiele kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten M, in denen diese Ungleichung — und dann trivialerweise — erfüllt ist, sind die komplex-projektiven Räume mit ihrer Kählerschen Fubini-Study–Metrik. Aus diesen erhält man mit der obigen Konstruktion letztlich nur die Hopf-Faserungen der ungeradedimensionalen Sphären, so daß Bemerkung 2.5 keine neuen Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit positiver Schnittkrümmung liefert.

Gleiches gilt, wenn man diese Konstruktion von S^1-Prinzipalbündeln auf G-Prinzipalbündel oder assoziierte G-Bündel erweitert, deren Strukturgruppen invariante Metriken mit positiver Schnittkrümmung tragen, also (vergleiche [Wa]) auf die Fälle $G = SO(3)$ und $G = Spin(3) \cong S^3$. Die Bedingung, daß die Fasern total geodätisch und positiv gekrümmt sein müssen, ist so einschränkend, daß sich mit dieser Methode hier bislang nur die Hopf-Faserung $S^7 \to S^4$ und zur Familie der Aloff-Wallach–Räume gehörende S^3-Bündel über $\mathbb{CP}^2$ rekonstruieren lassen.

Diese Ergebnisse haben dennoch eine interessante Konsequenz, denn Bemerkung 2.5 weist auf einen eventuellen Zusammenhang zwischen Metriken positiver Schnittkrümmung und der Existenz von Kontaktstrukturen auf der unterliegenden Mannigfaltigkeit hin:

Es sei P eine kompakte Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung, auf der S^1 frei und isometrisch operiert. Faßt man P als S^1-Prinzipalbündel über dem mit der induzierten Metrik versehenen Qutotientenraum $M := P/S^1$ auf, so ist die Quotientenabbildung $\pi : P \to M$ eine Riemannsche Submersion. Es sei ω die zu dem von der Metrik auf P definierten Prinzipalbündel-Zusammenhang θ assoziierte geschlossene 2-Form auf M.

Falls nun zusätzlich gilt, daß sämtliche S^1-Orbiten gleiche Länge haben, die Fasern von π also total geodätisch sind, so folgt aus der in Bemerkung 2.5 auftretenden Ungleichung (oder direkt aus den O'Neill–Formeln [O'N]), daß in diesem Fall aufgrund der Positivität der Schnittkrümmung von P der Ausdruck

$$\| int(F)\omega \|^2$$

nie verschwinden darf.

Die Krümmungsform ω ist deshalb notwendig nichtentartet und damit eine symplektische Form. Daraus folgt, daß auf der Mannigfaltigkeit P eine spezielle (in der Terminologie von Boothby und Wang (vergleiche ([BW]) : "reguläre") Kontaktstruktur existiert.

Die O'Neill-Formeln lassen sich leicht auf Abbildungen zwischen Riemannschen Orbifolds verallgemeinern, ebenso der Begriff der symplektischen Form (siehe dazu [Tu3] und [We2]). Die entsprechende Verallgemeinerung des Begriffs der regulären Kontaktstruktur zur so genannten fast regulären Kontaktstruktur, die auf einer kompakten Mannigfaltigkeit dadurch charakterisiert ist, daß das zur Kontaktform assoziierte Reeb-Vektorfeld eine Seifert-Faserung definiert, findet sich bei Thomas (vergleiche [Tho]). Kann man anstelle von einer freien nur von einer fixpunktfreien S^1-Aktion ausgehen, werfen die oben angestellten Betrachtungen deshalb die allgemeine Frage auf:

2.6. Frage Es sei P eine kompakte Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung, auf der eine isometrische und fixpunktfreie S^1-Wirkung existiert. Besitzt P dann eine fast reguläre Kontaktstruktur ?

Es sei darauf hingewiesen, daß aufgrund eines Resultates von Berger (siehe [Ko2]), nach dem jedes Killing-Feld auf einer positiv gekrümmten Mannigfaltigkeit gerader Dimension in mindestens einem Punkt verschwindet, eine jede solche Mannigfaltigkeit P notwendigerweise ungerade Dimension besitzt.

Eine positive Antwort auf die obige Frage würde zusätzliche topologische Restriktionen für die Existenz von Metriken mit positiver Schnittkrümmung liefern und ist für das Studium der Struktur positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten von allgemeinem Interesse, weil die Existenz fixpunktfreier und isometrischer S^1-Wirkungen auf positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten in einer großen — in Dimension 7 und 13 : unendlichen — Zahl von Fällen automatisch gegeben ist, denn nach einem Resultat aus [Tu3] (siehe auch Satz 5.1 der vorliegenden Arbeit) gilt:

In jeder Dimension m und für jedes $\delta > 0$ gibt es bis auf Diffeomorphie nur endlich viele einfach zusammenhängende δ-gepinchte Mannigfaltigkeiten, auf denen *keine* fixpunktfreie und (nach eventueller Abänderung der Metrik in eine $\delta/2$-gepinchte Metrik positiver Schnittkrümmung) isometrische S^1-Wirkung existiert.

3. Endlichkeit und zweite Homotopiegruppe

Geometrische Endlichkeitssätze verallgemeinern Klassifikationsresultate und liefern gleichzeitig Obstruktionen für die Konstruktion unendlicher Beispielserien von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die deren Hypothesen erfüllen.

In den bis 1998/99 bekannten Endlichkeitssätzen, die nur unter den Voraussetzungen von Volumen-, Krümmungs- und Durchmesserschranken Diffeomorphietypenendlichkeit ergeben, also (siehe die Einleitung der vorliegenden Arbeit) in den Endlichkeitsaussagen von Anderson-Cheeger, Cheeger, Grove-Petersen-Wu und Perelman, ist eine untere positive Schranke für das Volumen, die mögliches Kollabieren ausschließt, notwendig für deren Gültigkeit.

Der erste Abschnitt dieses Kapitels, welches Ergebnisse der Arbeit [PT] präsentiert, behandelt einen Satz, in dem statt einer unteren Volumenschranke eine rein topologische — und Kollaps-Phänomene erlaubende — Bedingung verwandt wird, um Diffeomorphietypenendlichkeit zu garantieren.

Im zweiten Abschnitt wird dieses Resultat zur Herleitung eines geometrisch-topologischen Klassifikationssatzes für kompakte einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers benutzt.

1. Diffeomorphietypenendlichkeit und zweite Homotopie

Dieser Abschnitt behandelt den Beweis und erste Konsequenzen des folgenden Resultats:

3.1 Satz *Für gegebene m, C, und D enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, welche eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ tragen, nur endlich viele Diffeomorphietypen.*

Da aus einer Ricci-Pinching-Bedingung der Form $Ricc \geq \delta > 0$, $K \leq 1$ eine untere Schranke für die Schnittkrümmung folgt, ergibt sich aus diesem Resultat und dem Satz von Bonnet-Myers speziell im Hinblick auf positive Krümmung:

3.2. Korollar *Für jedes gegebene m und $\delta > 0$ gibt es bis auf Diffeomorphie nur endlich viele kompakte einfach zusammenhängende m-Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, welche eine Riemannsche Metrik tragen, die die Bedingung $Ricc \geq \delta$, $K \leq 1$ erfüllt.*

3.3. Bemerkung Aus Korollar 3.2 ergibt sich insbesondere, daß — so wie dieses auch bei den Aloff-Wallach–, Eschenburg– und Bažaikin–Räumen der Fall ist — die generischen Elemente jeder neuen unendlichen Beispielserie von kompakten einfach zusammenängenden Mannigfaltigkeiten fester Dimension und uniform positiv gepinchter Schnittkrümmung notwendig positive zweite Bettizahl besitzen müssen.

3.4. Bemerkung Uniform positiv gepinchte unendliche Folgen paarweise nichtdiffeomorpher Aloff-Wallach–, Eschenburg– und Bažaikin–Räume zeigen zudem, daß in allgemeiner Dimension (vergleiche hierzu allerdings auch Satz 4.4) in Satz 3.1 die Voraussetzung einer endlichen zweiten Homotopiegruppe notwendig ist. Interessanterweise ist in Satz 3.1 jedoch keine uniforme Schranke für die Ordnung der zweiten Homotopiegruppe erforderlich; diese ist vielmehr eine Konsequenz.

3.5. Bemerkung Im Gegensatz zu der bei Cheegers Endlichkeitssatz vorliegenden Situation ist die Voraussetzung der Existenz einer uniformen oberen Krümmungsschranke für die Gültigkeit von Satz 3.1 notwendig, und dies selbst in der nichtnegativ gekrümmten Kategorie. Dies zeigt eine von Grove und Ziller (siehe [GrZ]) konstruierte unendliche Beispielserie paarweise nichtdiffeomorpher kompakter zweifach zusammenhängender 7-Mannigfaltigkeiten mit Metriken nichtnegativer Schnittkrümmung, welche Totalräume von S^3-Bündeln über S^4 sind.

Der Beweis von Satz 3.1 benutzt neben Satz 1.31 wesentlich das folgende Lemma, welches die Rolle der zweiten Homotopiegruppe verdeutlicht.

Vor dessen Formulierung und Beweis sei nochmals daran erinnert, daß in der vorliegenden Arbeit zwei G-Mannigfaltigkeiten als G-äquivariant diffeomorph bezeichnet werden, falls ein Diffeomorphismus der Mannigfaltigkeiten existiert, welcher nach eventueller Komposition mit einem Automorphismus von G die G-Wirkungen auf den Mannigfaltigkeiten miteinander konjugiert.

3.6. Lemma *Es seien G eine kompakte zusammenhängende Liegruppe mit endlicher Fundamentalgruppe sowie $(F, G \times T^k)$ und $(F', G \times T^k)$ kompakte einfach zusammenhängende $G \times T^k$ - Mannigfaltigkeiten mit endlichen zweiten Homotopiegruppen. Die Wirkungen der Untergruppen $G < G \times T^k$ und $T^k < G \times T^k$ auf F und F' seien frei, und es gebe einen G-Diffeomorphismus $h : (F/T^k, G) \to (F'/T^k, G)$.*

Dann existiert ein $G \times T^k$-Diffeomorphismus $\tilde{h} : (F, G \times T^k) \to (F', G \times T^k)$, so daß, wenn π und π' die kanonischen Projektionen auf die Torus-Quotienten bezeichnen, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (F, G \times T^k) & \xrightarrow{\tilde{h}} & (F', G \times T^k) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ (F/T^k, G) & \xrightarrow{h} & (F'/T^k, G) \end{array}$$

Beweis von Lemma 3.6:

Setzt man abkürzend $(Y, G) := (F/T^k, G)$ und identifiziert $(F/T^k, G)$ mit $(F'/T^k, G)$ über den G-Diffeomorphismus h, so zeigt das Teilstück

$$0 = \pi_2(T^k) \to \pi_2(F) \to \pi_2(Y) \xrightarrow{e} \pi_1(T^k) \to \pi_1(F) = 0$$

der langen exakten Homotopiesequenz des Faserbündels $T^k \to F \to Y$, in welchem die Abbildung $e \in H^2(Y; \mathbb{Z}^k)$ das T^k-Bündel–Pendant der Eulerklasse von S^1-Bündeln (siehe [No], [Spa]) bezeichnet:

Der freie Anteil von $\pi_2(Y)$, $\pi_2(Y)/Tor$, ist isomorph zu $\mathbb{Z}^k$, und die Eulerklassenabbildung e vermittelt einen Isomorphismus $\pi_2(Y)/Tor \xrightarrow{e} \pi_1(T^k)$.

Dieser Isomorphismus von Gittern induziert einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $A : T^k \to T^k$, wobei der erste Torus T^k auf F, der zweite auf F' wirkt, so daß sich annehmen läßt, daß ein und derselbe Torus T^k auf den Mannigfaltigkeiten F und F' wirkt und diese als Bündel über Y dieselbe Eulerklasse besitzen. Es folgt, daß zwischen F und F' ein T^k-Diffeomorphismus $h^* : (F, T^k) \to (F', T^k)$ existiert, für den das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} (F, T^k) & \xrightarrow{h^*} & (F', T^k) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ (F/T^k, G) & \xrightarrow{h} & (F'/T^k, G) \end{array}$$

Um nun zu zeigen, daß die Mannigfaltigkeiten F und F' tatsächlich sogar $G \times T^k$-äquivariant diffeomorph sind, genügt es, den Diffeomorphismus h^* in geeigneter Weise abzuändern. Dazu benutzt man eine Schwerpunktskonstruktion, die in ähnlicher Weise bereits in einer Arbeit von Grove und Karcher ([GrK]) verwendet wurde und auf der folgenden geometrischen Idee beruht:

Nach Anwendung des Diffeomorphismus $h^* : F \to F'$ "rotiert" man jeden T^k-Orbit $T^k \cdot h^*(x)$ von F' durch Multiplikation mit einem geeigneten Element $w^{-1}(x) \in T^k$. Daraus erhält man eine glatte Abbildung $w^{-1} : F \to T^k$, die T^k-invariant ist, also für alle $\tau \in T^k$ und $x \in F$ die Gleichung $w^{-1}(\tau x) = w^{-1}(x)$ erfüllt, und die Abbildung $\tilde{h} := w^{-1} \cdot h^*$ liefert daraufhin die gewünschte Konjugation der $G \times T^k$-Wirkungen.

Da die kanonischen Projektionen π und π' mit den G-Wirkungen auf F und F' kommutieren, ergibt sich aus dem vorstehenden kommutativen Diagramm, daß für alle $g \in G$ und $x \in F$ die Beziehung $\pi' \circ h^*(gx) = \pi'(gh^*(x))$ erfüllt ist und deshalb $h^*(gx)$ und $gh^*(x)$ stets im gleichen Orbit der freien T^k-Wirkung auf F' enthalten sind. Deshalb existiert eine Abbildung $\eta : G \times F \to T^k$ mit

$$\eta(g,x)h^*(gx) = gh^*(x).$$

Die Abbildung η ist zudem T^k-invariant, erfüllt also für alle $\tau \in T^k$, $g \in G$ und $x \in F$ die Beziehung $\eta(g, \tau x) = \eta(g,x)$, und ferner gilt

$$(*) \qquad \eta(g'g, x) = \eta(g', gx)\eta(g, x).$$

Für $x \in F$ bezeichne nun $w(x)$ den Mittelwert der Abbildung $\eta(\cdot, x)$ über die kompakte Liegruppe G.

Dieser Mittelwert ist wohldefiniert: Da die Fundamentalgruppe von G nach Voraussetzung endlich ist, existiert ein stetiger Lift von η zu einer Abbildung $\tilde{\eta} : G \times F \to \mathbb{R}^k$ in die universelle Überlagerungs-Liegruppe $\mathbb{R}^k$ von $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Da alle solchen Lifte sich nur durch eine Translation aus $\mathbb{Z}^k$ voneinander unterscheiden, unterscheiden sich die Mittelwerte verschiedener Lifte von η ebenfalls nur durch Elemente aus $\mathbb{Z}^k$, so daß die Projektionen dieser Mittelwerte zurück auf den Torus für festes x jeweils dasselbe Element ergeben.

Aus Integration der Gleichung $(*)$ über g' folgt, daß für alle $x \in F$ für den Mittelwert $w(x)$ gilt:

$$w(x) = \eta(g,x)w(gx).$$

Die Abbildung $\tilde{h} : F \to F'$, definiert durch die Vorschrift $x \mapsto \tilde{h}(x) := w^{-1}(x)h^*(x)$ mit $w^{-1}(x)w(x) = id \in T^k$, vermittelt nun einen $(G \times T^k)$-äquivarianten Diffeomorphismus zwischen F und F':

Da die G- und T^k-Wirkungen auf F und F' miteinander kommutieren, gilt:

$$g\tilde{h}(x) =$$

$$= w^{-1}(x)gh^*(x) = w^{-1}(x)\eta(g,x)h^*(gx) = w^{-1}(x)\eta(g,x)w(gx)\tilde{h}(gx) =$$

$$= \tilde{h}(gx).$$

Daß $\tilde{h}$ nicht nur eine algebraische Konjugation der $G \times T^k$-Wirkungen bewerkstelligt, sondern tatsächlich ein Diffeomorphismus ist, ergibt sich (für eine andere Begründung siehe [PT]) aus folgendem Argument: Auf jedem T^k-Orbit ist die Abbildung w^{-1} nach Konstruktion T^k-äquivariant. Da die einzigen T^k-äquivarianten Abbildungen des k-dimenionalen Torus auf sich selbst aus Translationen mit Elementen aus T^k bestehen, ist w^{-1} auf einer Faser einfach durch die Aktion eines Toruselementes gegeben und $\tilde{h}$ deshalb ein Diffeomorphismus. □

Beweis von Satz 3.1:

Da es in Dimension 1 und 2 keine kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe gibt, läßt sich zunächst ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Dimension m der betrachteten Mannigfaltigkeiten größer als 2 ist und die Strukturgruppe und Faser $SO(m)$ der Rahmenbündel damit endliche Fundamentalgruppe besitzt.

Falls die in Satz 3.1 behauptete Aussage nicht zutrifft, existieren m, C, D und eine unendliche Folge $(M_n, g_n)_{n \in N}$ von kompakten einfach zusammenhängenden m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit endlichen zweiten Homotopiegruppen und Schnittkrümmung $|K(M_n)| \leq C$ sowie Durchmesser $\leq D$, die paarweise nichtdiffeomorph sind.

Aus Cheegers Endlichkeits- und Gromovs Präkompaktheitssatz folgt, daß nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge die Mannigfaltigkeiten M_n bezüglich des Hausdorff-Abstandes gegen einen kompakten Alexandrov-Raum einer Dimension $m - k < m$ konvergieren.

Nach Satz 1.31 existiert zu $\varepsilon > 0$ eine unendliche Teilfolge der Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß auf den orientierten Rahmenbündeln der Elemente M_n dieser Teilfolge invariante reine $\mathcal{N}$-Strukturen $p_n : FM_n \to Y_n$ von positivem Rang existieren, die durch freie und mit den freien $SO(m)$-Wirkungen auf den Rahmenbündeln kommutierende T^k-Wirkungen gegeben sind, sowie auf den M_n bezüglich der $\mathcal{N}$-Strukturen invariante Metriken $\bar{g}_n = \bar{g}_n^\varepsilon$ existieren, die die in Satz 1.31 genannten Eigenschaften besitzen. Insbesondere sind sämtliche $SO(m) = (SO(m) \times T^k)/T^k$-Mannigfaltigkeiten $Y_n = F_n/T^k$ in dieser Teilfolge $SO(M)$-äquivariant diffeomorph.

Da nach Voraussetzung die zweiten Homotopiegruppen der Mannigfaltigkeiten M_n endlich sind, gilt für die zweiten Homotopiegruppen der Rahmenbündel FM_n dasselbe.

Gibt es unter den Elementen dieser Teilfolge der M_n zwei Mannigfaltigkeiten, deren orientierte Rahmenbündel einfach zusammenhängend sind, so zeigt Lemma 3.6, auf deren Rahmenbündel angewandt, daß diese Mannigfaltigkeiten (sogar T^k-äquivariant) diffeomorph sind, was einen Widerspruch zur ursprünglichen Annahme ergibt.

Gibt es dagegen in der Teilfolge der M_n keine zwei Mannigfaltigkeiten, deren orientierte Rahmenbündel FM_n einfach zusammenhängend sind (dies ist beispielsweise der Fall, wenn sämtliche M_n triviale zweite Homotopiegruppe besitzen), so betrachtet man stattdessen die universellen Riemannschen Überlagerungen $F_n := \widetilde{FM}_n$ der Rahmenbündel FM_n. Da alle Mannigfaltigkeiten M_n einfach zusammenhängend sind, sind die F_n zweiblättrige Überlagerungen von FM_n, und die freie $SO(m)$-Wirkung auf FM_n läßt sich zu einer die $SO(m)$-Wirkung überlagernden Wirkung von $Spin(m)$ auf F_n liften. Ebenso liftet sich die freie T^k-Wirkung auf FM_n zu einer mit der $Spin(m)$-Wirkung kommutierenden und isometrischen freien Wirkung auf F_n, und mit Lemma 3.6 ergibt sich wiederum ein Widerspruch zur Annahme, daß sämtliche M_n als paarweise nichtdiffeomorph vorausgesetzt waren. $\square$

Es läßt sich vermuten, daß Satz 3.1 auf Alexandrov-Räume übertragbar ist, und folglich gelten sollte:

Für gegebene m, C, und D enthält die Klasse aller m-dimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Alexandrov-Räume mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, die im Alexandrov-Sinn beidseitig beschränkte Krümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ besitzen, nur endlich viele Homöomorphietypen.

2. Universelle Torusbündel und Klassifikation

Aus Satz 3.1 ergibt sich in Kombination mit Gromovs Bettizahlensatz ein geometrisch-topologisches Klassifikationsresultat für einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers. Dieses zeigt, daß sämtliche solcher Mannigfaltigkeiten diffeomorph sind zu Quotienten endlich vieler kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten nach freien Wirkungen von Tori:

3.7. Satz *Für gegebene m, C und D existiert eine nur von diesen Größen abhängende endliche Anzahl kompakter glatter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten E_j mit endlichen zweiten Homotopiegruppen, so daß gilt:*

Jede m-dimensionale kompakte einfach zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit M, auf der es eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K(M)| \leq C$ und Durchmesser $\mathrm{diam}(M) \leq D$ gibt, ist diffeomorph zu einem Quotienten $M = E_j/T^{k_j}$ einer der Mannigfaltigkeiten E_j nach einer freien Wirkung eines k_j-dimensionalen Torus mit $0 \leq k_j = \dim E_j - m$.

Der Beweis von Satz 3.7 benutzt das Konzept des universellen Torusbündels einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit, welches definiert ist wie folgt:

3.8. Definition *Das universelle Torusbündel einer kompakten einfach zusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeit M ist definiert als eine kompakte glatte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit E, für die gilt:*

Die zweite Homotopiegruppe von E ist endlich, und für eine nichtnegative natürliche Zahl k ist E der Totalraum eines T^k-Prinzipalbündels über M.

Aus der Klassifikation von Torus-Prinzipalbündeln und der langen exakten Homotopiesequenz folgt, daß das universelle Torusbündel $T^k \to E \to M$ einer kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M existiert und eindeutig bestimmt ist und die Dimension des Torus T^k mit der zweiten Bettizahl von M übereinstimmt.

Beweis von Satz 3.7:

Für gegebene m, C und D sei M eine m-dimensionale kompakte einfach zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit M, auf der eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K(M)| \leq C$ und Durchmesser $\mathrm{diam}(M) \leq D$ existiert.

Nach Gromovs Bettizahlensatz gibt es eine nur von m, C und D abhängende Konstante B_2, so daß die zweite Bettizahl einer jeden solchen Mannigfaltigkeit M die Ungleichung $b_2(M) \leq B_2$ erfüllt. Deshalb ist die Dimension der universellen Torusbündel sämtlicher dieser Mannigfaltigkeiten beschränkt durch $m + B_2$.

Da Tori flache Metriken tragen, folgt aus O'Neills Formeln für Riemannsche Submersionen (siehe [O'N]), daß auf jedem dieser universellen Torusbündel eine Riemannsche Metrik existiert, deren Krümmung und Durchmesser durch nur von C und D abhängige Konstanten beschränkt ist.

Weil die Dimensionen der universellen Torusbündel nach oben beschränkt und deren zweite Homotopiegruppen nach Definition endlich sind, gibt es nach Satz 3.1 unter sämtlichen dieser Bündel damit nur endlich viele Diffeomorphietypen.

Die restlichen Behauptungen des zu beweisenden Satzes sind offensichtlich erfüllt. $\square$

Satz 3.7, auf dessen weitere Konsequenzen im nächsten Kapitel noch näher eingegangen wird, läßt sich insbesondere auf Mannigfaltigkeiten anwenden, die Pinching-Bedingungen der Form $Ricc \geq \delta > 0, K \leq 1$ erfüllen.

Hier ist hervorzuheben, daß für solche Mannigfaltigkeiten und ihre universellen Torusbündel über Satz 3.7 hinaus zusätzlich auch enge Beziehungen zwischen deren geometrischen Eigenschaften bestehen. Denn nach Satz 2.4 existiert auf dem universellen Torusbündel einer Mannigfaltigkeit mit positiver Ricci-Krümmung eine Metrik, die selbst positive Ricci-Krümmung besitzt und zudem unter der Torus-Strukturgruppe invariant ist, so daß folgt:

3.9. Korollar *Für jedes m und $\delta > 0$ existieren endlich viele kompakte glatte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten E mit endlichen zweiten Homotopiegruppen und folgenden Eigenschaften:*

Ist M eine m-dimensionale kompakte einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik die Bedingung $Ricc \geq \delta$, $K \leq 1$ erfüllt, so existiert auf einer der Mannigfaltigkeiten E eine unter der freien Wirkung eines $b_2(M)$-dimensionalen Torus invariante Metrik mit positiver Ricci-Krümmung, und M ist isometrisch zu dem mit der induzierten Submersionsmetrik versehenen Quotientenraum.

Es wäre interessant zu wissen, ob ein analoger Sachverhalt gilt, wenn man anstelle der Ricci- die Schnittkrümmung betrachtet. Dazu bedürfte es eines Pendants von Satz 2.4 beziehungsweise der Klärung des folgenden Problems:

3.10. Frage Existiert auf dem universellen Torusbündel einer kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit positiver Schnittkrümmung eine unter der Strukturgruppe invariante Metrik, die selbst auch positive Schnittkrümmung besitzt?

Hindernisse für die Existenz solcher Metriken sind nicht bekannt. Bislang ist jedoch sogar unklar, ob sich auf den universellen Torusbündeln von positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten überhaupt Metriken mit positiver Schnittkrümmung konstruieren lassen.

4. Endlichkeit bei einfachem Zusammenhang

Gegenstand dieses Kapitels sind Endlichkeitsaussagen für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers, an deren Topologie als einzige Voraussetzung die Bedingung gestellt ist, daß die Mannigfaltigkeiten einfach zusammenhängend sind.

Der erste Abschnitt des vorliegenden Kapitels behandelt einen Endlichkeitssatz für die Homotopiegruppen von kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung und beschränktem Durchmesser von beliebiger Dimension, der zweite Abschnitt ein für solche Mannigfaltigkeiten bis einschließlich Dimension 6 gültiges Endlichkeitsresultat für Diffeomorphietypen. Beide Abschnitte basieren auf der Arbeit [Tu4].

1. Homotopiegruppenendlichkeit

Als Anwendung von Satz 3.7 ergibt sich zunächst der folgende Endlichkeitssatz für Homotopiegruppen:

4.1 Satz *Für gegebene m, C und D und jede natürliche Zahl $i \in \mathbb{N}$ existiert eine nur von diesen Größen abhängige endliche Menge Π_i von (Isomorphieklassen von) endlich erzeugten Abelschen Gruppen, so daß gilt:*

Für jede m-dimensionale kompakte einfach zusammenhängende glatte Mannigfaltigkeit, auf der es eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ gibt, ist die i-te Homotopiegruppe dieser Mannigfaltigkeit in der Menge Π_i enthalten.

4.2 Bemerkung Eine schwächere Endlichkeitsaussage für die Homotopiegruppen kompakter Mannigfaltigkeiten mit beschränkter Krümmung und beschränktem Durchmesser findet sich bei Rong (vergleiche [Ro1]). Anstelle der Endlichkeit der Isomorphieklassen der Homotopiegruppen $\pi_i(M)$ wird dort unter denselben Voraussetzungen wie in Satz 4.1 die Endlichkeit der Isomorphieklassen der rationalen Homotopiegruppen $\pi_i(M) \otimes \mathbb{Q}$ bewiesen.

4.3. Bemerkung Anhand eines einfachen Diagonalfolgenargumentes ergibt sich, daß unter den Aloff-Wallach–, Eschenburg– und Bažaikin–Räumen unendliche Folgen paarweise nichtdiffeomorpher und uniform positiv gepinchter Mannigfaltigkeiten fester Dimension existieren, die somit insbesondere die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllen, aber deren i-te Homotopiegruppen für jedes $i \in \mathbb{N}$ identisch sind. Diese Räume lassen sich also nur durch feinere topologische Invarianten voneinander unterscheiden.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels wird ersichtlich werden, daß solche Phänomene allerdings erst ab Dimension 7 auftreten können und daß Endlichkeitsaussagen für Homotopiegruppen wie Satz 4.1 dazu beitragen können, in kleineren Dimensionen den Diffeomorphietyp tatsächlich bis auf endlich viele Möglichkeiten zu fixieren.

Beweis von Satz 4.1:

Für gegebene m, C und D sei M eine m-dimensionale kompakte einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$.

Das universelle Torusbündel $T^k \to E \to M$ von M ist eine kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit endlicher zweiter Homotopiegruppe der Dimension $m + k = m + b_2(M)$, und da Tori asphärisch sind, folgt aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \to \pi_i(T^k) \to \pi_i(E) \to \pi_i(M) \to \cdots \to \pi_1(T^k) \cong \mathbb{Z}^k \to 0$$

des Prinzipalbündels $T^k \to E\ M$, daß

- für $3 \leq i \in \mathbb{N}$ die i-te Homotopiegruppe $\pi_i(M)$ von M zu $\pi_i(E)$ isomorph ist, und
- $\pi_2(M)$ isomorph ist to $\pi_2(E) \oplus \mathbb{Z}^k$.

Da nach Satz 3.7 für gegebene m, C und D nur endlich viele nichtdiffeomorphe universelle Torusbündel E existieren und (siehe [No]) die Homotopiegruppen kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten endlich erzeugt sind, ist Satz 4.1 bewiesen. □

2. Diffeomorphietypenendlichkeit in niedriger Dimension

Das Hauptresultat dieses Abschnittes zeigt, daß sich in Dimensionen kleiner als 7 in Cheegers Endlichkeitssatz die Voraussetzung einer unteren positiven Schranke für das Volumen der betreffenden Mannigfaltigkeiten durch die rein topologische Bedingung, einfach zusammenhängend zu sein, ersetzen läßt und zudem in diesen Dimensionen der Endlichkeitssatz 3.1 auch ohne die Annahme der Endlichkeit der zweiten Homotopiegruppen gilt:

4.4. Satz *Für gegebene $m < 7$, C und D gibt es nur endlich viele Diffeomorphietypen von kompakten glatten einfach zusammenhängenden m-Mannigfaltigkeiten, auf denen eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ existiert.*

4.5. Korollar *Für $m < 7$ und jedes $\delta > 0$ gibt es bis auf Diffeomorphie nur endlich viele kompakte glatte einfach zusammenhängende m-Mannigfaltigkeiten, welche eine Riemannsche Metrik tragen, die die Bedingung Ricc $\geq \delta$, $K \leq 1$ erfüllt.*

4.6. Bemerkung Korollar 4.5 erklärt insbesondere, warum unendliche Beispielserien kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit uniform positiv gepinchter Schnittkrümmung frühestens in Dimension 7 auftreten können (vergleiche hierzu auch Bemerkung 4.15).

4.7. Bemerkung Besondere Implikationen ergeben sich aus Satz 4.4 für die Differentialtopologie und Differentialgeometrie von 4-Mannigfaltigkeiten, denn in dieser Dimension gibt es kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten festen Homöomorphietyps, auf denen unendlich viele nichtdiffeomorphe differenzierbare Strukturen existieren (beispielsweise die algebraische Fläche $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$, siehe [FM]).

Da der Totalraum eines Torus-Prinzipalbündels über einer kompakten Mannigfaltigkeit nach Vorgabe einer Metrik auf der Basis stets eine Metrik mit ähnlichen Krümmungs- und Durchmesserschranken trägt, ergibt sich aus Satz 4.4 als rein topologische Konsequenz:

4.8. Bemerkung *Für $k + l < 7$ existieren über einer gegebenen kompakten glatten l-Mannigfaltigkeit nur endlich viele T^k-Prinzipalbündel mit einfach zusammenhängenden und nichtdiffeomorphen Totalräumen.*

4.9. Bemerkung Geeignete Folgen von Aloff-Wallach– oder Eschenburg-Räumen und deren Produkte mit Sphären S^k, $k \geq 2$, sowie das folgende Beispiel zeigen, daß in jeder Dimension $m \geq 7$ Gegenbeispiele zu Satz 4.4 existieren:

Es bezeichne M die zusammenhängende Summe $S^3 \times \mathbb{CP}^2 \# S^3 \times \mathbb{CP}^2$.

Es seien $x \in H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$ beziehungsweise $y \in H^2(\mathbb{CP}^2; \mathbb{Z})$ Erzeuger der zweiten ganzzahligen Kohomologie des $\mathbb{CP}^2$-Faktors des ersten beziehungsweise des zweiten Summanden von M, und $u \in H^3(S^3; \mathbb{Z})$ beziehungsweise $v \in H^3(S^3; \mathbb{Z})$ Erzeuger der dritten Kohomologie der entsprechenden S^3-Faktoren.

Für $k, l \in \mathbb{Z}$ bezeichne $P = P_{k,l}$ den Totalraum des S^1-Prinzipalbündels $S^1 \to P_{k,l} \to M$ über M mit der Eulerklasse $e_{k,l} := kx + ly$. Sind k und l paarweise teilerfremd, so ist $P_{k,l}$ einfach zusammenhängend.

Aufgrund der Relationen $xv = 0$ und $yu = 0$ ist in der dem S^1-Bündel $P_{k,l}$ zugeordneten Gysin-Sequenz (vergleiche [Spa])

$$\cdots \longrightarrow H^i(M) \xrightarrow{\cup e_{k,l}} H^{i+2}(M) \xrightarrow{\pi^*} H^{i+2}(P_{k,l}) \longrightarrow H^{i+1}(M) \xrightarrow{\cup e_{k,l}} \cdots$$

die durch Cup-Produkt mit der Eulerklasse gegebene Abbildung $H^3(M) \to H^5(M)$ injektiv. Wegen der Exaktheit dieser Sequenz ist die vierte ganzzahlige Kohomologiegruppe $H^4(P_{k,l}; \mathbb{Z})$ somit isomorph zum Quotienten von $H^4(M; \mathbb{Z})$ nach dem Bild von $H^2(M; \mathbb{Z})$ unter der Eulerklasse $e_{k,l}$. Folglich ist $H^4(P_{k,l}; \mathbb{Z})$ isomorph zu $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$, und somit gibt es über M unendlich viele S^1-Prinzipalbündel mit paarweise nichtdiffeomorphen Totalräumen.

Da sämtliche dieser Totalräume nach dem Argument vor Bemerkung 4.7 mit Metriken gleichmäßig beschränkter Schnittkrümmung und gleichmäßig beschränktem Durchmesser versehen werden können, ist somit gezeigt, daß Satz 4.4 auch in Dimension 8 optimal ist.

Offen ist allerdings, ob Gleiches auch für Korollar 4.5 gilt oder ob der achtdimensionale Fall hier tatsächlich eine Ausnahme darstellt, also im Gegensatz zur Situation in Dimension 7 und Dimension ≥ 9 zu jedem $\delta > 0$ bis auf Diffeomorphie stets nur endlich viele kompakte einfach zusammenhängende 8-Mannigfaltigkeiten existieren, die eine Riemannsche Metrik tragen, welche der Bedingung $Ricc \geq \delta$, $K \leq 1$ genügt.

4.10. Bemerkung In Dimension 4 gilt Satz 4.4 statt nur für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten auch für Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe, deren Ordnung zudem beliebig groß sein darf.

Letzteres ist — wie beispielsweise Folgen von Linsenräumen $L_n = S^3/\mathbb{Z}_n$ und deren Produkte mit S^2 und S^3 zeigen — jedoch nur für 4-Mannigfaltigkeiten der Fall.

Der Beweis von Satz 4.4 (ein weiterer Beweis findet sich mittlerweile in der Arbeit [FR2]) basiert auf der durch Satz 4.1 gegebenen Endlichkeitsaussage für Homotopiegruppen und deren Kombination mit Kollaps-Argumenten und den Diffeomorphieklassifikationen kompakter einfach zusammenhängender 5– und 6–Mannigfaltigkeiten. Einige der dazu benötigten topologischen und geometrischen Hilfsresultate sind in den folgenden Lemmata vorab separat zusammengestellt.

4.11. Lemma *In jeder Dimension m gibt es für gegebene C und D bis auf Diffeomorphie stets nur endlich viele kompakte glatte Mannigfaltigkeiten mit nichtverschwindender Euler-Charakteristik, auf denen Riemannsche Metriken mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ existieren.*

Beweis von Lemma 4.11:

Falls diese Aussage nicht zutrifft, existieren m, C, D und eine unendliche Folge $(M_n, g_n)_{n\in N}$ von kompakten m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $|K(M_n)| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$, die paarweise nichtdiffeomorph sind und sämtlich nichtverschwindende Euler-Charakteristiken besitzen.

Aus Cheegers Endlichkeitssatz folgt, daß für $n \to \infty$ die Volumina und Injektivitätsradii der M_n gegen Null konvergieren. Nach [CG1] und [CG2] existiert deshalb für hinreichend große n auf M_n eine $\mathcal{F}$-Struktur von positivem Rang. Aus ([CG1, Proposition 1.5) ergibt sich, daß für sämtliche dieser n die Euler-Charakteristik von M_n verschwindet, was zu einem Widerspruch zur Annahme führt. $\square$

4.12. Lemma *Es gibt nur endlich viele kompakte einfach zusammenhängende nichtdiffeomorphe glatte 5-Mannigfaltigkeiten, deren zweite Homologiegruppen zu einer gegebenen Gruppe isomorph sind.*

Beweis von Lemma 4.12:

Nach Barden (siehe [Bar]) sind kompakte einfach zusammenhängende 5-Mannigfaltigkeiten M bis auf Diffeomorphie klassifiziert durch deren zweite Homologiegruppe $H_2(M;\mathbb{Z})$ und eine Invariante $i(M)$. Die Invariante i erhält man aus der zweiten Homologiegruppe und der zweiten Stiefel-Whitney–Klasse $w_2(M) \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ von M: Faßt man letztere als Homomorphismus $w: H_2(M) \to \mathbb{Z}_2$ auf, so ist dieser Homomorphismus bezüglich einer geeigneten "Basis" von H_2 (vergleiche [Bar]) auf höchstens einem Element nichttrivial. Dieses Element besitzt für ein $i \in \mathbb{N}$ die Ordnung 2^i, und $i(M)$ ist definiert als diese Zahl i.

Da es zu einer gegebenen endlich erzeugten Gruppe stets nur endlich viele verschiedene Homomorphismen dieser Gruppe in eine gegebene endliche Gruppe gibt, folgt insbesondere, daß bei vorgegebenem H_2 die Invariante i nur endlich viele Werte annehmen kann, und somit existieren nur endlich viele nichtdiffeomorphe kompakte einfach zusammenhängende 5-Mannigfaltigkeiten mit isomorpher zweiter Homologiegruppe. □

Die Klassifikation von 6-Mannigfaltigkeiten gestaltet sich wesentlich komplizierter als im 5-dimensionalen Fall, da hier beispielsweise zu ein und demselben Homotopietyp unendlich viele Homöomorphieklassen auftreten können und ferner die Kenntnis der Homologiegruppen nur die additive, doch nicht die multiplikative Struktur des Kohomologieringes bestimmt und im allgemeinen auch keine Rückschlüsse auf die Pontryagin-Klassen erlaubt.

Die allgemeine Homotopie-, Homöomorphie- und Diffeomorphieklassifikation kompakter einfach zusammenhängender 6-Mannigfaltigkeiten erfolgte erst 1988 in einer Arbeit von Žubr (vergleiche [Zu3]) und beinhaltet beziehungsweise korrigiert vorher von Wall ([Wall]), Jupp ([Jupp]) und Žubr selbst ([Zu1], [Zu2]) erzielte Teilresultate.

Ist M eine kompakte einfach zusammenhängende glatte 6-Mannigfaltigkeit, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit einer Orientierung versehen sei, so folgt aus Žubrs Klassifikation kompakter einfach zusammenhängender orientierter topologischer 6-Mannigfaltigkeiten (vergleiche [Zu3]), daß diese neben

der zweiten Homologiegruppe $H_2(M;\mathbb{Z})$,
der dritten Bettizahl $b_3(M;\mathbb{Z})$,
der ersten Pontryagin-Klasse $p_1(M) \in H^4(M;\mathbb{Z})$, und
der Schnittform $\mu_M : H^2(M;\mathbb{Z}) \otimes H^2(M;\mathbb{Z}) \otimes H^2(M;\mathbb{Z}) \to H^6(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$,

(einer symmetrischen trilinearen Form, die die multiplikative Struktur des

Kohomologieringes $H^*(M)$ bestimmt und gegeben ist durch Auswertung des Cup-Produktes auf der Orientierungsklasse von M)

bis auf Diffeomorphie klassifiziert ist durch die zweite Stiefel-Whitney–Klasse $w_2(M) \in H^2(M;\mathbb{Z}_2)$ und zwei weitere Invarianten $e_M \in G$ und $E_M \in H^4(M;G)$, wobei G eine durch $H_2(M)$ und $w_2(M)$ bestimmte zyklische Gruppe ist.

Auf die genaue Definition der Invarianten e und E und deren Eigenschaften braucht in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen werden (siehe dazu [Zu3]). Hier ist nur wesentlich, daß ähnliche wie die im Beweis von Lemma 4.12 verwandten Argumente zeigen, daß bei Vorgabe von zweiter Homologiegruppe, dritter Bettizahl, Schnittform und Pontryagin-Klasse die zweite Stiefel-Whitney-Klasse und die Invarianten e und E nur endlich viele verschiedene Werte annehmen können. Aus diesen Tatsachen ergibt sich:

4.13. Lemma *Gibt es in einer gegebenen Klasse kompakter einfach zusammenhängender glatter 6-Mannigfaltigkeiten unter den zweiten Homologiegruppen, den dritten Bettizahlen, den Schnittformen und den Pontryagin-Klassen ihrer Elemente jeweils nur endlich viele nichtisomorphe Repräsentanten, so enthält diese Klasse nur endlich viele Diffeomorphietypen von Mannigfaltigkeiten.*

Nach Huck (vergleiche [Huck], Lemma 3.2) gilt ferner:

4.14. Lemma *Existiert auf einer kompakten einfach zusammenhängenden glatten 6-Mannigfaltigkeit M eine fixpunktfreie S^1-Wirkung, so ist deren Schnittform μ_M trivial und die erste Pontryagin-Klasse $p_1(M)$ im Torsionsanteil von $H^4(M;\mathbb{Z})$ enthalten.*

Beweis von Satz 4.4:

Für ein- oder zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeiten ist die Behauptung von Satz 4.4 trivialerweise erfüllt, und da eine einfach zusammenhängende geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit eine Homotopie-3-Sphäre ist und deshalb insbesondere triviale zweite Homotopiegruppe besitzt, folgt Satz 4.4 in Dimension 3 aus Satz 3.1. Somit bleiben nur die Fälle der Dimension 4, 5 und 6 zu betrachten.

Nach Lemma 4.11 genügt es ferner, sich dabei auf Mannigfaltigkeiten mit verschwindender Euler-Charakteristik zu beschränken.

Da die Euler-Charakteristik einer kompakten glatten 4-Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe mindestens den Wert 2 besitzt, gilt Satz 4.4 nach dem soeben Gesagten insbesondere für kompakte glatte 4-Mannigfaltigkeiten mit beliebig großer, doch endlicher Ordnung der Fundamentalgruppe.

Nach Satz 4.1 gibt es für gegebene m, C und D unter den zweiten Homotopiegruppen aller m-dimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $|K| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$ nur endlich viele Isomorphieklassen. Da die betrachteten Mannigfaltigkeiten einfach zusammenhängend sind, gilt nach dem Satz von Hurewicz dasselbe für die zweiten Homologiegruppen.

In Verbund mit Lemma 4.12 ergibt sich daraus Satz 4.4 im Fall $m = 5$.

In Dimension 6 erfolgt der Beweis von Satz 4.4 über ein Widerspruchsargument: Trifft die behauptete Aussage dort nicht zu, so existieren Konstanten C und D und eine unendliche Folge $(M_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von 6-dimensionalen kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $|K(M_n)| \leq C$ und Durchmesser $\leq D$, die paarweise nichtdiffeomorph sind und (vergleiche Lemma 4.11) verschwindende Euler-Charakteristik besitzen.

Aus Cheegers Endlichkeitssatz folgt, daß für $n \to \infty$ die Volumina der M_n gegen Null konvergieren. Nach eventuellem Übergang zu einer unendlichen Teilfolge der M_n läßt sich aufgrund von Gromovs Präkompaktheitssatz annehmen, daß die Riemannschen Mannigfaltigkeiten M_n bezüglich des Hausdorff-Abstandes gegen einen kompakten Alexandrov-Raum einer Dimension $6-k < 6$ konvergieren.

Nach Satz 1.31 existiert deshalb (für hinreichend große Werte von n) auf jeder Mannigfaltigkeit M_n eine reine invariante $\mathcal{N}$-Struktur, die gegeben ist durch eine glatte und fixpunktfreie Wirkung eines k-dimensionalen Torus.

Da die Orbiten dieser Wirkungen positivdimensional sind, existiert (ein detailliertes Argument hierzu findet sich im Beweis von Satz 5.1 im folgenden Kapitel) auf jeder der Mannigfaltigkeiten M_n insbesondere eine glatte und fixpunktfreie S^1-Wirkung.

Nach Lemma 4.14 sind deshalb die Schnittformen μ sämtlicher dieser Mannigfaltigkeiten trivial und ihre Pontryagin-Klassen $p_1(M_n) \in H^4(M_n, \mathbb{Z})$ Torsionselemente.

Aus dem als Poincaré-Dualität bekannten Sachverhalt folgt, daß in Dimension 6 die vierte Kohomologiegruppe einer kompakten Mannigfaltigkeit isomorph ist zu deren zweiter Homologiegruppe und somit der Torsionsanteil von $H^4(M_n, \mathbb{Z})$ isomorph ist zum entsprechenden Anteil von $H_2(M_n, \mathbb{Z})$.

Nach Satz 4.1 gibt es unter den zweiten Homologiegruppen (siehe oben) der Mannigfaltigkeiten M_n nur endlich viele Isomorphieklassen. Als Torsionselemente können in jeder dieser Klassen die Pontryagin-Klassen der M_n nur endlich viele verschiedene Werte annehmen. Da die dritten Bettizahlen der M_n aufgrund des Verschwindens der Euler-Charakteristiken die Relation $b_3(M_n) = 2\,b_2(M_n) + 2$ erfüllen, gibt es für diese ebenfalls nur endlich viele Möglichkeiten. Zusammen mit der Tatsache, daß die Schnittformen der Mannigfaltigkeiten M_n trivial sind, folgt aus Lemma 4.13, daß es unter den M_n nur endlich viele nichtdiffeomorphe Mannigfaltigkeiten gibt.

Dies liefert einen Widerspruch dazu, daß die unendliche Teilfolge der M_n aufgrund der ursprünglichen Annahme aus paarweise nichtdiffeomorphen Elementen besteht. Satz 4.4 ist damit vollständig bewiesen. $\square$

4.15 Bemerkung Der Beweis von Satz 4.4 liefert eine tiefere Begründung dafür, weshalb unendliche Beispielserien von kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeiten fester Dimension mit gleichmäßig beschränkter Schnittkrümmung und gleichmäßig beschränktem Durchmesser erst ab Dimension 7 auftreten können (und dann tatsächlich auch auftreten):

Satz 4.1 und Lemma 4.11 gelten zwar in beliebiger Dimension, doch die daraus resultierende Kenntnis der zweiten Homologiegruppen bis auf endlich viele Möglichkeiten und das Verschwinden der Euler-Charakteristik reichen in Dimensionen größer als 6 auch im Verbund mit Poincaré-Dualität bereits nicht mehr dazu aus, auch nur Rückschlüsse auf die genaue Struktur sämtlicher Homologie- und Kohomologiegruppen zu ziehen.

Deren Ränge lassen sich durch Satz 4.1 (oder direkter durch Gromovs Bettizahlensatz) zwar abschätzen, die Torsionsanteile dieser Gruppen sind jedoch durch Krümmungs- und Durchmesserannahmen bereits nicht mehr zu kontrollieren.

In Dimension 7 ist es genau der Torsionsanteil der vierten Kohomologiegruppe (beziehungsweise dritten Homologiegruppe), der in diesem Sinne unkontrollierbar ist, und tatsächlich unterscheiden sich die Elemente der "einfachsten" unendlichen Folgen von uniform positiv gepinchten Aloff-Wallach– oder Eschenburg–Räumen durch vierte Kohomologiegruppen von jeweils unterschiedlicher endlicher Ordnung. Bei beschränkter Torsion scheint Satz 4.4 offenbar auch in Dimension 7 zu gelten!

Im Hinblick auf den Endlichkeitssatz von Grove, Petersen und Wu, welcher zeigt, daß die obere Krümmungsschranke in Cheegers Endlichkeitssatz ab Dimension $m \geq 5$ für dessen Gültigkeit unnötig ist und in Dimension 4 bei fehlender oberer Krümmungsschranke immerhin Homöomorphietypenendlichkeit gilt, stellt sich die Frage, ob — oder zumindest wann — auch die in Satz 4.4 geforderte obere Schranke für die Krümmung aufgegeben werden kann.

Im sechsdimensionalen Fall ist die Antwort auf diese Frage negativ, und dies sogar unter der Voraussetzung nichtnegativer Krümmung:

Von Grove und Ziller konstruierte Beispiele von Metriken mit nichtnegativ gekrümmter Schnittkrümmung auf einer unendlichen Folge von paarweise nichtdiffeomorphen Totalräumen von S^2-Bündeln über S^4 (vergleiche [GrZ]) zeigen, daß für die Gültigkeit von Satz 4.4 in Dimension 6 auf die obere Krümmungsschranke nicht verzichtet werden kann.

In Dimension 5 läßt sich dagegen vermuten, daß Satz 4.4 hier auch ohne die Voraussetzung einer oberen Schranke für die Krümmung gilt.

Ein starkes Indiz dafür liefert die Tatsache, daß Satz 4.4 in Dimension 5 auch ohne obere Krümmungsschranke gültig bleibt, wenn man zusätzlich fordert, daß die Ordnung der Torsionsanteile der zweiten Homologiegruppen der betrachteten Mannigfaltigkeiten eine uniforme obere Schranke besitzt:

Aus Gromovs Bettizahlensatz folgt zunächst, daß es bis auf Isomorphie unter den Bedingungen $K \geq C$ und Durchmesser $\leq D$ nur endlich viele Möglichkeiten für die Ränge der zweiten Homologiegruppen gibt. Gleiches für die zweiten Homologiegruppen selbst impliziert die Voraussetzung $|\mathrm{Tor}\ H_2(M;\mathbb{Z})| \leq C'$, und die Behauptung ergibt sich dann aus Lemma 4.12.

Im dreidimensionalen Fall ist offen, ob in der Endlichkeitsaussage von Satz 4.4 eine obere Krümmungsschranke erforderlich ist.

Dies hängt damit zusammen, daß bis dato ungeklärt ist, ob Poincarés Vermutung, daß jede Homotopie-3-Sphäre homöomorph ist zu S^3, zutrifft oder nicht. Denn im letzteren Fall gäbe es unendlich viele paarweise nichthomöomorphe kompakte einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten.

Ebenfalls offen ist die Frage nach der Notwendigkeit einer oberen Krümmungsschranke in Dimension 4.

Letzteres betrifft allerdings nur den Fall der Diffeomorphietypenendlichkeit, denn in Analogie zum Endlichkeitssatz von Grove, Petersen und Wu, der im vierdimensionalen Fall unter den Annahmen einer unteren Krümmungs-, oberen Durchmesser- und unteren positiven Volumenschranke Homöomorphietypenendlichkeit etabliert, gilt hier folgendes Endlichkeitsresultat:

4.16. Satz *Für gegebene C und D enthält die Klasse aller 4-dimensionalen glatten kompakten einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, auf denen eine Riemannsche Metrik mit Schnittkrümmung $K \geq C$ und Durchmesser $\leq D$ existiert, nur endlich viele Homöomorphietypen.*

Beweis von Satz 4.16:

Im Gegensatz zur im Beweis von Satz 4.4 vorliegenden Situation lassen sich hier aufgrund der fehlenden oberen Krümmungsschranke keine Kollapsargumente verwenden. Stattdessen kombiniert man Gromovs Bettizahlensatz mit Freedmans Homöomorphieklassifikation von kompakten einfach zusammenhängenden 4-Mannigfaltigkeiten:

Ist M eine kompakte vierdimensionale einfach zusammenhängende (ohne Einschränkung als orientiert vorausgesetzte) topologische Mannigfaltigkeit, so sind die Homologiegruppen von M via Poincaré-Dualität vollständig durch die zweite Bettizahl $b_2(M;\mathbb{Z})$ bestimmt. Insbesondere ist die zweite Homologiegruppe von M torsionsfrei.

Die wichtigste topologische Invariante einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch eine unimodulare symmetrische Bilinearform, die Schnittform $\mu_M : H^2(M) \times H^2(M) \to H^4(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ gegeben.

Trägt M eine differenzierbare Struktur, so folgt aus Freedmans Homöomorphieklassifikation von kompakten einfach zusammenhängenden topologischen 4-Mannigfaltigkeiten (vergleiche [FQ]), daß in diesem Fall die Schnittform μ_M den Homömorphietyp von M eindeutig bestimmt.

Definiert man den Rang einer symmetrischen Bilinearform auf einer endlich erzeugten freien Abelschen Gruppe A als die Dimension von $A \otimes \mathbb{R}$ und nennt zwei solche Formen isomorph, falls es einen Gruppenisomorphismus gibt, welcher die Formen ineinander überführt, so folgt aus allgemeinen Resultaten über solche Formen (vergleiche dazu [HM]):

Eine indefinite unimodulare symmetrische bilineare Form ist bis auf Isomorphie klassifiziert durch ihren Rang, ihre Signatur und durch ihre Eigenschaft, geraden oder ungeraden Typs zu sein. Daraus folgt, daß bei gegebenem Rang nur endlich viele nichtisomorphe Formen auftreten.

Definite unimodulare Formen sind bislang nicht klassifiziert. Nach einem Resultat von Eisenstein und Hermite (vergleiche [HM]) existieren jedoch nur endlich viele Isomorphieklassen von positiv definiten unimodularen symmetrischen Bilinearformen eines gegebenen Rangs.

Kombiniert man diese Aussagen mit Freedmans Klassifikation, so ergibt sich daraus:

Für gegebenes $k \in \mathbb{N}$ enthält die Klasse aller kompakten einfach zusammenhängenden glatten 4-Mannigfaltigkeiten M, deren zweite Bettizahl die Ungleichung $b_2(M;\mathbb{Z}) \leq k$ erfüllt, nur endlich viele Homöomorphietypen.

Satz 4.16 ergibt sich aus dieser Tatsache und Gromovs Bettizahlensatz. $\square$

Es bleibt die Frage, ob sich in Satz 4.16 die Homöomorphietypen- zu einer Diffeomorphietypen–Endlichkeitsaussage verschärfen läßt.

In diesem Zusammenhang sowie im Hinblick auf Satz 4.4 sei abschließend erwähnt, daß sich die in diesen Sätzen auftretenden Schranken für die Schnittkrümmung keinesfalls durch Schranken an die Ricci-Krümmung ersetzen lassen.

So folgt aus Resultaten LeBruns (vergleiche [LeB]), daß für geeignete Konstanten C und D auf jedem Element der in Bemerkung 4.8 erwähnten unendlichen Folge von paarweise nichtdiffeomorphen, doch allesamt zu $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$ homöomorphen 4-Mannigfaltigkeiten Metriken existieren, welche die Bedingungen Durchmesser $\leq D$ und $|Ricc| \leq C$ erfüllen.

5. Positive Krümmung und Injektivitätsradius

Gegenstand dieses Kapitels sind verschiedene mit dem Injektivitätsradius einer Riemannschen Mannigfaltigkeit positiver Schnitt– oder Ricci-Krümmung zusammenhängende Fragestellungen.

Der erste, auf der Arbeit [Tu3] basierende Abschnitt behandelt einen Struktursatz für kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit Metriken positiver Schnittkrümmung und dessen Konsequenzen für den Injektivitätsradius von positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten gerader Dimension. In Abschnitt 2, der auf Ergebnissen aus den Arbeiten [PT] und [PRT] basiert, wird eine Abschätzung für den Injektivitätsradius einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit positiv Ricci-gepinchter Metrik und endlicher zweiter Homotopiegruppe durch Größen gegeben, die nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit und der Pinching-Konstanten abhängen. Im dritten Abschnitt wird diese Injektivitätsradiusabschätzung dazu benutzt, für solche Mannigfaltigkeiten einen differenzierbaren Durchmesser-Sphärensatz herzuleiten.

1. Injektivitätsradius und Seifert-Faserungen

Eine Vielzahl der bekannten einfach zusammenhängenden kompakten positiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension besitzt die Struktur eines Totalraumes eines S^1-Bündels über einer Mannigfaltigkeit, die selbst eine Metrik positiver Krümmung trägt. Dies gilt zum Beispiel für sämtliche Aloff-Wallach-Räume, eine unendliche Familie von Eschenburg-Räumen (vgl. [E2], [E5]) sowie die Hopf-Faserungen ungeradedimensionaler Sphären.

Bei hinreichend kleinem Injektivitätsradius beziehungsweise im Fall genügend kleinen Volumens ist dies tatsächlich ein Phänomen allgemeinerer Natur, denn nach [Tu3] gilt:

5.1. Satz *In jeder Dimension $m \geq 2$ und für jedes $0 < \delta \leq 1$ existiert eine positive Konstante $v = v(m, \delta) > 0$ mit den folgenden Eigenschaften:*

Ist das Volumen einer kompakten m-dimensionalen einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Schnittkrümmung $\delta \leq K_g \leq 1$ kleiner als v, so existiert auf M eine glatte fixpunktfreie S^1-Wirkung und eine unter dieser Wirkung invariante $\delta/2$-gepinchte Metrik $\tilde{g}$. Insbesondere besitzt M die Struktur eines Seifert–S^1-Bündels über einer kompakten einfach zusammenhängenden Riemannschen Orbifold mit positiver Krümmung.

5.2. Bemerkung Nach Cheegers Endlichkeitssatz gibt es in jeder Dimension m und jedes $0 < \delta \leq 1$ bis auf Diffeomorphie nur endlich viele kompakte m-dimensionale einfach zusammenhängende δ-gepinchte Mannigfaltigkeiten, deren Volumen *größer* als die in Satz 5.1 auftretende Konstante $v(m, \delta)$ ist.

5.3. Bemerkung Aus Satz 5.1 ergibt sich eine einfache qualitative Erklärung dafür, weshalb sich im Fall gerader Dimension der Injektivitätsradius beziehungsweise das Volumen einer einfach zusammenhängenden δ-gepinchten Mannigfaltigkeit stets durch höchstens von der Dimension und der Pinching-Konstanten abhängende positive Größen von unten beschränkt ist:

Falls es in einer geraden Dimension m und für ein $0 < \delta \leq 1$ keine solche untere Abschätzung gäbe, so existierte eine Folge kompakter m-dimensionaler einfach zusammenhängender δ-gepinchter Mannigfaltigkeiten M_n, deren Injektivitätsradii für $n \to \infty$ gegen Null konvergierten. Nach Satz 5.1 gäbe es dann für n hinreichend groß auf M_n eine fixpunktfreie und bezüglich einer $\delta/2$-gepinchten Metrik $\tilde{g}_n$ isometrische S^1-Wirkung, und somit existierte auf $(M_n, \tilde{g}_n)$ ein nirgendwo verschwindendes Killing-Vektorfeld. Dies widerspräche jedoch dem Resultat Bergers (vergleiche [Ko2]), daß jedes Killingfeld auf einer positiv gekrümmten Mannigfaltigkeit gerader Dimension eine Nullstelle besitzt!

Dieses Ergebnis ist schwächer als Klingenbergs eine explizite Abschätzung lieferndes originales Resultat (siehe [Kl1]), erfüllt jedoch in Anwendungen auf Endlichkeitssätze bereits die gleichen Zwecke.

5.4. Bemerkung Wendet man Satz 5.1 auf uniform positiv gepinchte kollabierende Folgen von Aloff-Wallach-, Eschenburg- oder Bažaikin-Räumen an, so ergibt sich daraus in Dimension 6 und 12 die Existenz kompakter einfach zusammenhängender Riemannscher Orbifolds positiver Krümmung, die Basen von Seifert-Faserungen dieser Räume sind.

In diesem Zusammenhang ist hervorzuheben, daß in Dimension 12 kein Beispiel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit positiver Krümmung bekannt ist, die Basis eines S^1-Bündels sein könnte, dessen Totalraum ein Bažaikin-Raum ist.

Beweis von Satz 5.1:

Unter Benutzung des Satzes von Bonnet und Myers existiert nach Satz 1.26, wenn $c(m) > 0$ die in Satz 1.26(a) auftretende Konstante bezeichnet, zu $\varepsilon = \frac{\delta}{3c(m)} > 0$ eine positive Konstante $v = v(m, D, \varepsilon) = v(m, \delta)$, so daß jede kompakte m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Schnittkrümmung $\delta \leq K_g \leq 1$ und Volumen $< v$ folgende Bedingungen erfüllt:

Auf dem Rahmenbündel von M existiert eine invariante reine $\mathcal{N}$-Struktur $p : FM \to Y$ von positivem Rang sowie auf M eine bezüglich dieser $\mathcal{N}$-Struktur invariante Metrik g_ε, für deren Schnittkrümmung die Abschätzung $\min K_g - c(m)\,\varepsilon \;\leq\; K_{g_\varepsilon} \;\leq\; \max K_g + c(m)\varepsilon$ gilt.

Ersetzt man g_ε durch die invariante Metrik $\tilde{g} := \sqrt{1 + \delta/3}\, g_\varepsilon$, so erfüllt die Schnittkrümmung von $\tilde{g}$ die Pinching-Bedingung $0 < \delta/2 \leq K_{\tilde{g}} \leq 1$.

Ist M darüber hinaus einfach zusammenhängend, so ist nach Bemerkung 1.29 die $\mathcal{N}$-Struktur $p : FM \to Y$ gegeben durch den Lift einer glatten und fixpunktfreien T^k-Wirkung auf M, wobei der Torus T^k auf M durch Isometrien der Metrik $\tilde{g}$ operiert.

Aus der Fixpunktfreiheit der Wirkung $T^k \times M \to M$ folgt, daß die Einschränkung dieser Operation auf eine generische S^1-Untergruppe von T^k eine fixpunktfreie und bezüglich der Metrik $\tilde{g}$ isometrische S^1-Wirkung auf M definiert:

Da M kompakt und T^k kompakt Abelsch ist, ist die Anzahl der Isotropiegruppen der T^k-Wirkung endlich. Bezeichnet man diese mit H_i, $i = 1, \ldots, l$, so ist H_i isomorph zum Produkt eines Torus T^{k_i} einer Dimension $k_i < k$ und endlich vielen endlichen zyklischen Gruppen. Identifiziert man die Liealgebra von T^k mit $\mathbb{R}^k$, so ist das Urbild von H_i unter der Projektion $\pi : \mathbb{R}^k \to T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ eine abzählbare Familie von Hyperebenen mit positiver Kodimension. Da $\pi^{-1}(H_i)$ nur endlich viele Elemente enthält, deren Durchschnitt mit dem Fundamentalgebiet $W := \{x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \leq x_i < 1\}$ der Überlagerung π nichtleer ist, gibt es eine reelle Gerade durch den Ursprung von $\mathbb{R}^k$, die für jedes der endlich vielen H_i die Hyperebenen aus $\pi^{-1}(H_i)$ in höchstens einem Punkt schneidet und die mit sämtlichen Koordinatenachsen von $\mathbb{R}^k$ rationale Winkel bildet. Die Projektion dieser Gerade auf den Torus definiert eine S^1-Untergruppe von T^k, deren induzierte Wirkung auf M nach Konstruktion fixpunktfrei ist.

Da die Isotropiegruppen der S^1-Wirkung auf M endlich sind, besitzt der Quotient M/S^1 die Struktur einer Orbifold, und versehen mit der von der invarianten Metrik $\tilde{g}$ induzierten Metrik wird M/S^1 zu einer Riemannschen Orbifold mit unterer Krümmungsschranke $K \geq \delta/2 > 0$. (Nähere Einzelheiten hierzu finden sich in [Tu3], [Ho] und [Sat]). Daß M/S^1 als topologischer Raum einfach zusammenhängend ist, folgt elementar aus der entsprechenden Eigenschaft von M. $\square$

5.5. Bemerkung Zum Nachweis der Existenz einer fixpunktfreien S^1-Wirkung wird im Beweis von Satz 5.1 nicht benutzt, daß die betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) positiv gekrümmt sind; tatsächlich reicht es hierfür aus anzunehmen, daß M einfach zusammenhängend ist und im Verhältnis zum Absolutbetrag der Krümmung und zum Durchmesser hinreichend kleines Volumen hat, so daß Satz 1.26 anwendbar ist. Die Beschränkung auf positives Pinching der Schnittkrümmung gewährleistet jedoch, daß die invariante Metrik $\tilde{g}$ positiv gepincht ist und der Quotient M/S^1 selbst positiv gekrümmt ist.

2. Injektivitätsradius, zweite Homotopie und Stabilität

Unendliche Folgen von uniform positiv gepinchten paarweise nichtdiffeomorphen Aloff-Wallach-, Eschenburg- und Bažaikin-Räumen und Cheegers Endlichkeitssatz zeigen, daß im Gegensatz zu Klingenbergs Abschätzung im Fall gerader Dimension (vergleiche [Kl1]) für ungeradedimensionale einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung im allgemeinen keine höchstens von der Dimension und/oder dem Wert der Pinching-Konstanten abhängenden uniformen Injektivitätsradius- oder Volumenabschätzungen existieren, sondern dazu Zusatzvoraussetzungen erforderlich sind.

Eine solche Bedingung ist gegeben durch die Forderung, daß die zweiten Homotopiegruppen der betreffenenden Mannigfaltigkeiten endlich sind. Dieser Abschnitt behandelt den Beweis und erste Konsequenzen des folgenden Resultates der Arbeit [PT]:

5.6. Satz *Für jedes gegebene m und $\delta > 0$ existieren nur von m und δ abhängende positive Konstanten i_0, so daß der Injektivitätsradius einer jeden m-dimensionalen vollständigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, deren Metrik der Bedingung $Ricc \geq \delta$, $K \leq 1$ genügt, von unten durch i_0 beschränkt ist.*

5.7. Bemerkung Satz 5.6 verallgemeinert den Satz von Burago-Toponogov (siehe [BT], vergleiche [Sak]) von Dimension 3 auf beliebige Dimensionen.

Da die im Fall positiver Schnittkrümmung zur Erzielung von Injektivitätsradius-Abschätzungen von Klingenberg (vergleiche [Kl1]) benutzten Argumente wie das Synge-Lemma nicht auf Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung übertragbar sind, liefert Satz 5.6 auch für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension ein neues Ergebnis.

5.8. Bemerkung Unter der allgemeinen Voraussetzung positiven Ricci-Pinchings ist die Forderung der Endlichkeit der zweiten Homotopiegruppe in Satz 5.6 notwendig und dieser somit optimal. Dies gilt selbst dann, wenn man sich auf Mannigfaltigkeiten festen topologischen Typs beschränkt, denn von Wang und Ziller (siehe [WZ]) konstruierte Beispiele zeigen, daß für jede natürliche Zahl k auf den Mannigfaltigkeiten $M = \mathbb{CP}^1 \times S^{2k+1}$ Einstein-Metriken g_n mit positiver Skalarkrümmung existieren, die für $n \to \infty$ bei gleichmäßig beschränkter Krümmung zu $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^k$ kollabieren.

5.9. Bemerkung Im Fall positiven Pinchings der Schnittkrümmung findet sich bei Fang und Rong ([FR1]) ein ebenfalls auf der Arbeit [PRT] aufbauender Beweis von Satz 5.6.

In diesem Spezialfall löst Satz 5.6 für Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe insbesondere die Vermutung von Klingenberg und Sakai (siehe [KS2]), nach welcher für eine gegebene kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit M für jedes $0 < \delta \leq 1$ eine von M und δ abhängende positive Konstante $i = i(M, \delta)$ existiert, so daß der Injektivitätsradius jeder Riemannschen Metrik auf M, deren Schnittkrümmung die Bedingung $\delta \leq K \leq 1$ erfüllt, von unten durch $i(M, \delta)$ beschränkt ist.

5.10. Bemerkung Wie Satz 3.1 liefert Satz 5.6 topologische Obstruktionen zur Konstruktion unendlicher Beispielserien von kompakten einfach zusammenhängenden paarweise nichtdiffeomorpher Mannigfaltigkeiten fester Dimension, die positive Ricci-Pinchings–Bedingungen erfüllen.

Darüber hinaus hat Satz 5.6 die sich nicht aus Satz 3.1 ergebende Konsequenz, daß auf positiv Ricci-gepinchten Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe optimal gepinchte $C^{1,\alpha}$-Metriken (vergleiche hierzu [Be6]) existieren.

Grundlegend für den Beweis von Satz 5.6 und andere Injektivitätsradius-Abschätzungen (vergleiche hierzu [PT]) ist der Begriff der Stabilität einer Folge metrischer Räume.

5.11. Definition *Eine Folge metrischer Räume $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt stabil, falls ein topologischer Raum M und auf diesem eine Folge von mit der Topologie verträglichen Metriken d_n existiert, so daß (M, d_n) und M_n isometrisch sind und ferner die Metriken d_n als Funktionen auf $M \times M$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen eine stetige Pseudometrik konvergieren.*

Im Falle kollabierender Folgen einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten M_n beschränkter Krümmung, beschränkten Durchmessers und fester Dimension läßt sich der Begriff der Stabilität so interpretieren, daß sich der Kollaps im wesentlichen wie bei den Berger-Sphären ereignet und sich für eine stabile Folge somit folgendes Bild ergibt:

Nach eventueller Umparametrisierung der Räume M_n existiert auf einer Mannigfaltigkeit M fixierten topologischen Typs eine Folge Riemannscher Metriken g_n beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers, so daß sämtliche dieser Metriken unter ein und derselben Wirkung eines Torus invariant sind, für $n \to \infty$ die g_n-Durchmesser der Torus-Orbiten gegen Null konvergieren und sich zudem die Metriken in Richtungen, die nicht in den Orbiten dieser Wirkung enthalten sind, dabei kaum ändern. So gilt nach [PRT]:

5.12. Satz *Es sei $(M_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine stabile Folge einfach zusammenhängender m-dimensionaler kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $\lambda \leq K(g_n) \leq \Lambda$ und Durchmesser $\leq D$, die für $n \to \infty$ bezüglich des Hausdorff-Abstandes gegen einen metrischen Raum X der Dimension $m-k < m$ konvergiere.*

Dann gilt für jedes gegebene $\varepsilon > 0$: Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert die Folge der mit den ε-regularisierten Metriken aus Satz 1.26 versehenen Räume (M_n, g_n^ε) gegen einen kompakten metrischen Raum $X' = X'_\varepsilon$, dessen Lipschitz-Abstand zu X kleiner als ε ist, und es existieren eine Mannigfaltigkeit M, auf dieser eine effektive und fixpunktfrei Wirkung eines Torus T^k, ein Homöomorphismus $h : M/T^k \to X'$ und Homöomorphismen $h_n : M_n \to M$ mit folgenden Eigenschaften:

Die Abbildung h_n konjugiert die T^k-Wirkung auf M und die nach Satz 1.31 zu g_n^ε assoziierte isometrische Torus-Wirkung auf M_n, und bezeichnet ferner $\pi : M \to M/T^k$ die Quotientenabbildung, so sind für eine Nullfolge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die induzierten Abbildungen $h \circ \pi \circ h_n : (M_n, g_n^\varepsilon) \to X'$ ν_n-Isometrien.

Eine ν-Isometrie metrischer Räume Y und Z ist definiert als eine Surjektion $f : Y \to Z$, die für alle $y, y' \in Y$ die Abschätzung $|\,|f(y)f(y')|/|yy'| - 1\,| < \nu$ erfüllt.

5.13. Bemerkung Definiert man in der Situation von Satz 5.12 auf M Metriken d_n^ε durch die Vorschrift $d_n^\varepsilon(x,y) = dist_{g_n^\varepsilon}(h_n^{-1}(x), h_n^{-1}(y))$, so ist die Folge (M, d_n^ε) stabil, und für kollabierende Folgen einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers kann die Schlußfolgerung von Satz 5.12 in diesem Fall auch als alternative Definition der Stabilität verwandt werden.

In den Arbeiten [PT] und [PRT] wird gezeigt, daß sich aus der Kombination von Stabilität und Pinching-Bedingungen Injektivitätsradius-Abschätzungen erhalten lassen. Die dazu erforderlichen Konstruktionen sind zu aufwendig, um diese in der vorliegenden Arbeit in Kürze detailliert wiederzugeben; die Grundidee, über Stabilität zu solchen Abschätzungen zu gelangen, ist jedoch leicht zu erfassen:

Zu einer stabilen kollabierenden Folge einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten gleichmäßig beschränkten Durchmessers und gleichmäßig beschränkter Krümmung wird zunächst anhand eines Verklebungsprozesses ein nichtkompakter Alexandrov-Raum mit derselben unteren Krümmungsschranke wie die der Folgeelemente konstruiert, und unter der zusätzlichen Voraussetzung positiven Pinchings der Schnittkrümmung (siehe [PRT]) beziehungsweise positiven Ricci-Pinchings (siehe [PT]) daraufhin die Existenz eines solchen nichtkompakten Raumes mit Bonnet-Myers–Argumenten zum Widerspruch geführt.

So gilt nach [PT] der folgende Satz:

5.14. Satz *Ist $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kollabierende Folge Riemannscher Metriken gleichmäßig beschränkter Krümmung und gleichmäßig beschränkten Durchmessers auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M, die eine unendliche stabile Teilfolge enthält, so können die Metriken g_n nicht uniform positiv Ricci-gepincht sein, also für kein $\delta > 0$ die Krümmungsbedingungen $\mathrm{Ricc}_{g_n} \geq \delta$, $K_{g_n} \leq 1$ erfüllen.*

Satz 5.6 ergibt sich deshalb aus Satz 5.14 und dem folgenden Resultat, welches besagt, daß Endlichkeit der zweiten Homotopiegruppen Stabilität impliziert:

5.15. Satz *Jede Folge kollabierender einfach zusammenhängender kompakter m-dimensionaler einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beschränkten Durchmessers mit endlichen zweiten Homotopiegruppen enthält eine unendliche stabile Teilfolge.*

Beweis von Satz 5.15 und Satz 5.6:

Falls die in Satz 5.15 behauptete Aussage nicht zutrifft, existieren m, C, D und eine kollabierende unendliche Folge $(M_n, g_n)_{n \in N}$ von kompakten einfach zusammenhängenden m-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit endlichen zweiten Homotopiegruppen und Schnittkrümmung $|K| \leq C$ sowie Durchmesser $\leq D$, die keine unendliche stabile Teilfolge enthält.

Aus Cheegers Endlichkeits- und Gromovs Präkompaktheitssatz folgt, daß nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge die Mannigfaltigkeiten M_n bezüglich des Hausdorff-Abstandes gegen einen kompakten Alexandrov-Raum einer Dimension $m - k < m$ konvergieren.

Nach Satz 1.31 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unendliche Teilfolge der Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß auf den orientierten Rahmenbündeln der Elemente M_n dieser Teilfolge invariante reine $\mathcal{N}$-Strukturen $p_n : FM_n \to Y_n$ von positivem Rang existieren, die durch freie und mit den freien $SO(m)$-Wirkungen auf den Rahmenbündeln kommutierende T^k-Wirkungen gegeben sind, und auf den M_n bezüglich der $\mathcal{N}$-Strukturen invariante Metriken $\bar{g}_n = \bar{g}_n^{\varepsilon}$ gleichmäßig beschränkter Krümmung K' und gleichmäßig beschränkten Durchmessers D' existieren, die die in Satz 1.31 genannten Eigenschaften besitzen.

Es läßt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Dimension m der Mannigfaltigkeiten M_n größer als 2 ist. Ferner darf angenommen werden, daß die Rahmenbündel FM_n einfach zusammenhängend sind, da ansonsten im folgenden Argument anstelle der FM_n und der $SO(m) \times T^k$-Wirkungen auf diesen die isometrischen $Spin(m) \times T^k$-Wirkungen auf den universellen Riemannschen Überlagerungen $F_n := \widetilde{F}M_n$ der FM_n betrachtet werden können.

Nach Wahl von (vergleiche Satz 1.31) fast isometrischen Bi-Lipschitz-Diffeomorphismen $\tilde{\chi}_n : (FM_n/T^k, SO(m)) \to (Y, SO(m))$ existieren nach Lemma 3.6 Diffeomorphismen $\tilde{h}_{n,l} : (FM_n, SO(m) \times T^k) \to (FM_l, SO(m) \times T^k)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
(FM_n, SO(m) \times T^k) & \xrightarrow{\tilde{h}_{n,l}} & (FM_l, SO(m) \times T^k) \\
\Big\downarrow \pi_n & & \Big\downarrow \pi_l \\
(FM_n/T^k, SO(m)) & \xrightarrow{\tilde{\chi}_l^{-1} \circ \tilde{\chi}_n} & (FM_l/T^k, SO(m))
\end{array}$$

Die Diffeomorphismen $\tilde{\chi}_n : (FM_n/T^k, SO(m)) \to (Y, SO(m))$ induzieren fast isometrische Homöomorphismen $\chi_n : M_n/T^k = FM_n/(SO(m) \times T^k) \to Y/SO(m) = X$ auf den Faktoren, wobei X den Hausdorff-Grenzwert der (mit den invarianten Metriken versehenen) Mannigfaltigkeiten M_n bezeichnet.

Die Diffeomorphismen $\tilde{h}_{n,l}$ induzieren Diffeomorphismen $\bar{h}_{n,l} : (M_n, T^k) \to (M_l, T^k)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
(M_n, T^k) & \xrightarrow{\bar{h}_{n,l}} & (M_l, T^k) \\
\Big\downarrow \pi_n & & \Big\downarrow \pi_l \\
M_n/T^k & \xrightarrow{\chi_l^{-1} \circ \chi_n} & M_l/T^k
\end{array}$$

Setzt man nun für ein festes l in Definition 5.11 $M := M_l$ und definiert auf M eine Folge Riemannscher Metriken durch die Vorschrift $g_n' := (\bar{h}_{n,l}^{-1})^* \, \bar{g}_n$, so ist die Folge (M, g_n') stabil. Dies und die Tatsache, daß die obige Konstruktion für jedes $\varepsilon > 0$ durchgeführt werden kann, beweist Satz 5.15, und mit Satz 5.14 ergibt sich daraus auch Satz 5.6. $\square$

3. Ein Sphärensatz für positives Ricci-Pinching

Seit der Verwendung von Injektivitätsradiusabschätzungen in den Beweisen von Klingenbergs topologischem Sphären- und Bergers Starrheitssatz sind uniforme Abschätzungen für den Injektivitätsradius positiv gekrümmter Mannigfaltigkeiten immer wieder (vergleiche hierzu die Übersichtsartikel [AM3] und [Shi2] sowie die darin enthaltenen Referenzen) zur Erzielung verschiedener differenzierbarer oder topologischer Sphärensätze benutzt worden.

(Eine Ausnahme bildet hier allerdings der Beweis des topologischen Sphärensatzes von Eschenburg-Gromov (vergleiche [E3]), welcher keine Injektivitätsradius-Abschätzung benutzt, sondern eine solche zur Konsequenz hat.)

Ausgehend von Chengs maximalem Durchmesser-Sphärensatz, nach dem eine kompakte m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ricci-Krümmung $Ricc \geq (m-1)\delta$ und Durchmesser $\pi/\sqrt{\delta}$ isometrisch ist zur Sphäre $S^m(\delta)$ der konstanten Krümmung δ (vergleiche [Chg]), hat man sich dabei im späteren Verlauf insbesondere für topologische und differenzierbare Durchmesser-Sphärensätze für Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung interessiert.

Resultate dieser Art finden sich beipielsweise unter anderem in Arbeiten von Shiohama ([Shi1]), Itokawa ([It]), Wu ([Wu1]), Grove-Petersen ([GrP2]), Eschenburg ([E4]), Nakamura ([Na]), Petersen ([Petn1]), Bessa ([Bes]), Otsu ([Ot2]) sowie Perelman ([Per5]) und Paeng ([Pa1], [Pa2]).

Den bisherigen Höhepunkt in dieser Entwicklung bildet, zumindest was topologische Durchmesser-Sphärensätze anbetrifft, das Ergebnis von Perelman (vergleiche [Per5]), welches im Gegensatz zu sämtlichen vorstehend genannten Arbeiten keine unteren Volumen- oder Injektivitätsradius-Schranken benötigt und besagt:

In jeder Dimension m und für jedes $C \in \mathbb{R}$ existiert eine nur von m und C abhängige positive Konstante ε, so daß jede m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq C$, Ricci-Krümmung $Ricc \geq m-1$ und Durchmesser $\geq \pi - \varepsilon$ homöomorph ist zu S^m.

Beispiele von Anderson und Otsu (vergleiche [An2], [Ot1]) zeigen, daß in diesem Resultat auf die Voraussetzung einer unteren Schranke für die Schnittkrümmung nicht verzichtet werden kann. Denn ansonsten existieren beispielsweise (vergleiche [Ot1]) für jede natürliche Zahl $m \geq 5$ und $l = 2, 3, \ldots, m-2$ auf den Mannigfaltigkeiten $S^l \times S^{m-l}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Riemannsche Metriken g_n mit $Ricc(g_n) \geq m-1$ und $diam(g_n) \geq \pi - 1/n$. Diese lassen sich darüber hinaus nichtkollabierend, also eine Bedingung der Form $vol(g_n) \geq v > 0$ erfüllend, wählen.

Während bislang kein einziges Beispiel einer exotischen Sphäre mit einer Metrik positiver Schnittkrümmung bekannt ist, gibt es nach Arbeiten von Cheeger, Hernández, Nash, Poor und Wraith (vergleiche [Ch3], [He], [Nash], [Poor], [Wr1], [Wr2]) andererseits viele exotische Sphären, die Metriken mit positiver Ricci-Krümmung tragen. Insbesondere existiert (siehe [Wr1]) auf jeder 7-dimensionalen exotischen Sphäre eine Riemannsche Metrik mit positiver Ricci-Krümmung.

Deshalb kommt der Frage, unter welchen Bedingungen differenzierbare Durchmesser-Sphärensätze für Mannigfaltigkeiten positiver Ricci-Krümmung gelten und wann also Chengs maximaler Durchmesser-Sphärensatz differenzierbar stabil ist, besondere Bedeutung zu.

Die diesbezüglich optimistischste Hoffnung bestünde darin zu erwarten, daß sich Perelmans Satz auch zu einer differenzierbaren Stabilitätsaussage verschärfen ließe.

Aufgrund der bisher in der Literatur existierenden Resultate war (siehe jedoch den untenstehenden Satz) diesbezüglich bislang nicht einmal klar, ob es auf exotischen Sphären nicht Metriken geben könnte, die eine positive Ricci-Pinchings–Bedingung der Form $Ricc \geq m-1$, $K \leq C$ erfüllen und deren Durchmesser von π beliebig wenig abweicht.

Erwähnt sei in diesem Zusammenhang auch, daß bislang offen ist, ob es vierdimensionale exotische Sphären gibt. Falls nur eine solche Sphäre existiert, so lassen sich durch iteriertes Bilden zusammenhängender Summen unendlich viele paarweise nichtdiffeomorphe exotische 4-Sphären konstruieren, und a priori könnte somit eine unendliche Folge exotischer Sphären existieren, die eine positive Ricci-Pinchings–Bedingung erfüllen und deren Durchmesser gegen den Durchmesser der entsprechend gepinchten Standard-Sphäre konvergiert. Die Existenz solcher Folgen wird jedoch von Satz 4.4 ausgeschlossen.

Die bekannten differenzierbaren Durchmesser-Sphärensätze für Mannigfaltigkeiten mit positiver Ricci-Krümmung stammen von Bessa ([Bes]), Otsu ([Ot2]) und Paeng (Pa1], [Pa2]) und benutzen als wesentliche Voraussetzung sämtlich die Annahme, daß für die betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeiten uniforme untere Schranken für deren Injektivitätsradii existieren.

Die Existenz solcher Schranken ist keineswegs offensichtlich. Doch nach Satz 5.6 existieren solche Schranken für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, die eine positive Ricci-Pinchings–Bedingung erfüllen. Daraus ergibt sich das folgende Resultat, welches zeigt, daß bei Vorhandensein einer oberen Krümmungsschranke Chengs maximaler Durchmesser-Sphärensatz tatsächlich differenzierbar stabil ist:

5.16. Satz *Für jedes m und jedes C existiert eine nur von diesen Größen abhängende positive Konstante $\varepsilon = \varepsilon(m, C) > 0$, so daß für jede m-dimensionale Mannigfaltigkeit M gilt:*
Existiert auf M eine vollständige Riemannsche Metrik mit $Ricc \geq m-1$, $K \leq C$ und Durchmesser $\geq \pi - \varepsilon$, so ist M diffeomorph zur Standard-Sphäre S^m.

Mit Satz 5.6 und Perelmans topologischem Durchmesser-Sphärensatz ergibt sich Satz 5.16 direkt aus Otsus, Paengs oder Bessas Ergebnissen. Geometrisch instruktiver ist jedoch die folgende Beweisführung, die den relativen Volumen-Vergleichssatz von Bishop und Gromov benutzt.

Beweis von Satz 5.16:

Trifft die im Satz behauptete Aussage nicht zu, so existiert in einer Dimension m für eine Zahl C eine Folge m-dimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten $(M_n, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Ricc \geq m-1$ und $K \leq C$, deren Durchmesser für $n \to \infty$ gegen π konvergieren, die aber sämtlich nicht zur Standard-Sphäre S^m diffeomorph sind.

Nach Perelmans topologischem Durchmesser-Sphärensatz (siehe oben) läßt sich ohne Einschränkung annehmen, daß jede der Mannigfaltigkeiten M_n eine exotische Sphäre ist und somit insbesondere verschwindende zweite Homotopiegruppe besitzt.

Nach Satz 3.1 gibt es unter diesen exotischen Sphären nur endlich viele Diffeomorphietypen, und die Injektivitätsradii der M_n sind nach Satz 5.6 durch eine nur von m und C abhängende positive Konstante $i_0(m, C)$ von unten beschränkt.

Nach Übergang zu einer Teilfolge läßt sich deshalb annehmen, daß die Mannigfaltigkeiten M_n fixierten Diffeomorphietyp besitzen und bezüglich des Lipschitz-Abstandes für $n \to \infty$ gegen eine zu den M_n diffeomorphe glatte Mannigfaltigkeit M mit einer Metrik g der Hölder-Klasse $C^{1,\alpha}$ und Durchmesser π konvergieren (vergleiche Satz 1.7).

Es ist leicht einzusehen (für allgemeinere Aussagen vergleiche [Yam 3], [CC2]), daß der Limes (M, g) bezüglich der einfach zusammmenhängenden Raumform $S^m(1)$ der konstanten Schnittkrümmung 1 den relativen Volumen-Vergleichssatz von Bishop-Gromov (siehe [G8] oder [Zhu]) erfüllt, und da (M, g) ferner den Durchmesser π besitzt, folgt aus diesem, daß das Volumen von M mit dem Volumen der $m-$dimensionalen Einheitssphäre $S^m(1)$ übereinstimmt.

Daraus folgt, daß (M, g) isometrisch ist zu $S^m(1)$.

(Für ein anderes Argument für die Konvergenz der Volumina der Mannigfaltigkeiten M_n gegen das Volumen von $S^m(1)$ siehe [Bes]; die obige Isometrieaussage ergibt sich auf andere Weise auch aus Yamaguchis differenzierbarem Volumen-Sphärensatz für Lipschitz-Limiten (vergleiche [Yam1])).

Die Mannigfaltigkeiten M_n sind damit sämtlich diffeomorph zur m-dimensionalen Standard-Sphäre. Diese Tatsache steht im Widerspruch zur ursprünglichen Annahme, und Satz 5.16 ist bewiesen. $\square$

5.17. Bemerkung Aus Satz 5.16 ergibt sich insbesondere, daß für *jedes* Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit Riemannschen Metriken, die die differenzierbare Stabilität von Chengs maximalem Durchmesser-Sphärensatz verletzen, gelten muß, daß die Schnittkrümmungen dieser Metriken keine uniforme obere Schranke besitzen können.

6. Endlichkeit und Brückenräume

Dieser letzte Teil der vorliegenden Schrift diskutiert Endlichkeitsaspekte aus einer allgemeineren und vereinheitlichenden Sichtweise und versteht sich als eine Art Epilog von eher experimentellem Charakter. Entstanden ist die folgende Betrachtung aus Diskussionen mit Anton Petrunin über die Frage Karsten Groves, ob die Elemente einer nichtkollabierenden Hausdorff-konvergenten Folge Riemannscher m-Mannigfaltigkeiten mit von unten beschränkter Krümmung und beschränktem Durchmesser bis auf endlich viele Ausnahmen sämtlich diffeomorph sein müssen.

Eine positive Antwort auf diese Frage würde beispielsweise folgende Verschärfung des Durchmesser-Sphärensatzes von Grove und Shiohama implizieren: Jede Riemannsche m-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq 1$ und Durchmesser $> \pi/2$ ist diffeomorph zu S^m.

Für eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit M bezeichne $\mathcal{M}(M, \beta, C)$ den Raum aller Riemannschen Metriken g auf M, welche für einen gegebenen Satz von Bedingungen β und eine gegebene reelle Zahl C eine Ungleichung der Form $\beta(g) \leq C$ erfüllen.

Dabei seien die Bedingungen β dergestalt beschaffen, daß

1. $\mathcal{M}(M, \beta, C)$ präkompakt bezüglich des Gromov-Hausdorff-Abstandes ist, und
2. für jede Riemannsche Metrik g auf M eine reelle Zahl C existiert, so daß g in $\mathcal{M}(M, \beta, C)$ enthalten ist.

Als Beispiele für diesbezügliche Sätze von Bedingungen seien genannt:

$$\beta_1 = max\{1/vol(g), diam(g), |K(g)|\}$$

$$\beta_2 = max\{diam(g), -Ricc(g)\}$$

$$\beta_3 = max\{diam(g), |K(g)|\}$$

$$\beta_4 = max\{1/vol(g), diam(g), -K(g)\}$$

$$\beta_5 = max\{1/vol(g), diam(g), -Ricc(g)\}$$

Bildet man nun für festes $C > 0$ den Gromov-Hausdorff-Abschluß $\bar{\mathcal{M}}(M, \beta, C)$ von $\mathcal{M}(M, \beta, C)$ und definiert dann $\bar{\mathcal{M}}(M, \beta)$ als die Vereinigung der $\bar{\mathcal{M}}(M, \beta, C)$ über alle $C > 0$, so erhält man ein durch die Bedingungen β definiertes Objekt, welches nicht von speziellen Werten der Konstanten C abhängt, aber die Eigenschaft besitzt, daß in ihm enthaltene metrische Räume auf kontrollierte Weise durch Riemannsche Metriken auf M approximierbar sind:

Ist ein metrischer Raum (X, d) in $\bar{\mathcal{M}}(M, \beta)$ enthalten, so ist für eine Folge Riemannscher Metriken g_n auf M der Raum X der Gromov-Hausdorff-Limes der Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g_n), und die Metriken g_n erfüllen für ein $C > 0$ uniforme Bedingungen $\beta(g_n) \leq C$.

Definition *Zwei kompakte glatte Mannigfaltigkeiten M und M' werden bezüglich eines Satzes von Bedingungen β mit den oben angegebenen Eigenschaften (1) und (2) als (β-) benachbart bezeichnet, falls der Durchschnitt $\bar{\mathcal{M}}(M, \beta) \cap \bar{\mathcal{M}}(M', \beta)$ nicht leer ist.*

Ein metrischer Raum $X \in \bar{\mathcal{M}}(M, \beta) \cap \bar{\mathcal{M}}(M', \beta)$ wird in diesem Fall (β-) Brückenraum von M und M' genannt.

Als Illustration dieser Konzepte seien folgende Beispiele aufgeführt:

- Jeder Aloff-Wallach-Raum $M = M_{pq}$ läßt sich bei beschränkter Krümmung und beschränktem Durchmesser zu $X = SU(3)/T^2$ kollabieren.
  Also sind je zwei Aloff-Wallach-Räume β_3-benachbart, und $SU(3)/T^2$ ist ein β_3-Brückenraum für sämtliche Aloff-Wallach-Räume.

- Es gibt keine β_1-Brückenräume, denn nach Gromovs Konvergenzsatz sind β_1-benachbarte Mannigfaltigkeiten diffeomorph.

- Für die Klasse kompakter einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten mit endlicher zweiter Homotopiegruppe, deren Dimension durch eine endliche Konstante von oben beschränkt ist, kann jeder metrische Raum nur als β_3-Brückenraum für endlich viele solcher Mannigfaltigkeiten auftreten.
  Denn ist X ein β_3-Brückenraum für kompakte einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M und M' mit endlicher zweiter Homotopiegruppe und (nicht notwendig gleicher) Dimension $\leq D < \infty$, so gibt es nach dem Beweis von Satz 3.1 nur endlich viele Möglichkeiten für den Diffeomorphietyp von M und M'.

Der Brückenraum-Formalismus (re)produziert alte und neue Fragen, zum Beispiel:

- (Grove; vergleiche [GrW]) Ist es für zwei nichtdiffeomorphe kompakte glatte Mannigfaltigkeiten unmöglich, β_4-benachbart zu sein?

- Es seien M und M' kompakte glatte Mannigfaltigkeiten mit nichtisomorphen Fundamentalgruppen. Können M und M' β_5-benachbart sein?

- Welche Geometrie besitzen β-Brückenräume?

Bibliographie

[An1] M. T. Anderson, *Short geodesics and gravitational instantons*, J. Diff. Geom. 31 (1990) 265–275

[An2] M. T. Anderson, *Metrics of positive Ricci curvature with large diameters*, Man. Math. 68 (1990) 405–415

[Au] T. Aubin, *Métriques riemanniennes et courbure* J. Diff. Geom. 4 (1970) 383–424

[AC] M. Anderson und J. Cheeger, *Diffeomorphism finiteness for manifolds with Ricci curvature and $L^{n/2}$-norm of curvature bounded*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) 1 (1991) 231–252

[AM1] U. Abresch und W. T. Meyer, *Pinching below* $1/4$, *injectivity radius, and conjugate radius*, J. Diff. Geom. 40 (1994) 643–691

[AM2] U. Abresch und W. T. Meyer, *A sphere theorem with a pinching constant below* $1/4$, J. Diff. Geom. 44 (1996) 214–261

[AM3] U. Abresch und W. T. Meyer, *Injectivity radius estimates and sphere theorems*, Comparison Geometry, MSRI Publications 30, Cambridge University Press, Cambridge 1997, 1–47

[AW] S. Aloff und N. R. Wallach, *An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975) 93–97

[Bar] D. Barden, *Simply-connected* 5*-manifolds*, Ann. of Math. 68 (1958) 721–734

[Bas] Ya. V. Bažaikin, *On a certain family of closed* 13*-dimensional Riemannian manifolds of positive curvature*, Siberian Math. J. 37,6 (1996) 1068–1085

[B1] L. Bérard Bergery, *Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive*, J. Pure Math. Appl. 55 (1976) 47–68

[B2] L. Bérard Bergery, *Certains fibrés à courbure de Ricci positive*, C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978) 929–931

[Ber] V. N. Berestovskij, *Introduction of a Riemannian structure in certain metric spaces*, Siberian Math. J. 16 (1975) 499–507

[Be1] M. Berger, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées*, Bull. Soc. Math. France 88 (1960) 57–71

[Be2] M. Berger, *Les variétés riemanniennes* 1/4*-pincées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 14 (1960) 161–170

[Be3] M. Berger, *Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1961) 179–246

[Be4] M. Berger, *On the diameter of some Riemannian manifolds*, Technical Report, Univ. of California, Berkeley 1962

[Be5] M. Berger, *Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de* 1/4, Ann. Inst. Fourier 33 (1983) 135–150

[Be6] M. Berger, *Riemannian geometry during the second half of the twentieth century*, Jber. d. Dt. Math.–Verein. 100 (1998) 45–208

[Bes] G. P. Bessa, *Differentiable sphere theorems for Ricci curvature*, Math. Z. 214 (1993) 245–249

[Br] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York–London 1972

[BN] V. N. Berestovskij und I. G. Nikolaev, *Multidimensional generalized Riemannian spaces*, Geometry IV. Nonregular Riemannian geometry, Springer Encyclopedia of Mathematical Sciences 70, Springer, Berlin 1993, 168–243

[BT] Y. Burago und V. A. Toponogov, *On three-dimensional Riemannian spaces with curvature bounded above*, Mat. Zametki 13 (1973) 881–887

[BW] W. M. Boothby und H. C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math. 68 (1958) 721–734

[BGP] Y. Burago, M. Gromov, und G. Perelman, *A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below*, Uspekhi Mat. Nauk 47,2 (1992) 3–51

[Cha] L. Chaves, *A theorem of finiteness for fat bundles*, Topology 33,3 (1994) 493–497

[Ch1] J. Cheeger, *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Dissertation, Princeton University 1967

[Ch2] J. Cheeger, *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 92 (1970) 61–74

[Ch3] J. Cheeger, *Some examples of manifolds of non-negative curvature*, J. Diff. Geom. 8 (1973) 623–628

[Chg] Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its [sic] geometric applications*, Math. Z. 143 (1975) 289–297

[Co] T. Colding, *Ricci curvature and volume convergence*, Ann. of Math. 145 (1997) 477–501

[CC1] J. Cheeger und T. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products*, Ann. of Math. 144 (1996) 189–237

[CC2] J. Cheeger und T. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I*, J. Diff. Geom. 46 (1997) 406–480

[CGr1] J. Cheeger und D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. 96 (1972) 413–443

[CGr2] J. Cheeger und D. Gromoll, *On the lower bound for the injectivity radius of 1/4-pinched Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. 15 (1980) 437–442

[CG1] J. Cheeger und M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I*, J. Diff. Geom. 23 (1986) 309–346

[CG2] J. Cheeger und M. Gromov, *Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvature bounded II*, J. Diff. Geom. 32 (1990) 269–298

[CG3] J. Cheeger und M. Gromov, *Chopping Riemannian manifolds*, Differential Geometry: A Symposium in honour of Manfredo do Carmo, Longman Scientific, Rio de Janeiro 1989, 85–94

[CR] J. Cheeger und X. Rong, *Collapsed Riemannian manifolds with bounded diameter and bounded covering geometry*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) 5,2 (1995) 141–163

[CFG] J. Cheeger, K. Fukaya und M. Gromov, *Nilpotent Structures and Invariant Metrics on Collapsed Manifolds*, J. Amer. Math. Soc. 5,2 (1992) 327–372

[DR] A. Derdzinski und A. Rigas, *Unflat connections in 3-sphere bundles over* S^4, Trans. Amer. Math. Soc. 265 (1981) 485–493

[Eh] P.-E. Ehrlich, *Metric deformations and curvature. I: Local convex deformations*, Geom. Ded. 5 (1976) 1–29

[El] H. I. Eliasson, *Die Krümmung des Raumes* $Sp(2)/SI(2)$ *von Berger*, Math. Ann. 164 (1966) 317–323

[E1] J.-H. Eschenburg, *New examples of manifolds with strictly positive curvature*, Invent. math. 66 (1982) 469–480

[E2] J.-H. Eschenburg, *Freie isometrische Aktionen auf kompakten Lie–Gruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster (2), Band 32 (1984)

[E3] J.-H. Eschenburg, *Local convexity and nonnegative curvature: Gromov's proof of the sphere theorem*, Invent. math. 84 (1986) 507–522

[E4] J.-H. Eschenburg, *Diameter, volume, and topology for positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 33 (1991) 743–747

[E5] J.-H. Eschenburg, *Inhomogeneous spaces of positive curvature*, Differential Geom. Appl. 2 (1992) 123–132

[Fu1] K. Fukaya, *Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions I*, J. Diff. Geom. 25 (1987) 139–156

[Fu2] K. Fukaya, *A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters*, J. Diff. Geom. 28 (1988) 1–21

[Fu3] K. Fukaya, *Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions II*, J. Math. Soc. Japan 41,2 (1989) 333–356

[Fu4] K. Fukaya, *Hausdorff convergence and its applications*, Recent Topics in Differential and Analytic Geometry, Kinokuniya, Tokyo 1990, 143–238

[FM] R. Friedman und J.W. Morgan, *On the diffeomorphism type of certain algebraic surfaces I*, J. Diff. Geom. 27 (1988) 297–369

[FQ] M. Freedman und F. Quinn, *Topology of 4-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1990

[FR1] F. Fang und X. Rong, *Positive Pinching, volume and second Betti number*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) 9 (1999) 641–674

[FR2] F. Fang und X. Rong, *Fixed point free circle actions and finiteness theorems*, Preprint 1999

[FY1] K. Fukaya und T. Yamaguchi, *The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. 136 (1992) 253–333

[FY2] K. Fukaya und T. Yamaguchi, *Isometry groups of singular spaces*, Math. Z. 216 (1994) 31–44

[G1] M. Gromov, *Almost flat manifolds*, J. Diff. Geom 13 (1978) 231–243

[G2] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. IHES 53 (1981) 53–73

[G3] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. 56 (1981) 179–195

[G4] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer, Berlin - New York 1986

[G5] M. Gromov, *Sign and geometric meaning of curvature*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 61 (1991), 9–123

[G6] M. Gromov, *Stability and Pinching*, Seminare di Geometria, Giornate di Topologia e geometria delle varieta, Universita degli Studi di Bologna 1992, 55–97

[G7] M. Gromov, *Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures*, Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. II Birkhäuser, Boston 1996, 1–213

[G8] M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, Boston 1999

[Gr] K. Grove, *Critical point theory for distance functions*, AMS Proc. Symp. Pure Math. 54,3, Providence, Rhode Island 1993, 357–384

[GW] R. Greene und H. H. Wu, *Lipschitz convergence of Riemannian manifolds*, Pac. J. of Math. 131 (1988) 119–141

[GrK] K. Grove und H. Karcher, *How to conjugate C^1-close group actions*, Math. Z. 132 (1973) 11–20

[GrP1] K. Grove und P. Petersen, *Bounding homotopy types by geometry*, Ann. of Math. 128 (1988) 195–206

[GrP2] K. Grove und P. Petersen, *A pinching theorem for homotopy spheres*, J. A.M.S. 3, 3 (1990) 671–677

[GrS] K. Grove und K. Shiohama, *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. 106 (1977) 201–211

[GrW] K. Grove und F. Wilhelm, *Metric constraints on exotic spheres via Alexandrov geometry*, J. Reine Angew. Math. 487 (1997) 201–217

[GrZ] K. Grove und W. Ziller, *Curvature and symmetry of Milnor spheres*, Preprint, erhältlich via http://www.math.upenn.edu/ wziller/papers

[GLP] M. Gromov, J. Lafontaine und P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic–Nathan, Paris 1981

[GPT] P. B. Gilkey, J.-H. Park, und W. Tuschmann, *Invariant metrics of positive Ricci curvature on principal bundles*, Math. Z. 227 (1998) 455–463

[GrPW] K. Grove, P. Petersen, und J. Wu, *Controlled topology in geometry*, Invent. math. 99 (1990) 205–213, Erratum: Invent. Math. 104 (1991), 221–222

[Ha] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. of Diff. Geom. 17 (1982) 255–306

[H] E. Heintze, *The curvature of $SU(5)/(Sp(2) \times S^1)$*, Invent. Math. 13 (1971) 205–212

[He] H. Hernández, *A class of compact manifolds with positive Ricci curvature*, Differential Geometry, Proc. Symp. Pure Math. 28 (1975) 73–87

[Hi] N. Hitchin, *Harmonic spinors*, Adv. in Math. 14 (1974) 1–55

[Ho] H. Holmann, *Seifertsche Faserräume*, Math. Annalen 157 (1964) 138–166

[Hopf] H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Annalen 95 (1925) 313–339

[Hua] H.-M. Huang, *Some remarks on the pinching problems*, Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 9 (1981) 321–340

[Huck] W. Huck, *A note on circle actions on 5- and 6-dimensional manifolds*, Konstanzer Schriften in Mathematik und Informatik Nr. 27 (1997). Erhältlich via http://www.informatik.uni-konstanz.de/Schriften

[HH] E. Hebey und M. Herzlich, *Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds*, Rend. di Matematica 17 (1997) 569–605

[HM] D. Husemoller und J. Milnor, *Symmetric bilinear forms*, Springer, Berlin 1973

[It] Y. Itokawa, *The topology of certain Riemannian manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 18 (1983) 151–155

[Jupp] P. Jupp, *Classification of certain 6-manifolds*, Proc. Camb. Phil. Soc. 73 (1973) 293–300

[JK] J. Jost und H. Karcher, *Geometrische Methoden zur Gewinnung von a priori-Schranken für harmonische Abbildungen*, Manuscripta Math. 40 (1982) 27-77

[Kas] A. Kasue, *A convergence theorem for Riemannian manifolds and some applications*, Nagoya Math. J. 114 (1989) 21–51

[Kat] A. Katsuda, *Gromov's convergence theorem and its applications*, Nagoya Math. J. 100 (1985) 11–48

[Kl1] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large*, Ann. Math. 69 (1959) 654–666

[Kl2] W. Klingenberg, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comm. Math. Helv. 35 (1961) 47–54

[Kl3] W. Klingenberg, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung*, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962) 49–59

[Ko1] S. Kobayashi, *Principal fiber bundles with 1-dimensional toroidal group*, Tohôku Math. J. 15 (1963) 121–139

[Ko2] S. Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 70, Springer, Berlin 1972

[KS] P. Kirby und L. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings and triangulations*, Ann. Math. Stud. 88, Princeton University Press, Princeton 1977

[KS1] W. Klingenberg und T. Sakai, *Injectivity radius estimates for* $1/4$*-pinched manifolds*, Arch. Math. 34 (1980) 371–376

[KS2] W. Klingenberg und T. Sakai, *Remarks on the injectivity radius estimate for almost* $1/4$*-pinched manifolds*, Lecture Notes in Math. 1201, Springer, Berlin 1986, 156–164

[LeB] C. LeBrun, *Kodaira Dimension and the Yamabe Problem*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999) 133–156

[Li] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 257 (1963) 7–9

[MM] M. Micallef und J. D. Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. 127 (1988) 199-227

[Na] G. Nakamura, *Diameter sphere theorems for manifolds of positive Ricci curvature*, Dissertation, Universität Nagoya 1989

[Nash] J. C. Nash, *Positive Ricci curvature on fiber bundles*, J. Diff. Geom. 14 (1979) 241–265

[Nik1] I. Nikolaev, *Parallel translation of vectors in spaces with curvature that is bilaterally bounded in the sense of A. D. Aleksandrov*, Siberian Math. J. 24 (1983) 106–119

[Nik2] I. Nikolaev, *Smoothness of the metric of spaces with curvature that is bilaterally bounded in the sense of A. D. Aleksandrov*, Siberian Math. J. 24 (1983) 247–263

[Nik3] I. Nikolaev, *Bounded curvature closure of the set of compact Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 24 (1991) 171–178

[No] S. P. Novikov, *Topology I*, Springer Encyclopedia of Mathematical Sciences 12, Springer, Berlin etc. 1996

[O'N] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 23 (1966) 459–469

[Ot1] Y. Otsu, *On manifolds of positive Ricci curvature with large diameter*, Math. Z. 206 (1991) 255–264

[Ot2] Y. Otsu, *On manifolds of small excess*, Amer. J. Math. 115 (1993) 1229–1280

[OS] Y. Otsu und T. Shioya, *The Riemannian Structure of Alexandrov Spaces*, J. Diff. Geom. 39 (1994) 629–658

[Pa1] S.-H. Paeng, *A sphere theorem under a curvature perturbation*, Kyushu J. Math. 50,2 (1996)459-470

[Pa2] S.-H. Paeng, *A sphere theorem under a curvature perturbation. II*, Kyushu J. Math. 52,2 (1998)439-454

[Per1] G. Perelman, *A. D. Alexandrov's spaces with curvature bounded below II*, Preprint Univ. of California, Berkeley 1991, bis dato nicht publiziert

[Per2] G. Perelman, *Spaces with curvature bounded below*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Birkhäuser, Zürich 1994, 517–525

[Per3] G. Perelman, *Elements of Morse theory on Alexandrov spaces*, St. Petersbg. Math. J. 5,1 (1994) 205–213

[Per4] G. Perelman, *Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll*, J. Diff. Geom. 40 (1994) 209–212

[Per5] G. Perelman, *A diameter sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature*, Math. Z. 218 (1995) 595–596

[Per6] G. Perelman, *Collapsing with no proper extremal subsets*, Comparison Geometry, MSRI Publications 30, Cambridge University Press, Cambridge 1997, 149–155

[Pet1] S. Peters, *Cheeger's finiteness theorem for diffeomorphism classes of Riemannian manifolds*, J. Reine Angew. Math. 394 (1984) 77–82

[Pet2] S. Peters, *Convergence of Riemannian manifolds*, Compositio Math. 62 (1987) 3–16

[Petn1] P. Petersen, *Small excess and Ricci curvature*, J. Geom. Anal. 1,4 (1991) 383–387

[Petn2] P. Petersen, *Comparison geometry problem list*, Riemannian geometry. Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc. 1996, 87–115

[Po] A. Pogorelov, *A theorem regarding geodesics on closed convex surfaces*, Mat. Sb. N.S. 18, 60 (1946) 181–183

[Poor] W. A. Poor, *Some exotic spheres with positive Ricci curvature*, Math. Annalen 216 (1975) 245–252

[Pugh] C.C. Pugh, *The $C^{1,1}$ conclusions in Gromov's theory*, Ergod. Thy. Dynam. Sys. 7 (1987) 133-147

[Pü] T. Püttmann, *Optimal pinching constants of odd dimensional homogeneous spaces*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1998

[PP1] G. Perelman und A. Petrunin, *Extremal subsets in Alexandrov spaces and the generalized Liberman theorem*, St. Petersburg Math. J. 5,1 (1994) 215–227

[PP2] G. Perelman und A. Petrunin, *Quasigeodesics and gradient curves in Alexandrov Spaces*, Preprint University of California at Berkeley, 1994

[PT] A. Petrunin und W. Tuschmann, *Diffeomorphism finiteness, positive pinching, and second homotopy*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) 9 (1999) 736–774

[PRT] A. Petrunin, X. Rong, und W. Tuschmann, *Collapsing vs. Positive Pinching*, Geom. and Funct. Anal. (GAFA) 9 (1999) 699–735

[Ra] H. E. Rauch, *A contribution to differential geometry in the large*, Ann. Math. 54 (1951) 38–55

[Ri] A. Rigas, *Some bundles of nonnegative curvature*, Math. Ann. 216 (1975) 245–252

[Ro1] X. Rong, *Bounding homotopy and homology groups by curvature and diameter*, Duke Math. J. 78,2 (1995) 427–435

[Ro2] X. Rong, *On the fundamental groups of manifolds of positive sectional curvature*, Ann. of Math. 143 (1996) 397–411

[Ros] Rosenberg, *C^* algebras, positive scalar curvature, and the Novikov Conjecture, III*, Topology 25 (1986) 319–336

[Ruh] E. A. Ruh, *Almost flat manifolds*, J. Diff. Geom. 17 (1982) 1–14

[Sak] T. Sakai, *On a theorem of Burago-Toponogov*, Indiana Univ. Math. J. 32, 2 (1983) 165–175

[Sat] I. Satake, *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956) 359-363

[Sha] K. Shankar, *On the fundamental groups of positively curved manifolds* J. Diff. Geom. 49 (1998) 179–182

[Shik] Y. Shikata, *On the differentiable pinching problem*, Osaka Math. J. 4 (1967) 279–287

[Shi1] K. Shiohama, *A sphere theorem for manifolds of positive Ricci curvature*, Trans. Amer. math. Scoc. 275 (1983) 811–819

[Shi2] K. Shiohama, *Recent developments in sphere theorems*, A.M.S. Proc. Symp. Pure Math. 54,3, Providence, Rhode Island 1993, 551–576

[Spa] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, New York 1966

[St] S. Stolz, *A conjecture concerning positive Ricci curvature and the Witten genus*, Math. Ann. 304, 4 (1996) 785–800

[Sy] J. Synge, *On the connectivity of spaces of positive curvature*, J. Math. (Oxford Ser.) 7 (1936) 316–320

[SY] J.-P. Sha und D.-G. Yang, *Positive Ricci curvature on the connected sums of* $S^n \times S^m$, J. Diff. Geom. 33 (1991) 127–137

[Tho] C. B. Thomas, *Almost regular contact manifolds*, J. Diff. Geom. 11 (1976) 521–533

[Tu1] W. Tuschmann, *Hausdorff convergence and the fundamental group*, Math. Z. 218 (1995) 207–211

[Tu2] W. Tuschmann, *Collapsing, Solvmanifolds and Infrahomogeneous Spaces*, Diff. Geom. Appl. 7 (1997) 251–264

[Tu3] W. Tuschmann, *On the Structure of Compact Simply Connected Manifolds of Positive Sectional Curvature*, Geom. Ded. 67 (1997) 107–116

[Tu4] W. Tuschmann, *Geometric Diffeomorphism Finiteness in Low Dimensions and Homotopy Group Finiteness*, Preprint MPI Leipzig 57/1999, erhältlich via http://www.mis.mpg.de/preprints. Seit August 1999 auch erhältlich als Artikel math.DG/9908156 via http://xxx.uni-augsburg.de/list/math.DG/9908

[Va] F. M. Valiev, *Sharp estimates of sectional curvatures of homogeneous Riemannian metrics on Wallach spaces*, Sibirsk. Mat. Zh. 20,2 (1979) 248–262, 457

[Vi] J. Vilms, *Totally geodesic maps*, J. Diff. Geom. 4 (1970) 73–79

[Wall] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology, V. On certain 6-manifolds*, Invent. math. 1 (1966) 355-374

[Wa] N. Wallach, *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Ann. of Math. 96 (1972) 277–295

[We1] A. Weinstein, *On the homotopy type of positively pinched manifolds*, Arch. Math. 18 (1967) 523–524

[We2] A. Weinstein, *Symplectic V-manifolds, periodic orbits of Hamiltonian systems, and the volume of certain Riemannian manifolds*, Commun. Pure Appl. Math. 30 (1977) 265–271

[We3] A. Weinstein, *Fat bundles and symplectic manifolds*, Adv. Math. 37 (1980) 239–250

[Wi] B. Wilking, *The normal homogeneous space $(SU(3) \times SO(3)/U^*(2)$ has positive sectional curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 1191–1194

[Wr1] D. Wraith, *Exotic spheres with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. 46 (1997) 638–649

[Wr2] D. Wraith, *Surgery on Ricci positive manifolds*, J. Reine Angew. Math. 501 (1998) 99–113

[Wu1] J.-Y. Wu, *A diameter pinching sphere theorem for positive Ricci curvature*, Proc. A.M.S. 107,3 (1989) 797–802

[Wu2] J.-Y. Wu, *An obstruction to the fundamental groups of positively Ricci curved manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. 16 (1998) 371–382

[WZ] M. Y. Wang und W. Ziller, *Einstein metrics on principal torus bundles*, J. Diff. Geom. 31 (1990) 215–248

[Yam1] T. Yamaguchi, *Lipschitz convergence of manifolds of positive Ricci curvature with large volume*, Math. Ann. 284 (1989) 423–436

[Yam2] T. Yamaguchi, *Collapsing and pinching under a lower curvature bound*, Ann. of Math. 133 (1991) 317–357

[Yam3] T. Yamaguchi, *A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces*, Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, Société Mathématique de France, Sémin. Congr. 1, Paris 1996, 601–642

[Yang] D. G. Yang, *On complete metrics of nonnegative curvature on 2-plane bundles*, Pacific J. Math. 171,2 (1995) 569–583

[Yau] S.-T. Yau, *Problem Section*, Seminar on differential geometry, Ann. Math. Stud. 102 (1982) 669–706

[Zhu] S. Zhu, *The Comparison Geometry of Ricci Curvature*, Comparison Geometry, MSRI Publications 30, Cambridge University Press, Cambridge 1997, 221–262

[Zu1] A. V. Žubr, *Classification of simply-connected six-dimensional spin manifolds*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 39 (1975) 793–812

[Zu2] A. V. Žubr, *Classification of simply-connected six-dimensional manifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 255 (1980) 828–831

[Zu3] A. V. Žubr, *Classification of simply-connected topological* 6*-manifolds*, Topology and Geometry (Rohlin-Seminar), Lecture Notes Math. 1346, Springer, Berlin 1988, 325–339