Max-Planck-Institut
für Mathematik
in den Naturwissenschaften
Leipzig

Partielle Differentialgleichungen aus der Geometrie und Physik I - Parabolische und elliptische Probleme

(Universität Regensburg, WS 2001/02)

by

Knut Smoczyk

Lecture note no.: 14 2002

Skript zur Vorlesung

Partielle Differentialgleichungen aus der Geometrie und Physik I (Parabolische und elliptische Probleme)

Knut Smoczyk
Universität Regensburg
Wintersemester 2001/02

INHALTSVERZEICHNIS

1. Kapitel: Einführung, Beispiele

Definition 1.1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, $m \geq 2$. Eine partielle Differentialgleichung (abgekürzt PDG, engl. PDE) ist eine Gleichung, welche Ableitungen einer gesuchten Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ enthält.

Bemerkung: Häufig betrachtet man auch allgemeiner vektorwertige Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ oder auch Abbildungen in differenzierbare Mannigfaltigkeiten N der Dimension $n \geq 1$ und erhält dann für $n > 1$ Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Ist $\dim(\Omega) = 1$, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen.
Unter den vielen theoretisch vorstellbaren PDGen spielen allerdings nur spezielle Typen eine wichtige Rolle und wir wollen zunächst einige interessante Beispiele angeben, die wiederum zum Teil Standardbeispiele für bestehende Klassen von PDGen bilden. Wir werden partielle Ableitungen nach einer Ortskoordinate x^i, $i = 1, \ldots, m$ entweder mit $u_{x^i} = \frac{\partial u}{\partial x^i}$ oder auch einfach durch $u_i = u_{x^i}$ abkürzen. Dabei sei $x = (x^1, \ldots, x^m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ und falls $m = 2$, so schreiben wir auch $x = x^1$, $y = x^2$.

Beispiele:

1) Die Poisson- und Laplacegleichung: Für eine gegebene Funktion
$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$
heißt
$$\Delta u := \sum_{i=1}^{m} u_{ii} = f(x)$$
Poissongleichung. Ist $f \equiv 0$, so heißt die Gleichung **Laplacegleichung**.
2) Wir zeichnen zunächst eine Koordinate t (Zeitkoordinate) von den anderen Koordinaten (Ortskoordinaten) aus und betrachten die sogenannte **Wärmeleitungsgleichung**
$$u_t = \Delta u$$
für eine Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$. Diese Gleichung beschreibt Wärme und andere Diffusionsprozesse.
3) Die Wellengleichung: Für eine Funktion $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten wir
$$u_{tt} = \Delta u.$$
Die Gleichung beschreibt Wellen- und Schwingungsphänomene.

Ist $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist der Graph Γ_u von u gegeben durch das Bild von
$$F : \Omega \to \Omega \times \mathbb{R}$$
$$F(x) := (x, u(x)) \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

Γ_u ist eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^{m+1}$ (hat also die Dimension m). In diesen Koordinaten $x \in \Omega$ sind die Tangentialvektoren $dF(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u}$$

Die induzierte Riemannsche Metrik g_{ij}, $i, j = 1, \dots, m$ auf Γ_u ist lokal durch

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x^i}, \frac{\partial F}{\partial x^i} \right\rangle = \delta_{ij} + u_i u_j$$

gegeben. Dabei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker Delta $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Die Einheitsnormale entlang Γ_u in Richtung $\frac{\partial}{\partial u}$ ist

$$\nu = \frac{1}{w} \left(- \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

wobei

$$w := \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} (u_i)^2}.$$

Die **zweite Fundamentalform** h_{ij} ist hier definiert als

$$h_{ij} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle$$

also

$$h_{ij} = \frac{u_{ij}}{w}.$$

Die **mittlere Krümmung** H von Γ_u ist die Spur von h_{ij}, also

$$H = g^{ij} h_{ij}.$$

Dabei ist g^{ij} die Inverse zu g_{ij}, d.h. es gilt $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$. Wir benutzen hier und in Zukunft die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. doppelt auftretende Indizes werden von 1 bis zur entsprechenden Dimension summiert. So ist z.B. $g^{ij} h_{ij}$ die Kurzschreibweise für

$$\sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} h_{ij}$$

und

$$g^{ik} g_{kj} = \sum_{k=1}^{m} g^{ik} g_{kj}.$$

Die Gleichung für g^{ij} lautet:

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \frac{1}{w^2} \delta^{ik} u_k \delta^{jl} u_l$$

und somit

$$\begin{aligned} H = g^{ij} h_{ij} &= \left(\delta^{ij} - \tfrac{1}{w}\delta^{ik} u_k \delta^{jl} u_l\right) \tfrac{u_{ij}}{w} \\ &= \tfrac{1}{w}\left(\Delta u - \tfrac{1}{w^2}\delta^{ik}\delta^{jl} u_k u_l u_{ij}\right). \end{aligned}$$

4) **Die Gleichung für minimale Graphen** Γ_u lautet

$$H = 0.$$

Speziell für $m = 2$ vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} H &= \tfrac{1}{w^3}(w^2 \Delta u - u_x^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}) \\ &= \tfrac{1}{w^3}((1 + u_x^2 + u_y^2)(u_{xx} + u_{yy}) - u_x^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} - u_y^2 u_{yy}) \\ &= \tfrac{1}{w^3}((1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad (1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die klassische **Minimalflächengleichung**. Die **Gleichung für vorgeschriebene mittlere Krümmung** f auf Γ_u ist hingegen für $m = 2$ durch

$$(1 + u_y^2) u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}} f(x)$$

gegeben.

5) Sei wieder $m = 2$.

$$K := \frac{\det\, h_{ij}}{\det\, g_{ij}}$$

heißt **Gaußkrümmung**. Es ist nach obigen Formeln

$$K = \frac{u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^2}$$

und die **Gleichung für vorgeschriebene Gaußkrümmung** f lautet

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = (1 + u_x^2 + u_y^2)^2 f(x)$$

Dies ist eine **Monge-Ampere Gleichung**.

6) Sei (L, g) eine Lorentz Mannigfaltigkeit, d.h. g ist eine Lorentzmetrik (Signatur $(+, -, -, -)$) und L eine 4-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.
Sei R_{ij} die Riccikrümmung von g_{ij}, $R = g^{ij} R_{ij}$ die Skalarkrümmung und T_{ij} ein gegebener Energie-Impuls-Tensor, κ eine Konstante. Die

Einsteinschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie

für die Ricci-Krümmung R_{ij} des Raum-Zeit-Kontinuums lauten

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad i, j = 0, 1, 2, 3$$

(0 steht für die Zeitkoordinate t).

Ist $T_{ij} = 0$ (Vakuum) so folgt durch Spurbildung

$$g^{ij}(R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij}) = 0 = R - \frac{1}{2}R \cdot 4 = -R$$

und damit reduziert sich die Gleichung auf

$$R_{ij} = 0.$$

Ist (M,g) eine Lorentz Mannigfaltigkeit oder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (g_{ij} positiv definit, symmetrisch) mit $R_{ij} = 0$, so sagt man, daß (M,g) Ricci-flach ist. Z.B. ist die Riccikrümmung für eine Hyperfläche $N \subset \mathbb{R}^{m+1}$ nach den Gaußgleichungen durch

$$R_{ij} = Hh_{ij} - h_{il}h_{jk}g^{kl}$$

gegeben. Die Christoffelsymbole einer Metrik g_{ij} (Lorentz oder Riemannsch) sind durch

$$\Gamma^k_{ij} := \frac{1}{2}g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

definiert. Hierbei schreiben wir abkürzend $g_{il,j}$ für $\frac{\partial}{\partial x^j}g_{il}$. Die Riccikrümmung von g ist dann lokal durch den Ausdruck

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - \Gamma^k_{ik,j} + \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{lj}\Gamma^l_{ik}$$

definiert.

7) **Die Navier-Stokes-Gleichungen** für die Geschwindigkeit $v(x,t)$ und den Druck $p(x,t)$ einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ρ und der Viskosität η lauten

$$\begin{aligned} \rho v^j_t + \rho v^i v^j_i - \eta \Delta v^j &= -p^j \qquad j = 1,2,3 \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}$$

8) Die **Maxwellgleichungen** für die elektrische Feldstärke $E = (E_1, E_2, E_3)$ und die magnetische Feldstärke $B = (B_1, B_2, B_3)$ als Funktionen von (t, x^1, x^2, x^3)

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} B = 0 && \text{(magnetostatisches Gesetz),} \\ &B_t + \operatorname{rot} E = 0 && \text{(magnetodynamisches Gesetz),} \\ &\operatorname{div} E = 4\pi\rho && \text{(elektrostatisches Gesetz,} \\ & && \rho = \text{Ladungsdichte),} \\ &E_t - \operatorname{rot} B = -4\pi j && \text{(elektrodynamisches Gesetz,} \\ & && j = \text{Stromdichte).} \end{aligned}$$

9) Schrödingergleichung

$$i\hbar u_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + V(x,u) = 0,$$

$u : \Omega \to \mathbb{C}$, m = Masse, $\hbar$ = Plancksches Wirkungsquantum.

PDGen lassen sich nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifizieren.

1. Nach dem Gleichungstyp:
   a) Lineare Gleichungen bzw. Gleichungssysteme: Sind u, v Lösungen derselben Gleichung, so auch $u + av$, $\forall$ Konstanten a.
   Hierzu zählen die Beispiele $1, 2, 3, 8$ sowie 9 falls das Potential $V(x, u)$ linear in u ist. Z.B. ist auch
   $$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}(x)u_j\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}(b^i(x)u) + c(x)u = 0$$
   linear. Eine Gleichung dieser Form nennt man auch eine Gleichung in Divergenzform, da $\frac{\partial}{\partial x^i}(a^{ij}u_j)$ eine Divergenz ist.
   b) Nichtlineare Gleichungen:
   Man unterscheidet wichtige Untertypen.
      - Eine Gleichung heißt quasilinear, wenn sie in den höchsten auftretenden Ableitungen linear ist.
      Z.B. ist die Minimialflächengleichung quasilinear aber nicht linear.
      - Semilinear: Dies sind quasilineare Gleichungen, bei denen der Term mit den höchsten Ableitungen nicht mehr von u oder Ableitungen von u niedrigerer Ordnung abhängt.
2. Ordnung der Gleichung:
   Die meisten wichtigen Gleichungen sind von höchstens 2ter Ordnung. Die Ordnung ist durch den höchsten Ableitungsgrad gegeben.
   Z.B. sind die Maxwellgleichungen (Bsp. 8) von erster Ordnung. Alle anderen Beispiele sind von 2ter Ordnung.
3. Einteilung in elliptisch, parabolisch, hyperbolisch:
   Es sei
   $$F(x, u, u_i, u_{ij}) = 0$$
   eine Gleichung 2ter Ordnung.
   Wir führen Platzhaltervariablen $p_i = u_i$, $p_{ij} = u_{ij}$ ein und untersuchen die Funktion
   $$F(x, u, p_i, p_{ij})$$
   Mit $F_{p_{ij}}$ bezeichnen wir die partiellen Ableitungen von F in Richtung p_{ij}.
   Ist die Matrix
   $$\frac{1}{2}\left(F_{p_{ij}} + F_{p_{ji}}\right)(x, u, Du, D^2u)_{i,j=1,\ldots,m}$$
   positiv definit $\forall x \in \Omega$, so heißt die Gleichung bei u **elliptisch** in Ω. (Negativ definit kann man durch Ersatz von F durch $-F$ auch "elliptisch machen").
   Die Elliptizität kann insbesondere von u abhängen. Die Gleichung heißt **hyperbolisch**, wenn die obige Matrix in $u(x)$ genau einen negativen und $m - 1$ positive Eigenwerte hat.
   Eine Gleichung
   $$u_t = F(t, x, u, u_i, u_{ij})$$
   mit elliptischem F heißt **parabolisch**.

4) Nach der Lösbarkeit:
   Betrachte eine Gleichung $F(x, u, u_i, u_{ij})$ 2. Ordnung für eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. An die Lösung u wollen wir zusätzliche Bedingungen stellen, z.B. wollen wir die Werte von u oder von ersten Ableitungen von u auf $\partial\Omega$ oder auf Teilen hiervon vorgeben.
   Nach Hadamard sollte dieses Problem die folgenden 3 Kriterien erfüllen
   a) Existenz der Lösung u bei vorgegebenen Randbedingungen.
   b) Eindeutigkeit der Lösung
   c) Stabilität, d.h. stetige Abhängigkeit von den Randwerten.

2. **Kapitel: Harmonische Funktionen, die Laplacegleichung**

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet und es gelte der Divergenzsatz

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x)dx = \int_{\partial\Omega} V(z) \cdot \nu(z) d\sigma(z) \tag{2.1}$$

wobei ν die äußere Normale entlang $\partial\Omega$ und $d\sigma$ das Volumenelement auf $\partial\Omega$ ist. Für ein Vektorfeld $V = (V^1, \dots, V^m)$ gilt:

$$\operatorname{div} V = \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} V^i = V^i_i.$$

Dazu und für den Divergenzsatz (2.1) nehmen wir

$$V \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

an.
Sind $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ so gilt

$$\operatorname{div}\, (u\nabla v) = u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle \tag{2.2}$$

und ebenso

$$\operatorname{div}\, (v\nabla u) = v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle\,. \tag{2.3}$$

Durch Integration von (2.2) und Benutzung des Divergenzsatzes (2.1) erhalten wir

$$\int_\Omega \operatorname{div}\, (u\nabla v)dx = \int_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \nu d\sigma = \int_\Omega u\Delta v + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle$$

also die erste **Greensche Formel**

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx + \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx = \int_{\partial\Omega} u(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}(z)d\sigma(z) \tag{2.4}$$

Da man u und v vertauschen kann erhält man sofort die **zweite Greensche Formel**

$$(2.5)\qquad \int\limits_{\Omega} (v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x))dx = \int\limits_{\partial\Omega} v(z)\frac{\partial u}{\partial \nu}(z) - u(z)\frac{\partial v}{\partial \nu}(z)d\sigma(z).$$

Ist z.B. $v : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Laplacegleichung $\Delta v = 0$ (solch ein v heißt dann **harmonisch**), so ist für jedes $u \in C_0^2(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v\rangle dx = 0.$$

($C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \text{supp } u \Subset \Omega\}$). Wir wollen nun einige Eigenschaften harmonischer Funktionen diskutieren.
Der Raum der harmonischen Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist offenbar ein Vektorraum, da Δ ein linearer Operator ist. Ferner gilt für $A \in O(m)$ (orthogonale Gruppe): Ist $u(x)$ harmonisch auf Ω so auch $u(A(x-y)+y)$ auf $A^{-1}(\Omega - y) + y$.
Man kann daher versuchen, eine harmonische Funktion Γ zu finden, die für ein vorher fest gewähltes $y \in \mathbb{R}^m$ zusätzlich rotationssymmetrisch bzgl. y ist.
Sei dazu $r(x) := |x - y|$ der Abstand von y. Wir suchen also eine Funktion $u(r)$, die harmonisch ist.
Sei $u' := \frac{\partial u}{\partial r}$, $u'' := \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$.
Dann ist $u_i = u' r_i = u' \frac{(x_i - y_i)}{r}$.
Ebenso $u_{ij} = u'' \frac{(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{r^2} - \frac{u'}{r^3}(x_i - y_i)(x_j - y_j) + \frac{u'}{r}\delta_{ij}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta u &= \left(\frac{u''}{r^2} - \frac{u'}{r^3}\right) \underbrace{\delta^{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j)}_{r^2} + \frac{u'}{r}\underbrace{\delta^{ij}\delta_{ij}}_{=m} \\ &= u'' - \frac{u'}{r} + m\frac{u'}{r} = u'' + \frac{m-1}{r}u'\,.\end{aligned}$$

Daher muß $u' = cr^{1-m}$ für eine Konstante c gelten.
Ist $m = 2$, so erhalten wir durch Integration $u = c\log r + d$ mit einer Konstanten d. Für $m > 2$ ergibt Integration $u = cr^{2-m} + d$ mit einer Konstanten d. Sei nun ω_m das Volumen der m-dimensionalen Einheitskugel $B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$.

Definition 2.1:
Für $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x \neq y$ sei

$$\Gamma(x,y) := \Gamma(|x-y|) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x-y| & ; m = 2 \\ \frac{1}{m(2-m)\omega_m}|x-y|^{2-m} & ; m > 2. \end{cases}$$

Γ heißt **Fundamentallösung der Laplacegleichung**.
Bemerkung: Offenbar ist Γ symmetrisch in x und y, so daß Γ sowohl für festes x harmonisch in y als auch für festes y harmonisch in x ist.
Als nächstes beweisen wir die Greensche Darstellungsformel.

Satz 2.2: Für $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ gilt $\forall y \in \Omega$

$$\begin{aligned} u(y) &= \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ u(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}(x,y) - \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \right\} d\sigma(x) \\ &+ \int\limits_{\Omega} \Gamma(x,y) \Delta u(x) dx \, , \end{aligned}$$

dabei bedeutet $\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu_x}$ die Ableitung der Funktion $\Gamma(x) := \Gamma(x,y)$ in Richtung ν.

Beweis: Sei zunächst $B(y,\varepsilon)$ ein Ball vom Radius ε um y, so daß $B(y,\varepsilon) \subset \Omega$. Dies ist für genügend kleines ε sicherlich erfüllt, da Ω offen ist. Wir wenden die 2. Greensche Formel für $v(x) = \Gamma(x,y)$ an und zwar für die Menge $\Omega' := \Omega \setminus B(y,\varepsilon)$.
Also wegen $\Delta v = 0$ auf Ω'

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega \setminus B(y,\varepsilon)} \Gamma(x,y) \Delta u(x) dx &= \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial \nu_x} \right\} d\sigma(x) \\ &+ \int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} \left\{ \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x) \frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial \nu_x} \right\} d\sigma(x) \, , \end{aligned}$$

da $\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \partial B(y,\varepsilon)$.
ν ist die äußere Normale entlang $\partial\Omega'$. Wir möchten jetzt $\varepsilon \to 0$ streben lassen. Da Γ integrabel ist und Δu beschränkt (wegen $(u \in C^2(\overline{\Omega})$), konvergiert

$$\int\limits_{\Omega \setminus B(y,\varepsilon)} \Gamma(x,y) \Delta u(x) dx$$

gegen

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(x,y) \Delta u(x) dx \, .$$

Für $x \in \partial B(y,\varepsilon)$ gilt ferner

$$\Gamma(x,y) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{1}{2\pi} \log \varepsilon & & ; m = 2 \\ \frac{1}{m(2-m)\omega_m} & varepsilon^{2-m} & ; m > 2 \end{array} \right\} =: \Gamma(\varepsilon)$$

und daher

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} \Gamma(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) d\sigma(x) \right| &\leq \Gamma(\varepsilon) \mathrm{vol}(\partial B(x,\varepsilon)) \sup_{\partial B(y,\varepsilon)} |\nabla u| \\ &\leq m\omega_m \varepsilon^{m-1} \Gamma(\varepsilon) \sup_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u| \\ &= \left\{ \begin{array}{lll} \varepsilon \log \varepsilon & \sup\limits_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u| & , \quad m = 2 \\ \frac{1}{2-m} \varepsilon & \sup\limits_{B(y,\varepsilon)} |\nabla u| & , \quad m > 2 \end{array} \right\} \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Da ν_x die innere Normale von $B(y,\varepsilon)$ ist, gilt $\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu_x} = -\frac{\partial\Gamma(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$ und somit auch

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} u(x)\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu_x}d\sigma(x) &= -\frac{\partial\Gamma(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} u(x)d\sigma(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{m\omega_m\varepsilon^{m-1}}\int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} u(x)d\sigma(x)}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} u(y)}\,.\end{aligned}$$

Diese Konvergenzen beweisen die Darstellungsformel.

Wir wollen nun die 2. Greensche Formel mit der Greenschen Darstellungsformel (diese nennt man auch manchmal 3. Greensche Formel) kombinieren. Dazu sei $v_y(x)$ eine harmonische Funktion in $x \in \Omega$ (und y sei ebenfalls ein Punkt in Ω). Die 2. Greensche Formel ergibt dann für $u \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int\limits_{\Omega} v_y(x)\Delta u(x)dx + \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v_y}{\partial\nu}(x) - v_y(x)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)d\sigma(x) = 0.$$

Addieren wir dies zur Darstellungsformel

$$\int\limits_{\Omega} \Gamma(x,y)\Delta u(x)dx + \int\limits_{\partial\Gamma} u(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_x}(x,y) - \Gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)d\sigma(x) = u(y),$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}u(y) &= \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial(\Gamma(x,y)+v_y(x))}{\partial\nu_x} - (\Gamma(x,y)+v_y(x))\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)d\sigma(x) \\ &+ \int\limits_{\Omega}(\Gamma(x,y)+v_y(x))\Delta u(x)dx\,.\end{aligned}$$

Für $x \in \overline{\Omega}, y \in \Omega$ definieren wir

$$f_y(x) := \Gamma(x,y) + v_y(x)$$

Falls $f_y(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega$, so folgt

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial f_y(x)}{\partial\nu} + \int\limits_{\Omega} f_y(x)\Delta u(x)dx$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.3: Es seien $x, y \in \overline{\Omega}$, $x \neq y$.
$G : \overline{\Omega}\times\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, für die gilt:

a) $G(x,y) = 0\ \ \forall x \in \partial\Omega, \forall y \in \overline{\Omega}$
b) $v_y(x) := G(x,y) - \Gamma(x,y)$ ist harmonisch in $x \in \Omega$.

G heißt **Greensche Funktion von** Ω (genauer: Greensche Funktion der Laplacegleichung mit Dirichlet-Randbedingungen für Ω).

Bemerkung: Die Funktion $v_y(x)$ ist insbesondere im Punkte $x = y$ harmonisch, wenn $y \in \Omega$. Da $\Gamma(x,y) \to -\infty$ für $x \to y$, folgt, daß die Greensche Funktion den gleichen Pol an der Stelle $x = y$ besitzt wie $\Gamma(x,y)$.
Falls also eine Greensche Funktion $G(x,y)$ für ein beschränktes Gebiet Ω existiert, so folgt $\forall u \in C^2(\overline{\Omega})$

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_x} d\sigma(x) + \int\limits_{\Omega} G(x,y)\Delta u(x)dx\,. \tag{2.6}$$

Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrable Funktion, so heißt

$$N(y) := \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(x)dx$$

das **Newtonsche Potential** von f.
Kennt man daher erst einmal die Greensche Funktion G eines beschränkten Gebietes Ω, so kann man den Funktionswert einer C^2-Funktion u an einer beliebigen Stelle von Ω alleine aus den Randwerten und dem Newtonpotential von Δu berechnen! Schwieriger ist allerdings die Suche nach G. Explizit angeben läßt es sich in den seltensten Fällen, sie existiert allerdings für alle "gebräuchlichen" Mengen Ω. Die Existenz ist eng verknüpft mit der Lösbarkeit des Dirichletproblems für harmonische Funktion v auf Ω, d.h. gesucht werden Funktionen

$$\begin{aligned} v : \overline{\Omega} &\to \mathbb{R} && \text{mit} \\ \Delta v(x) &= 0 && \forall x \in \Omega \\ v(x) &= \phi(x) && \forall x \in \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

wobei $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ eine vorgegebene Funktion ist. Die Randwerte sind dann hier durch die Randwerte von $-\Gamma_y(x) := -\Gamma(x,y)$ bestimmt. Ist Ω genügend symmetrisch, so ist wegen der Symmetrieeigenschaften des Laplaceoperators zu erwarten, daß man die Greensche Funktion von Ω berechnen kann. Wir werden dies nun an den Einheitskugeln $B(0,R)$ demonstrieren.
Hierzu betrachten wir die Abbildungen:

$$\begin{aligned} &s_R : \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \to \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \\ &s_R(x) := \tfrac{R^2}{|x|^2}x. \end{aligned}$$

Hierbei ist $R > 0$ eine festgewählte Konstante. Offenbar fixiert s_R den Rand $\partial B(0,R)$ und bildet $B(0,R)$ auf die Menge $\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| \geq R\}$ ab und umgekehrt. Für $R = 1$ nennt man $s_R =: s$ auch die **Spiegelung am Einheitsball**.
Es sei nun

$$G(x,y) := \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x - s_R(y)|\right) & ; y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & ; y = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

und wir behaupten, daß dies die Greensche Funktion von $B(0,R)$ ist. Für $x \in \Omega := \overset{\circ}{B}(0,R)$ ist $G_y(x) := G(x,y)$ offenbar harmonisch, wenn $x \neq y$ und

$$v_y(x) := G(x,y) - \Gamma(x,y) = \begin{cases} -\Gamma(\left(\frac{|y|}{R}|x - s_r(y)|\right) & ; y \neq 0 \\ -\Gamma(R) & ; y = 0 \end{cases}$$

ist wegen $|x - s_r(y)| > 0$ harmonisch in Ω. Auf $\partial\Omega = \partial B(0,R)$ gilt $\forall x$

$$\begin{aligned} & G_y(x) = \\ = & \begin{cases} \Gamma(\sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle}) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}\sqrt{|x|^2 + \frac{R^4}{|y|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle R^2}{|y|^2}}\right) & ; y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & ; y = 0 \end{cases} \\ = & \begin{cases} \Gamma(\sqrt{R^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle}) - \Gamma\left(|y|\sqrt{1 + \frac{R^2}{|y|^2} - \frac{2\langle x,y\rangle}{|y|^2}}\right) & ; y \neq 0 \\ \Gamma(R) - \Gamma(R) & ; y = 0 \end{cases} \\ = & \; 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega, \forall y \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung.
Offenbar ist G symmetrisch in x und y und $G(x,y) \leq 0$. Dies gilt ganz allgemein für Greensche Funktionen.
Wir wollen nun noch die Normalenableitung von G auf $\partial B(0,R)$ berechnen.
Es sei $r := |x-y|$, $\tilde{r} := \frac{|y|}{R}|x - s_R(y)|$.
Auf $x \in \partial B(0,R)$ gilt $r = \tilde{r}$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_x} &= \frac{\partial G(x,y)}{\partial |x|} \\ &= \Gamma'(r)\frac{\partial r}{\partial |x|} - \Gamma'(\tilde{r})\frac{\partial \tilde{r}}{\partial |x|} \\ &= \frac{1}{m\omega_m} r^{1-m}\left(\frac{2|x|}{2r} - \frac{2|y|^2|x|}{2\tilde{r}R^2}\right) \\ &= \frac{1}{m\omega_m r^m}\left(R - \frac{|y|^2}{R}\right) = \frac{R^2 - |y|^2}{m\omega_m R|x-y|^m}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in (2.6) ein, so bekommen wir die Formel

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{m\omega_m R} \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{u(x)}{|x-y|^m} d\sigma(x)\,, \tag{2.8}$$

vorausgesetzt $u \in C^2(B(0,r))$ ist harmonisch in $\overset{\circ}{B}(0,R)$. Die Formel (2.8) heißt **Poissonsche Darstellungsformel**. Wichtiger ist die Umkehrung, d.h.

Satz 2.4: (Lösung des Dirichletproblems auf der Kugel)
Es sei $\phi : \partial B(0,R) \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann ist die Funkiton

$$u : B(0,R) \to \mathbb{R}$$

$$u(y) := \begin{cases} \frac{R^2-|y|^2}{m\omega_m R} \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{\phi(x)}{|x-y|^m} d\sigma(x) & ; \forall y \in \overset{\circ}{B}(0,R) \\ \phi(y) & ; \forall y \in \partial B(0,R) \end{cases}$$

eine stetige Funktion auf $B(0,R)$ und $\forall y \in \overset{\circ}{B}(0,R)$ gilt

$$\Delta u(y) = 0\,.$$

Beweis: Da $G(x,y)$ harmonisch in y ist, folgt zunächst, daß

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{m\omega_m R|x-y|^m}$$

harmonisch in y ist und daher auch u.
Wir müssen also nur noch die Stetigkeit bis zum Rand nachweisen.
Wir führen den **Poissonkern** $P(x,y) := \frac{R^2-|y|^2}{m\omega_m R}|x-y|^{-m}$ ein und aus (2.8) folgt mit $u \equiv 1$

$$\int\limits_{\partial B(0,R)} P(x,y) d\sigma(x) = 1 \tag{2.9}$$

Daher auch $\forall y_0 \in \partial B(0,R)$

$$\phi(y_0) = \int\limits_{\partial B(0,R)} P(x,y)\phi(y_0) d\sigma(x) \tag{2.10}$$

Die Stetigkeit von u entlang $\partial\Omega$ folgt aus $u \equiv \phi$ auf $\partial B(0,R)$ und der Stetigkeit von ϕ.
Für $y \in \overset{\circ}{B}(0,R)$, $y_0 \in \partial B(0,R)$ gilt

$$\begin{aligned} |u(y) - u(y_0)| &= |u(y) - \phi(y_0)| \\ &= \left| \int\limits_{\partial B(0,R)} P(x,y)(\phi(x) - \phi(y_0)) d\sigma(x) \right| \\ &\leq \int\limits_{\partial B(0,R)} P(x,y)|\phi(x) - \phi(y_0)| d\sigma(x) \\ &= \int\limits_{\partial B(0,R)\cap\{x||x-y_0|\leq\delta\}} P(x,y)|\phi(x) - \phi(y_0)| d\sigma(x) \\ &+ \int\limits_{\partial B(0,R)\cap\{x||x-y_0|>\delta\}} P(x,y)|\phi(x) - \phi(y_0)| d\sigma(x) \end{aligned}$$

für $\delta > 0$ beliebig.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\forall x \in \partial B(0,R)$ mit $|x - y_0| \leq \delta$ gilt $|\phi(x) - \phi(y_0)| < \varepsilon$.
$\forall y$ mit $|y - y_0| < \frac{\delta}{2}$ gilt daher zunächst

$$|u(y) - u(y_0)| \leq \varepsilon + \sup_{\partial B(0,r)} \phi \cdot \int\limits_{\partial B(0,R)\cap\{x||x-y_0|>\delta\}} P(x,y) d\sigma(x). \tag{2.11}$$

Aus der Dreiecksungleichung

$$\delta < |x - y_0| \le |x - y| + |y - y_0| \le |x - y| + \frac{\delta}{2}$$

folgt, daß $\forall x, y, y_0$ mit $|x - y_0| > \delta$, $|y - y_0| < \frac{\delta}{2}$ auch $|x - y| \ge \frac{\delta}{2}$ folgt und somit

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B(0,R) \cap \{x \,|\, |x - y_0| > \delta\}} P(x,y)d\sigma(x) &\le \frac{R^2 - |y|^2}{m\omega_m R} \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{1}{(\frac{\delta}{2})^m} d\sigma(x) \\ &= \frac{(R^2 - |y|^2)R^{m-2}}{(\frac{\delta}{2})^m}. \end{aligned}$$

Daher gilt $\forall y$ mit $|y - y_0| < \frac{\delta}{2}$ auch

$$|u(y) - u(y_0)| \le \varepsilon + \left(\sup_{\partial B(0,R)} \phi \right) \frac{(R^2 - |y|^2)R^{m-2}}{(\frac{\delta}{2})^m}.$$

Da $\lim\limits_{y \to y_0} |y| = R$, existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, so daß $\forall y$ mit $|y - y_0| < \tilde{\delta}$ auch

$$\left(\sup_{\partial B(0,R)} \phi \right) \frac{(R^2 - |y|^2)R^{m-2}}{(\frac{\delta}{2})^m} < \varepsilon$$

und dann $\forall y$ mit $|y - y_0| < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ auch

$$|u(y) - u(y_0)| < 2\varepsilon\,.$$

q.e.d.

Die Poissonsche Formel impliziert, daß harmonische Funktionen $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ im Innern C^∞ sind. Außerdem erhalten wir aus der Poissonschen Formel die **Mittelwertformeln**:

Satz 2.5: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein beschränktes Gebiet $y \in \Omega$ sei beliebig und $B_R(y) \subset \Omega$, $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch. Dann gilt

a)

$$u(y) = \frac{1}{m\omega_m R^{m-1}} \int\limits_{\partial B_R(y)} u(x)dx$$

und

b)

$$u(y) = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx$$

Beweis:
Wir setzen

$v(x) := u(x+y)$ für $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x+y \in \Omega$. Die Darstellungsformel kann man auf v anwenden. Es gilt also

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{R}{m\omega_m} \int\limits_{\partial B(0,R)} \frac{v(x)}{|x|^m} dx \\ &= \frac{1}{m\omega_m R^{m-1}} \int\limits_{\partial B(0,R)} v(x) dx \\ &= \frac{1}{m\omega_m R^{m-1}} \int\limits_{\partial B(0,R)} u(x+y) dx \\ &= \frac{1}{m\omega_m R^{m-1}} \int\limits_{\partial B_R(y)} u(x) dx. \end{aligned}$$

Dies zeigt a). Insbesondere gilt also für alle $0 < \rho \leq R$

$$u(y) m\omega_m \rho^{m-1} = \int\limits_{\partial B_\rho(y)} u(x) dx$$

Integriert man dies über ρ von 0 bis R, so ergibt sich sofort b).

q.e.d.

Aus der Mittelwertgleichung erhält man auch Abschätzungen für die Gradienten harmonischer Funktionen. Denn

$$\begin{aligned} Du(y) &= \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} Du(x) dx, \text{ da } Du \text{ harmonisch ist} \\ &\overset{\text{Divergenzsatz}}{=} \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{\partial B_R(y)} u\nu d\sigma(x) \\ \Rightarrow |Du(y)| &\leq \frac{1}{\omega_m R^m} \sup_{\partial B_R(y)} |u| \cdot \mathrm{vol}(\partial B_R(y)) \\ &= \frac{m}{R} \sup_{\partial B_R(y)} |u| \end{aligned}$$

Ist $R = \max \{\rho \mid B_\rho(y) \subset \Omega\}$, so gilt

$$d_y := \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) = R$$

und demnach, da $\sup\limits_{\partial B_R(y)} |u| \leq \sup\limits_{\Omega} |u|$, folgt

$$|Du(y)| \leq \frac{m}{d_y} \sup_{\Omega} |u|$$

Iteriert man diese Ungleichung, so erhält man leicht

Satz 2.6: u sei harmonisch auf Ω und Ω' sei eine kompakte Teilmenge von Ω. Dann gilt für jeden Multiindex α

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{m|\alpha|}{d}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

wobei $d := \mathrm{dist}(\Omega', \Omega)$

und $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$.

Beweis: Übung

Wir kommen nun zum Beweis von

Satz 2.7: Eine stetige Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann harmonisch in Ω, wenn eine der beiden folgenden Aussagen für alle $\forall y \in \Omega$ und alle $R > 0$ mit $B_R(y) \subset \Omega$ gilt:

a)
$$u(y) = \frac{1}{m\omega_m R^{m-1}} \int\limits_{\partial B_R(y)} u(x)dx,$$

b)
$$u(y) = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx.$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" ist Satz 2.5

"$\Leftarrow$" Wir nehmen an, daß
$$u(y) = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx$$
$\forall R$ mit $B_R(y) \subset \Omega$.

Es ist in Polarkoordinaten (r, ω)
$$\frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_0^R \int\limits_{S^{m-1}} u(r,\omega) r^{m-1} d\omega$$
und daher
$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial R}\left(\tfrac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx\right) \\ &= -\tfrac{m}{R}\left(\tfrac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(y)} u(x)dx\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{\partial B_R(y)} u(x)dx \\ &= -\tfrac{m}{R} u(y) + \tfrac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{\partial B_R(y)} u(x)dx\,, \end{aligned}$$
daher impliziert b) auch a).

Wir können also stets a) annehmen.

Wir betrachten die folgende Glättungsfunktion
$$g(t) := \begin{cases} c e^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{für } 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$g(|x|)$ ist C^∞ auf R^m.

Die Konstante c sei so gewählt, daß

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(|x|)dx = 1$$

Auf $B_y(r)$ betrachten wir für $f \in C^1(\Omega)$ die Regularisierung

$$\overline{f}(y) := \frac{1}{r^m} \int\limits_{\Omega} g\left(\frac{|y-x|}{r}\right) f(x)dx$$

Man nennt dies eine Regularisierung, da $\overline{f}$ unendlich oft nach y differenzierbar ist.
Dann ist auf $B_r(y)$

$$\begin{aligned}
\overline{u}(y) &= \tfrac{1}{r^m} \int\limits_{B_r(y)} g\left(\tfrac{|y-x|}{r}\right) u(x)dx \\
&= \tfrac{1}{r^m} \int\limits_0^r \int\limits_{\partial B_s(y)} g\left(\tfrac{s}{r}\right) u(x)d\sigma(x)ds \\
&= \tfrac{1}{r^m} \int\limits_0^r g\left(\tfrac{s}{r}\right) \left(\int\limits_{\partial B_s(y)} u(x)d\sigma(x)\right) dx \\
&= \tfrac{1}{r^m} \int\limits_0^r g\left(\tfrac{s}{r}\right) m\omega_m s^{m-1} u(y)ds \\
&= u(y) \int\limits_0^1 g(\sigma) m\omega_m \sigma^{m-1} d\sigma \\
&= u(y) \int\limits_{B(0,1)} g(|x|)dx = u(y) \int\limits_{\mathbb{R}^m} g(|x|)dx = u(y).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $B_r(y) \subset \Omega$ vorausgesetzt. Gilt also die Mittelwerteigenschaft, so ist $\overline{u}(x) = u(x)\ \forall x \in B_r(y) \subset \Omega$ und u ist glatt, insbesondere $u \in C^2(\mathring{B}_r(y))$.
Nach dem Divergenzsatz also

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r(y)} \Delta u(x)dx &= \int\limits_{\partial B_r(y)} \tfrac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(x) \\
&= \int\limits_{\partial B(0,1)} \tfrac{\partial u}{\partial r}(y+r\omega) r^{m-1} d\omega \\
& \text{ in Polarkoordinaten } r, \omega = \tfrac{x-y}{r} \\
&= r^{m-1} \tfrac{\partial}{\partial r} \int\limits_{\partial B(0,1)} u(y+r\omega)d\omega \\
&= r^{m-1} \tfrac{\partial}{\partial r} \left(r^{1-m} \int\limits_{\partial B(y,r)} u(x)d\sigma(x)\right) \\
&= r^{m-1} \tfrac{\partial}{\partial r} (m\omega_m u(y)) \\
&= 0 \quad \forall r \quad \text{mit} \quad B_r(y) \subset \Omega\,.
\end{aligned}$$

Daher gilt auch $\Delta u = 0$ auf $B_r(y)$ (da r, y beliebig) und dann auch auf ganz Ω.

q.e.d.

Aus den Mittelwertformeln können wir auch noch die folgende Harnackungleichung für harmonische Funktionen beweisen.

Satz 2.8: (**Harnack-Ungleichung**)
Es sei u eine nichtnegative harmonische Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt für alle beschränkten Teilgebiete $\Omega' \Subset \Omega$ die Ungleichung

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$$

wobei die Konstante C nur von m, Ω' und Ω abhängt aber nicht von u.

Beweis: Es sei y ein beliebiger Punkt in Ω.
$R > 0$ sei so gewählt, daß $B_{4R}(y) \subset \Omega$.
x_1, x_2 seien zwei beliebige Punkte in $B_R(y)$. Dann ist offenbar
$B_R(x_1) \subset B_{2R}(y)$
$B_{2R}(y) \subset B_{3R}(x_2)$.
Da u nichtnegativ ist, folgt

$$\int\limits_{B_R(x_1)} u(x)dx \leq \int\limits_{B_{2R}(y)} u(x)dx$$

und

$$\int\limits_{B_{2R}(y)} u(x)dx \leq \int\limits_{B_{3R}(x_2)} u(x)dx$$

Zusammen also

$$\int\limits_{B_R(x_1)} u(x)dx \leq \int\limits_{B_{3R}(x_2)} u(x)dx$$

Andererseits folgt aus der Mittelwertformel

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_R(x_1)} u(x)dx$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_m (3R)^m} \int\limits_{B_{3R}(x_2)} u(x)dx\,.$$

Daher haben wir die Ungleichung

$$u(x_1) \leq 3^m u(x_2) \tag{2.12}$$

bewiesen für je zwei Punkte $x_1, x_2 \subset B_R(y) \subset B_{4R}(y) \subset \Omega$.
Sei jetzt $\Omega' \Subset \Omega$ und $x_1, x_2 \in \overline{\Omega'}$ so gewählt, daß $u(x_1) = \sup\limits_{\Omega'} u$, $u(x_2) = \inf\limits_{\Omega'} u$. (Dies geht, da $\overline{\Omega'}$ kompakt ist.)
Wir verbinden x_1 mit x_2 durch eine Kurve $\gamma \subset \overline{\Omega'}$ und wählen R so klein, daß $4R < \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega)$. Der Überdeckungssatz von Heine-Borel impliziert, daß wir diesen Bogen durch eine endliche Anzahl n von Kugeln $B_R(y_i)$,

$i = 1, \ldots, m$ mit Radius R überdecken können, so daß $y_1 = x_1$, $y_n = x_2$ und $B_R(y_i) \cap B_R(y_{i+1}) \neq \phi$. Insbesondere gilt $\inf\limits_{B_R(y_i)} u \leq \sup\limits_{B_R(y_{i+1})} u \; \forall i = 1, \ldots, n-1$.
Wir wenden (2.12) zunächst auf $B_R(y_i)$ an und erhalten

$$\sup_{B_R(y_i)} u \leq 3^m \inf_{B_R(y_i)} u \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Durch Iteration also

$$\begin{aligned} u(x_1) = \sup_{\Omega'} u = \sup_{B_R(x_1)} u \quad &= \quad \sup_{B_R(y_1)} u \leq 3^m \inf_{B_R(y_1)} u \leq 3^m \sup_{B_R(y_2)} u \leq \\ &\leq \quad 3^{2m} \inf_{B_R(y_2)} u \cdots \leq 3^{mn} \inf_{B_R(y_n)} u = 3^{mn} \inf_{\Omega'} u \end{aligned}$$

Die Konstante n hängt nicht von u ab, sondern nur von Ω' und Ω (da R von Ω abhängt). Dies beweist die Harnackungleichung.

q.e.d.

Satz 2.9: (**Harnackscher Konvergenzsatz**)
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet und $\{u_n\}$ eine monoton wachsende Folge harmonischer Funktionen auf Ω. Es existiere ein $y \in \Omega$, so daß die Folge $\{u_n(y)\}$ beschränkt ist. Dann konvergiert die Folge $\{u_n\}$ auf jedem $\Omega' \Subset \Omega$, welches ein beschränktes Teilgebiet ist, gegen eine harmonische Funktion u.

Beweis: Da $u_n(y)$ beschränkt ist und die Folge $u_n(y)$ monoton wächst, konvergiert die Folge $u_n(y)$ gegen ein $c \in \mathbb{R}$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N$, so daß $\forall n, m \geq N$

$$|u_n(y) - u_m(y)| < \varepsilon.$$

Daher gilt nach der Harnack Ungleichung für nichtnegative harmonische Funktionen $\forall m \geq n \geq N$ und $\forall \Omega'$ mit $y \in \Omega'$

$$\sup_{\Omega'} (u_m(x) - u_n(x)) \leq C \inf_{\Omega'} (u_m(x) - u_n(x)) \leq C\varepsilon \, .$$

Somit konvergiert $\{u_n\}$ gleichma"ßig auf Ω'. Der Limes ist stetig. Wir setzen

$$u(x) := \lim_{n \to \infty} u_n(x)$$

und behaupten, daß u die Mittelwertformeln erfüllt. Sei dazu $B_{\tilde{y}}(R) \subset \Omega'$ ein beliebiger Ball. Da u_n harmonisch ist, gilt

$$u_n(\tilde{y}) = \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_{\tilde{y}}(R)} u_n(x) dx.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} u(\tilde{y}) &- \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_{\tilde{y}}(R)} u(x)dx \\ &= u(\tilde{y}) - u_n(\tilde{y}) - \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_{\tilde{y}}(R)} (u(x) - u_n(x))dx\,, \end{aligned}$$

da u_n harmonisch ist und die Mittelwertformeln erfüllt.
$\forall\ n \geq N$ gilt aber: $u(x) - u_n(x) \leq C\varepsilon$ gleichmäßig auf Ω' und also auch auf $B_{\tilde{y}}(R)$. Demnach $\forall\ n \geq N$

$$\left| u(\tilde{y}) - \frac{1}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_{\tilde{y}}(R)} u(x)dx \right| \leq C\varepsilon + \frac{C\varepsilon}{\omega_m R^m} \int\limits_{B_{\tilde{y}}(R)} dx = 2C\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

Dies beweist die Gültigkeit der Mittelwertformeln auf Ω' und u ist harmonisch auf Ω'. Durch ein Überdeckungsargument kann man sich jetzt noch von der bisher gemachten Einschränkung $y \in \Omega'$ lösen.

q.e.d.

3. Kapitel: Ein Ausflug in die Riemannsche Geometrie, Zusammenhänge und partielle Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

Wir haben im letzten Kapitel als Prototyp einer partiellen Differentialgleichung (elliptisch) die Laplacegleichung auf Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ studiert und auch einige Methoden und Prinzipien diskutiert. Wir wollen jetzt die Laplacegleichung und allgemeiner partielle Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Hierzu benötigen wir offenbar zwei wesentliche Dinge:

I. Wir müssen erklären, was Differenzierbarkeit von Funktionen, Vektorfeldern und allgemeiner von Tensorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit bedeutet.

II. Wir benötigen einen Ableitungsbegriff, der nicht von den gewählten Koordinaten abhängt, d.h. einen Differentialoperator, der Tensoren in Tensoren überführt und geeignete Linearitätsbedingungen erfüllt. Ferner sollte dieser Operator eine natürliche Erweiterung des üblichen Differentialoperators auf dem $\mathbb{R}^m$ sein.

Es stellt sich heraus, daß I unabhängig von II ist, man II aber nur sinnvoll erklären kann, wenn man vorher Differenzierbarkeit erklärt hat.
Wir werden nachfolgend Begriffe wie differenzierbare Mannigfaltigkeit, Orientierung, Tangential- und Kotangentialraum etc. voraussetzen. Insbesondere wird differenzierbare Mannigfaltigkeit stets bedeuten, daß die Kartenwechsel $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$ $\forall$ Karten (U_α, x_α), (U_β, x_β) differenzierbar von der Klasse C^∞ sind.

Definition 3.1: Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. f heißt von der Klasse C^k (geschrieben $f \in C^k(M,N)$), wenn für je zwei Karten (U, x, Ω), (V, y, Ω') für M um einen beliebigen Punkt x bzw. für N um den Punkt $f(y)$ mit $f(U) \subset V$ gilt:
Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} y \circ f \circ x^{-1} & : & \Omega & \to & \Omega' \\ & & \cap & & \cap \\ & & \mathbb{R}^m & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

ist von der Klasse $C^k(\Omega, \Omega')$. Hier haben wir $m := \dim M$, $n := \dim N$ gesetzt.

Bemerkung: Da Kartenwechsel als glatt vorausgesetzt werden, ist dies wohldefiniert.
Wir erinnern an den Begriff des Vektorraumbündels:

Definition 3.2: Ein Tripel (E, π, M) bestehend aus zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten E, M und einer glatten Abbildung $\pi : E \to M$ heißt Vektorraumbündel mit Totalraum E, Basis M und Projektion π, wenn gilt:

- Jede Faser $\pi^{-1}(x) =: E_x$ mit $x \in M$ besitzt die Struktur eines n-dimensionalen (n unabhängig von x) reellen (oder auch ein anderer Körper) Vektorraums.
- Für jedes $x \in M$ existiert eine Umgebung $x \in U \subset M$ und ein Diffeomorphismus
  $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft, daß $\forall y \in U$
  $\phi_y := \phi_{|E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$ einVektorraumisomorphismus.
  n heißt der Rang von E und das Paar (ϕ, U) eine Bündelkarte.
  Die letzte Eigenschaft nennt man auch lokale Trivialität, denn sie bedeutet, daß lokal ein Vektorbündel ein Produkt aus Faser und Basis ist.

Beispiel: Das Tangentialbündel (TM, π, M). Hier ist $E = TM$, $E_x = T_xM$ und π die übliche Projektion eines Vektors $V \in T_xM$ auf den Fußpunkt $x \in M$. Ebenso hat man die anderen Tensorbündel

$$\left(\underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{k} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{l}, \pi, M \right).$$

Die Fasern sind hier natürlich durch die Vektorräume

$$\underbrace{T_x^*M \otimes \cdots \otimes T_x^rM}_{k} \otimes \underbrace{T_xM \otimes \cdots \otimes T_xM}_{l}$$

gegeben. Ein Tensor

$$T \in \left(\bigotimes_{i=1}^{k} T^*M \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=1}^{l} TM \right)$$

heißt k-fach kovariant und l-fach kontravariant.

Definition 3.3: Ein Schnitt s in einem Vektorbündel E ist eine Abbildung

$$s : M \to E\,,$$

so daß $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.
Ein Schnitt heißt von der Klasse C^k, wenn

$$s \in C^k(M, E).$$

Die Menge der Schnitte $s \in C^k(M, E)$ wird mit $\Gamma^k(E)$ abgekürzt und anstelle von $\Gamma^\infty(E)$ schreiben wir einfach $\Gamma(E)$.
Die Differenzierbarkeit von Abbildungen und Tensorfeldern läßt sich also ohne Schwierigkeiten definieren. Um einen vernünftigen Ableitungsbegriff zu erklären, bedarf es allerdings etwas mehr Vorarbeit. Zunächst könnte man z.B. versuchen die Ableitung eines Vektorfeldes $V \in \Gamma(TM)$ in Richtung eines Vektors $Y \in T_pM$ wie folgt zu erklären: Sind x^i, $i = 1, \ldots, m$ lokale Koordinaten um $p \in M$, so schreiben wir $V(x) = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ (Summe über i) in einer Umgebung U von p und könnten nun die Ableitung von V in Richtung $Y = Y^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ durch $Y^k\frac{\partial V^i}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i}$ erklären. Leider ist dies aber kein Tensor und demnach auch nicht invariant unter Koordinatentransformationen. Daher führt man den Begriff eines Zusammenhangs ∇ auf M ein.

Definition 3.4: Es sei (E, π, M) ein Vektorbündel über M. Eine Abbildung

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

mit den Eigenschaften

$$\nabla_{X+fY}s = \nabla_X s + f\nabla_Y s \tag{3.1}$$

für alle $X, Y \in TM$ und für alle $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$

$$\nabla_X(s + ft) = \nabla_X s + f\nabla_X t + df(X) \cdot t \tag{3.2}$$

$\forall\ X \in TM$, $f \in C^\infty(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$ heißt ein **Zuammenhang** auf E. Hierbei ist $\nabla_X s$ die Kurzschreibweise für $\nabla s(X)$. Man nennt $\nabla_X s$ die kovariante Ableitung von s in Richtung X. Für einen Schnitt $s = s^\alpha\sigma_\alpha \in \Gamma(E)$ gilt in lokaler Schreibweise

$$\nabla s = (\nabla s)^\alpha_i dx^i \otimes \sigma_\alpha = \nabla_i s^\alpha dx^i \otimes \sigma_\alpha$$

mit

$$\nabla_i s^\alpha = (\nabla s)^\alpha_j dx^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\,.$$

(3.1) bedeutet, daß $\nabla_X s$ im Punkte $p \in M$ nur vom Wert von X im Punkte p und von s und ∇ abhängt, aber nicht von X in einer Umgebung von p. (3.2) nennt man die Leibnizregel. Ist E durch eine lokale Basis σ_α, $\alpha = 1, \ldots, \mathrm{Rang}\,(E)$ trivialisiert und sind x^i, $i = 1, \ldots, m$ lokale Koordinaten für

M, so definiert man die **Christoffelsymbole** von ∇ durch die Koeffizienten $\Gamma^{\beta}_{i\alpha}$ der Gleichung

$$\Gamma^{\beta}_{i\alpha}\sigma_{\beta} := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\sigma_{\alpha}.$$

Satz 3.5: Es sei $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ eine **Riemannsche Metrik** auf M, d.h. $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ ist symmetrisch, (bilinear) und positiv definit.
Es seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ beliebig. $W \in \Gamma(TM)$ sei der eindeutig bestimmte Schnitt mit

$$\begin{aligned} g(W,Z) \quad = \quad & \tfrac{1}{2}\{d_X g(Y,Z) - d_Z g(X,Y) + d_Y g(Z,X) \\ & -g(X,[Y,Z]) + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X])\}\ . \end{aligned}$$

$\forall\ Z \in \Gamma(TM)$. Dann ist W wohldefiniert und die Abbildung

$$(X,Y) \mapsto \nabla_X Y := W$$

definiert einen Zusammenhang auf TM.

Beweis: Übung

Definition 3.6: Der Zusammenhang ∇ aus Satz 3.5 heißt **Levi-Civita Zusammenhang** auf M bzgl. der Metrik g.

Satz 3.7: Der Levi-Civita Zusammenhang ∇ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist der eindeutig bestimmte Zusammenhang auf TM mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} & d_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ \forall \quad & X,Y,Z \in \Gamma(TM) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} & \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \\ \forall \quad & X,Y \in \Gamma(TM) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Beweis: Übung

Definition 3.8: Ein Zusammenhang ∇ der (3.3) erfüllt, heißt **metrisch** und einen Zusammenhang für den (3.4) gilt, nennt man **torsionsfrei**, da die **Torsion** $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ verschwindet.
Der Levi-Civita Zusammenhang ist also der einzige metrische und torsionsfreie Zusammenhang auf dem Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g).
Wir wollen nun noch die Christoffelssymbole des Levi-Civita Zusammenhangs berechnen. Es ist in lokalen Koordinaten

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Wir setzen nun $X := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y := \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z := \frac{\partial}{\partial x^k}$ in die Formel für $W = \nabla_X Y$ in Satz 3.5 ein und erhalten

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial}{\partial x^k} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right\},$$

da

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0 \qquad \forall i, j$$

also

$$\Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k}).$$

Multiplizieren wir dies mit der Inversen g^{km} von g_{lk}, so ergibt sich

$$\Gamma^l_{ij} g_{lk} g^{km} = \Gamma^l_{ij} \delta^m_l = \Gamma^m_{ij},$$

also

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{mk}(g_{ikij} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \tag{3.5}$$

Für ein Vektorfeld $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ kann man daher

$$\begin{aligned} \nabla_i Y := \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (Y^k \tfrac{\partial}{\partial x^k}) \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^i} Y^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} + Y^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \tfrac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \tfrac{\partial}{\partial x^i} Y^k \tfrac{\partial}{\partial x^k} + Y^k \Gamma^l_{ik} \tfrac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \left(\tfrac{\partial}{\partial x^i} Y^l + Y^k \Gamma^l_{ik}\right) \tfrac{\partial}{\partial x^l} \end{aligned}$$

schreiben. Mit anderen Worten, die Koeffizienten von $\nabla Y = \nabla_i Y^k dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$ sind durch

$$\nabla_i Y^k = \frac{\partial}{\partial x^i} Y^k + \Gamma^k_{il} Y^l \tag{3.6}$$

gegeben.

Wir sehen, daß eine Riemannsche Metrik in natürlicher Weise einen metrischen und torsionsfreien Zusammenhang und somit einen natürlichen Ableitungsbegriff auf dem Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit erzeugt.

Viel wichtiger noch ist nun die Tatsache, daß dies auch Zusammenhänge auf allen Bündeln

$$\underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{k} \otimes \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{l}$$

definiert.

Hierzu bemerken wir

Lemma 3.9: Ist (E, π, M) ein Vektorbündel mit Zusammenhang ∇ und ist (E^*, π, M) das dazu duale Bündel (d.h. $(E^*)_x = (E_x)^*$), so kann man einen Zusammenhang ∇^* auf E^* durch folgende Vorschrift definieren:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\mu(Y)) = \nabla_i^* \mu_\alpha Y^\alpha + \mu_\alpha \nabla_i Y^\alpha\,,$$

wenn $Y = Y^\alpha e_\alpha \in \Gamma(E)$ und $\mu = \mu_\alpha e^{*\alpha} \in \Gamma(E^*)$, d.h. man erzwingt die Produktregel.
Wegen dieser Produktregel sind die Christoffelsymbole des dualen Zusammenhangs ∇^* auf E^* dann durch

$$\nabla_i^* \sigma^\alpha = -\Gamma_{i\beta}^\alpha \sigma^\beta$$

gegeben, wenn $\Gamma_{i\beta}^\alpha$, die Christoffelsymbole von ∇ sind.
Z.B. bekommen wir für die Christoffelsymbole des Levi-Civita Zusammenhangs auf T^*M die Koeffizienten $-\Gamma_{ij}^k$, d.h. ist $\mu = \mu_i dx^i \in \Gamma(T^*M)$ eine 1-Form, so ist

$$\nabla \mu = \nabla_i \mu_j dx^i \otimes dx^j$$

mit

$$\nabla_i \mu_j = \frac{\partial}{\partial x^i}\mu_j - \Gamma_{ij}^k \mu_k\,, \tag{3.7}$$

denn dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = \tfrac{\partial}{\partial x^i}\left(dx^k\left(\tfrac{\partial}{\partial x^l}\right)\right) &= \left(-\Gamma_{im}^k dx^m\right)\tfrac{\partial}{\partial x^l} + dx^k\left(\Gamma_{il}^m \tfrac{\partial}{\partial x^m}\right) \\ &= -\Gamma_{im}^k \delta_l^m + \Gamma_{il}^m \delta_m^k = 0. \end{aligned}$$

Analog zu Lemma 3.9 haben wir auch

Lemma 3.10:
Sind (E_1, π_1, M), (E_2, π_2, M) zwei Vektorbündel mit Zusammenhängen ∇_1, ∇_2, so ist ein Zusammenhang ∇ auf dem Produktbündel $(E_1 \otimes E_2, \pi_1 \otimes \pi_2, M)$ durch

$$\nabla(s_1 \otimes s_2) := \nabla_1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2 s_2$$

definiert.
Die Beweise von Lemmata 3.9 und 3.10 sind elementar und seien dem Hörer überlassen.
Sei nun $u \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die 1-Form $du := \frac{\partial u}{\partial x^i}dx^i$ definiert dann einen glatten Schnitt im Kotangentialbündel. Ist M mit einer Riemannschen Metrik versehen, so können wir den zugehörigen Levi-Civita Zusammenhang benutzen, um diesen Schnitt abzuleiten.

Definition 3.11: $u \in C^\infty(M)$ sei eine Funktion auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Civita Zusammenhang ∇.

$$\nabla du \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$$

heißt die **Hessische** von u.

Bemerkung: Sind x^i lokale Koordinaten, so gilt $du = \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i =: u_i dx^i$ und

$$\nabla du = \nabla_i u_j dx^i \otimes dx^j$$

mit

$$\nabla_i u_j = u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k \,,$$

wobei wir hier $u_{ij} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}$ gesetzt haben. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Formel (3.7).
Da die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl}(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l})$$

symmetrisch in i und j sind, ist die Hessische

$$\nabla_i u_j \qquad \text{auch symmetrisch, d.h.}$$

$$\nabla_i u_j = \nabla_j u_i \qquad \forall i,j = 1, \dots, m = \dim(M) \tag{3.8}$$

Wir können jetzt natürlich den Tensor ∇du nochmal kovariant ableiten. Dies ergibt nach Lemmata 3.9 und 3.10 die Formel

$$\begin{aligned}(\nabla_X \nabla du)(Y,Z) &= d_X(\nabla du(Y,Z)) \\ &- \nabla du(\nabla_X Y, Z) - \nabla du(Y, \nabla_X Z)\,,\end{aligned}$$

denn $\nabla du \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ impliziert das Minuszeichen. Analog definieren wir $\nabla^k du = \underbrace{\nabla \cdot \ldots \cdot \nabla}_{k-\text{mal}} du \in \Gamma(\underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{(k+1)-\text{mal}})$. Mittels der Metrik g_{ij} können wir $du = \frac{\partial u}{\partial x^i} dx^i$ auch mit $\nabla u = \nabla^i u \frac{\partial}{\partial x^i}$ identifizieren, wenn wir $\nabla^i u := g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^i} =: g^{ij} \nabla_j u$ setzen. Statt $\nabla^k du$ (k-fache Ableitung) kann man also auch vereinfacht $\nabla^{k+1} u$ schreiben.
Eine partielle Differentialgleichung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ist eine Gleichung der Form

$$F(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^k u) = 0$$

mit $u \in C^k(M)$, $x \in M$ und $k \geq 1$. k heißt die Ordnung der Gleichung. Z.B. ist

$$a^{ij}(x,u,\nabla u)\nabla_i \nabla_j u + b^i(x,u)\nabla_i u + c(x)u + d(x) = 0 \tag{3.9}$$

eine Gleichung 2ter Ordnung, wenn

$$\begin{aligned} a &= a^{ij} \tfrac{\partial}{\partial x^i} \otimes \tfrac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM \otimes TM) \\ b &= b^i \tfrac{\partial}{\partial x^i} \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

F heißt dann linear, quasilinear, parabolisch etc., wenn dies jeweils in einer Karte gilt. Man überzeuge sich selbst, daß dies wohldefiniert ist. (3.9) ist z.B. eine quasilineare Gleichung. In lokalen Koordinaten ist

$$\nabla^2 du = \nabla_i \nabla_j u_k dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

mit

$$\nabla_i \nabla_j u_k = \frac{\partial}{\partial x^i}(\nabla_j u_k) - \Gamma^l_{ij} \nabla_l u_k - \Gamma^l_{ik} \nabla_j u_l \,.$$

Dies ist offenbar nicht mehr notwendig symmetrisch in i und j (wohl aber in j und k wegen (3.8)). Die Ursache hierfür ist, daß man kovariante Ableitungen nicht einfach vertauschen darf. Dies motiviert die Definition der Krümmung eines Zusammenhangs ∇.

Definition 3.12: ∇ sei ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel E. Die **Krümmung** von ∇ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
&R^\nabla : TM \otimes TM \otimes E \to E \\
&R^\nabla(X,Y)s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s \,,
\end{aligned}$$

wobei $X, Y \in TM$, $s \in \Gamma(E)$.
∇ heißt **flach**, wenn $R^\nabla \equiv 0$. Ist $R^\nabla \equiv 0$ für den Levi-Civita Zusammenhang ∇ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g), so heißt (M, g) flach.

Bemerkung: $R^\nabla(X,Y)s(p)$ hängt nicht von den Werten von s, X und Y in einer Umgebung des Punktes $p \in M$ ab!
Sind (E_1, π_1, M), (E_2, π_2, M) Vektorbündel über M mit Zusammenhängen ∇^1 bzw. ∇^2 so ist ja auf dem Bündel $(E_1 \otimes E_2, \pi, M)$ der Zusammenhang $\nabla^1 \otimes \nabla^2$ gegeben. Für die Krümmung von $\nabla := \nabla^1 \otimes \nabla^2$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\nabla_X \nabla_Y s_1 \otimes s_2 - \nabla_Y \nabla_X s_1 \otimes s_2 - \nabla_{[X,Y]} s_1 \otimes s_2 \\
&= \nabla_X (\nabla^1_Y s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_Y s_2) \\
&- \nabla_Y (\nabla^1_X s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_X s_2) \\
&- \nabla^1_{[X,Y]} s_1 \otimes s_2 - s_1 \otimes \nabla^2_{[X,Y]} s_2 \\
&= R^1(X,Y) s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes R^2(X,Y) s_2 \\
&+ \nabla^1_Y s_1 \otimes \nabla^2_X s_2 + \nabla^1_X s_1 \otimes \nabla^2_Y s_2 \\
&- \nabla^1_X s_1 \otimes \nabla^2_Y s_2 - \nabla^1_Y s_1 \otimes \nabla^2_X s_2 \\
&= R^1(X,Y) s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes R^2(X,Y) s_2 .
\end{aligned}$$

Ist ∇ ein Zusammenhang auf einem Bündel E, so nennt man die Koeffizienten $R^\alpha_{\beta ij}$ der Gleichungen

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \sigma_\alpha = R^\beta_{\alpha ij} \sigma_\beta \tag{3.10}$$

die **Krümmungssymbole**. Hierbei ist σ_α eine lokale Trivialisierung von E.

Vorsicht! Es gibt in der Literatur keine einheitliche Definition für den Krümmungstensor $R(X,Y)s$ und für die Symbole $R^\beta_{ij\alpha}$!

Beispiele:

a) Wenn

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

die Krümmungssymbole für den Levi-Civita Zusammenhang auf TM sind, so sind die Krümmungssymbole auf T^*M durch

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)dx^k = -R^k_{lij}dx^l$$

bestimmt.

b) Wir betrachten den Levi-Civita Zusammenhang. Es sei $\lambda = \lambda_i dx^i$ eine 1-Form

$$\Rightarrow \nabla^2\lambda = \nabla_k\nabla_l\lambda_i dx^k \otimes dx^l \otimes dx^i$$

und

(3.11) $$\nabla_k\nabla_l\lambda_i - \nabla_l\nabla_k\lambda_i = -R^j_{ikl}\lambda_j.$$

Ebenso für ein Vektorfeld $V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$

(3.12) $$\nabla_k\nabla_l V^i - \nabla_l\nabla_k V^i = R^i_{jkl}V^j.$$

Für

(3.13) $$R_{ijkl} := g_{im}R^m_{jkl}$$

gelten die folgenden Symmetrien:

(3.14) $$R_{ijkl} = -R_{jikl} = R_{jilk} = R_{lkji} \qquad \forall i,j,k,l$$

(3.15) $$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \qquad \textbf{(erste Bianchi Gleichung)}$$

(3.16)
$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0 \quad \textbf{(zweite Bianchi Gleichung)}.$$

Analog erhält man die Krümmung auf den anderen Tensorbündeln, z.B.

(3.17) $$\nabla_k\nabla_l\omega_{ij} - \nabla_l\nabla_k\omega_{ij} = -R^m_{ikl}\omega_{mj} - R^m_{jkl}\omega_{im}.$$

Wir kommen nun zurück zu den Symbolen R_{ijkl}.
Die **Riccikrümmung** $\mathrm{Ric} = R_{kl}dx^k \otimes dx^l$ ist definiert als

(3.18) $$R_{kl} := g^{ij}R_{ikjl}.$$

Diese ist offenbar symmetrisch in k und l. Die **Skalarkrümmung** R ist gegeben durch

(3.19) $$R := g^{kl}R_{kl}$$

Betrachten wir nun erneut eine glatte Funktion $u : M \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\nabla du &= \nabla_i\nabla_j u dx^i \otimes dx^j\\ \nabla^2 du &= \nabla_k\nabla_i\nabla_j u dx^k \otimes dx^i \otimes dx^j.\end{aligned}$$

Es ist dann

$$
(3.20)\qquad \begin{aligned}
\nabla_k \nabla_i \nabla_j u - \nabla_i \nabla_k \nabla_j u &= -R^m_{jki} \nabla_m u \\
&= -g^{ms} R_{sjki} \nabla_m u \\
&= -R_{sjki} \nabla^s u.
\end{aligned}
$$

Bilden wir die Spur bzgl. i und j und benutzen, daß $\nabla_i \nabla_k \nabla_j u = \nabla_i \nabla_j \nabla_k u$ (wegen $\nabla_k \nabla_j u = \nabla_j \nabla_k u$), so erhalten wir

$$
(3.21)\qquad \nabla_k \Delta u = \Delta \nabla_k u - R_{sk} \nabla^s u\,.
$$

Hierbei ist der **Laplaceoperator** Δ definiert durch

$$
(3.22)\qquad \Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j\,,
$$

also die Spur der zweiten kovarianten Ableitung.
Die Formel (3.21) ist sehr nützlich.
Wir können nämlich folgende Rechnung durchführen, falls $u \in C^3(M)$:
Für $|\nabla u|^2 := g^{ij} \nabla_i u \nabla_j u$ ist

$$
\begin{aligned}
\Delta |\nabla u|^2 &= 2\nabla^i u \Delta \nabla_i u + 2\nabla^k \nabla^l u \nabla_k \nabla_l u \\
&= 2\nabla^i u (\nabla_i \Delta u + R^l_i \nabla_l u) + 2|\nabla^2 u|^2
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
(3.23)\qquad \Delta |\nabla u|^2 = 2\langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + 2|\nabla^2 u|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)
$$

Definition 3.13: $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert des Laplaceoperators, falls eine Funktion $u : M \to \mathbb{R}$ existiert mit $u \neq 0$ und $\Delta u = -\lambda u$.

Bemerkung: Das Minuszeichen führt man hier ein, da wir $\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ gesetzt haben. In der Literatur gibt es zwei unterschiedliche Definitionen für Δ, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Unser Δ ist eine Verallgemeinerung des Standard-Laplace Operators auf dem $\mathbb{R}^m$, wohingegen $-\Delta$ aber ein positiver Operator ist, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 3.14: Die Eigenwerte λ des Laplaceoperators auf einer kompakten, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit sind positiv.

Beweis: Es ist

$$
\int_M u \Delta u d\mu = -\int_M |\nabla u|^2 d\mu\,,
$$

wobei wir den Divergenzsatz und $\partial M = \phi$ benutzt haben. $d\mu$ bezeichnet die Volumenform auf M (lokal gilt: $d\mu = \sqrt{\det\,(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$). Da aber $\Delta u = -\lambda u$ und $u \neq 0$, folgt

$$
(3.24)\qquad \int |\nabla u|^2 d\mu = \lambda \int u^2 d\mu
$$

$\Rightarrow \lambda \geq 0$ und $\lambda = 0$ nur wenn $\nabla u \equiv 0$. Dann folgt aber $u \equiv \mathrm{const} = 0$. Also $\lambda > 0$.

q.e.d.

Satz 3.15:
Es sei (M,g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m \geq 2$. Für die Riccikrümmung gelte

$$\mathrm{Ric}(V,V) \geq c|V|^2 \qquad \forall\ V \in TM$$

mit einer Konstanten c.
Ist λ ein Eigenwert des Laplaceoperators, so ist

$$\lambda \geq \frac{m}{m-1}c.$$

Beweis: Wir benutzen (3.23) und setzen $\Delta u = -\lambda u$ in die rechte Seite ein. Dies ergibt

$$\Delta|\nabla u|^2 = -2\lambda|\nabla u|^2 + 2|\nabla^2 u|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u)$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) \geq c|\nabla u|^2$. Also

$$\Delta|\nabla u|^2 \geq (-2\lambda + 2c)|\nabla u|^2 + 2|\nabla^2 u|^2\,.$$

Wegen Lemma 3.16 (siehe unten) ist

$$\begin{array}{rcl} |\nabla^2 u|^2 & \geq & \frac{1}{m}(\Delta u)^2 = \frac{\lambda^2}{m}u^2 \\ \Rightarrow \quad \Delta|\nabla u|^2 & \geq & \frac{\lambda^2}{m}u^2 + 2(c-\lambda)|\nabla u|^2. \end{array}$$

Wir integrieren dies über M und erhalten mit dem Divergenzsatz

$$0 \geq 2\frac{\lambda^2}{m}\int\limits_M u^2 d\mu + 2(c-\lambda)\int\limits_M |\nabla u|^2 d\mu$$

Nach (3.24) ist $\lambda \int\limits_M u^2 d\mu = \int\limits_M |\nabla u|^2 d\mu$ und somit

$$0 \geq \left(\frac{\lambda}{m} + c - \lambda\right)\int\limits_M |\nabla u|^2 d\mu \tag{3.25}$$

Da $\int\limits_M |\nabla u|^2 d\mu$ wegen (3.24) und Lemma 3.14 positiv ist, folgt

$$\lambda \geq \frac{m}{m-1}c.$$

q.e.d.

Wir tragen das im Beweis benutzte Lemma nach.

Lemma 3.16: Es sei $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ ein beliebiger Tensor auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) der Dimension m. Dann gilt

$$|a|^2 \geq \frac{1}{m}(\mathrm{spur}(a))^2\,.$$

Beweis: Wir setzen $a_0 := \mathrm{spur}(a) = g^{ij}a_{ij}$ und dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|a_{ij} - \tfrac{a_0}{m} g_{ij}\right|^2 \\ &= |a_{ij}|^2 - \tfrac{2a_0}{m}\langle a_{ij}, g_{ij}\rangle + \left(\tfrac{a_0}{m}\right)^2 |g_{ij}|^2 \\ &= |a_{ij}|^2 - \tfrac{2a_0^2}{m} + \left(\tfrac{a_0}{m}\right)^2 m \\ &= |a|^2 - \tfrac{a_0^2}{m} \end{aligned}$$

q.e.d

4. Kapitel: Das Maximumprinzip für elliptische Differentialgleichungen

4.1. Lineare elliptische Gleichungen.

Sei zunächst $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$.
Wir betrachten lineare elliptische Differentialgleichungen der Form

$$Lu := a^{ij}(x)u_{ij}(x) + b^i(x)u_i(x) + c(x)u(x) = 0 \tag{4.1}$$

mit einem symmetrischen Tensor $a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ und fordern, daß der Operator L elliptisch ist, d.h. es existiert $\lambda > 0$ mit :

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \forall \xi \neq 0 \tag{4.2}$$

Die wegen der Symmetrie von a^{ij} reellen Eigenwerte sind also stets größer oder gleich λ. Zusätzlich fordern wir, daß

$$|a^{ij}|, |b^i|, |c| \leq K \tag{4.3}$$

für eine Konstante K glm. in Ω.
Als erstes beweisen wir das schwache elliptische Maximumprinzip für den Fall $c \equiv 0$.

Satz 4.1: Es sei L ein linearer elliptischer Operator wie oben mit $c \equiv 0$. Gilt dann in einem beschränkten Gebiet Ω

$$Lu \geq 0\,,$$

so ist

$$\sup_{x\in\Omega} u(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $Lu > 0$ in Ω. Nimmt u in Ω ein inneres Maximum in einem Punkt x_0 an, so gilt dort

$$\begin{aligned} u_{ij}(x_0) &\leq 0 \\ u_i(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

Dann ist dort aber

$$\begin{aligned} 0 < Lu(x_0) &= a^{ij}(x_0)u_{ij}(x_0) + b^i(x_0)u_i(x_0) \\ &= a^{ij}(x_0)u_{ij}(x_0) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß kein inneres Maximum möglich ist. Für den allgemeinen Fall $Lu \geq 0$ betrachten wir die Hilfsfunktion

$$v := e^{\varepsilon x^1}$$

mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} Lv &= a^{ij}\varepsilon^2 v \delta_{i1}\delta_{j1} + \varepsilon b^1 v \\ &= (\varepsilon^2 a^{11} + \varepsilon b^1)v \end{aligned}$$

Für genügend großes ε gilt daher wegen (4.2) und (4.3)

$$Lv > 0\,.$$

Wegen der Linearität von L folgt nun für die Funktion $u_\rho := u + \rho v$ mit einer Konstanten $\rho > 0$ die Ungleichung

$$Lu_\rho > 0.$$

Nach dem schon bewiesenen folgt

$$\sup_\Omega u_\rho \leq \max_{\partial\Omega} u_\rho$$

und für $\rho \to 0$ dann auch

$$\sup_\Omega u \leq \max_{\partial\Omega} u$$

q.e.d.

Man kann sich offenbar von der Bedingung $c \equiv 0$ nicht einfach lösen, da z.B.

$$u := \sin x$$

eine Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + u = 0 &\quad \text{in } \Omega := (0,\pi) \\ u \equiv 0 &\quad \text{auf } \partial\Omega = \{0,\pi\} \end{aligned}$$

ist und ein echtes inneres Maximum annimmt. Jedoch haben wir

Satz 4.2: Es gelte $Lu \geq 0$ in Ω, $c \leq 0$ in Ω (Ω wie oben) mit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Dann ist

$$\sup_\Omega u^+ \leq \max_{\partial\Omega} u^+$$

mit $u^+(x) = \max\ \{u(x), 0\}$.

Beweis:
Sei $\Omega^+ := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$. $\Omega^+ \subset \Omega$ ist offen und beschränkt und auf Ω^+ gilt

$$L^+u(x) := a^{ij}(x)u_{ij}(x) + b^i(x)u_i(x) > 0$$

und somit

$$\sup_{\Omega^+} u \leq \max_{\partial\Omega^+} u$$

nach Satz 4.1.
Auf $\partial\Omega^+ \cap \Omega$ folgt wegen der Stetigkeit $u = 0$ und daher

$$\begin{aligned}
\sup_{\Omega} u^+ &\leq \sup_{\Omega+} u \leq \max_{\partial\Omega^+} u = \max_{(\partial\Omega^+\cap\partial\Omega)\cup(\partial\Omega^+\cap\Omega)} u \\
&\leq \max \left\{ \max_{\partial\Omega^+\cap\partial\Omega} u, \max_{\partial\Omega^+\cap\Omega} u \right\} \\
&= \max \left\{ \max_{\partial\Omega^+\cap\partial\Omega} u, 0 \right\} \\
&\leq \max \left\{ \max_{\partial\Omega} u, 0 \right\} \\
&= \max_{\partial\Omega} u^+ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 4.3:
L sei ein linearer elliptischer Operator wie oben mit $c \equiv 0$. $f, \phi \in C^0(\Omega)$ seien gegeben. Dann hat das Dirichletproblem

$$\begin{aligned}
Lu = f &\quad \text{in} \quad \Omega \\
u = \phi &\quad \text{auf} \quad \partial\Omega
\end{aligned}$$

höchstens eine Lösung.

Beweis:
Sind u, v zwei Lösungen, so gilt wegen der Linearität von L

$$\begin{aligned}
L(u-v) &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\
u - v &\equiv 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega
\end{aligned}$$

und daher

$$\sup_{\Omega} (u-v) \leq \max_{\partial\Omega} (u-v) = 0$$

Ebenso

$$\sup_{\Omega} (v-u) \leq \max_{\partial\Omega} (v-u) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u - v \equiv 0.$$

q.e.d.

Lemma 4.4: (Randwertlemma von E.Hopf)
Es gelte $c \leq 0$ und

$$Lu \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega' \subset \mathbb{R}^m$$

und $x_0 \in \partial\Omega'$ sei ein Punkt mit den Eigenschaften

i) u ist stetig in x_0
ii) $u(x_0) \geq 0$ falls $c \not\equiv 0$
iii) $u(x_0) > u(x) \; \forall x \in \Omega'$

iv) Es existiere ein Ball $\overset{\circ}{B}(y,R) \subset \Omega'$ mit $x_0 \in \partial B(y,R)$
(innere Sphärenbedingung)

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x_0) > 0$$

mit $r := |x-y|$, sofern diese Ableitung (in Richtung der äußeren Normalen von Ω') existiert.

Beweis: Ohne Einschränkung gelte

$$\partial B(y,R) \cap \Omega' = \{x_0\}.$$

Es sei $A(\rho,R) := \overset{\circ}{B}(y,R) \setminus B(y,\rho)$ das Ringgebiet, $0 < \rho < R$ und

$$v(x) := e^{-\varepsilon|x-y|^2} - e^{-\varepsilon R^2} \quad \forall x \in A(\rho,R).$$

Wir berechnen

$$v_i = -2\varepsilon e^{-\varepsilon|x-y|^2}(x_i - y_i)$$

und

$$\begin{aligned} v_{ij} = 4\varepsilon^2 e^{-\varepsilon|x-y|^2}(x_i-y_i)(x_j-y_j) \\ -2\varepsilon e^{-\varepsilon|x-y|^2}\delta_{ij} \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} Lv(x) = \{4\varepsilon^2 a^{ij}(x)(x_i-y_i)(x_j-y_j) \\ -2\varepsilon a^{ij}(x)\delta_{ij} - 2\varepsilon b^i(x)(x_i-y_i)\}e^{-\varepsilon|x-y|^2} \\ +c(x)\left(e^{-\varepsilon|x-y|^2} - e^{-\varepsilon R^2}\right). \end{aligned}$$

Wählt man daher ε groß genug, so ist

(4.4) $$Lv(x) \geq 0 \quad \text{in} \quad A(\rho,R).$$

Nach Voraussetzung ((iii)+iv)) ist

$$u(x) - u(x_0) < 0 \qquad \forall y \in \overset{\circ}{B}(y,R)$$

$\Rightarrow \ \exists\, \delta > 0$ mit

(4.5) $$u_\delta(x) := u(x) - u(x_0) + \delta v(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x \in \partial B(y,\rho)$$

Da $v(x) = 0 \quad \forall x \in \partial B(y,R)$, folgt

(4.6) $$u_\rho(x) \leq 0 \quad \text{auf} \quad \partial A(\rho,R) = \partial B(y,\rho) \cup \partial B(y,R).$$

Außerdem wegen (4.4) und ii)

(4.7) $$Lu_\rho(x) = L(u(x) - u(x_0) + \delta v(x)) \geq -c(x)u(x_0) \geq 0$$

Wir wenden das schwache Maximumprinzip auf u_ρ an und erhalten

$$u(x) - u(x_0) + \delta v(x) \leq 0 \quad \text{auf} \quad A(\rho,R)$$

Falls $\frac{\partial}{\partial r}u_\rho$ an der Stelle x_0 existiert, muß daher

$$\frac{\partial}{\partial r}u_\rho(x_0) \geq 0$$

gelten, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x_0) \geq -\delta\frac{\partial r}{\partial v}(x_0) = 2\delta\varepsilon Re^{-\varepsilon R^2} > 0$$

q.e.d.

Wir haben schon gesehen, daß $Lu > 0$ mit $c \equiv 0$ impliziert, daß u kein striktes inneres Maximum in Ω annehmen kann. Dies kann auf den Fall $Lu \geq 0$ verallgemeinert werden.

Satz 4.5: (Starkes elliptisches Maximumprinzip)
Ω sei ein Gebiet im $\mathbb{R}^m$ (nicht notwendig beschränkt).
$u \in C^2(\Omega)$ erfülle

$$Lu \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

mit einem linearen elliptischen Operator wie oben. Ist $c \equiv 0$, so ist u konstant, wenn es ein inneres Maximum annimmt. Ist $c \leq 0$ so ist u konstant, wenn es ein inneres, nichtnegatives Maximum annimmt.

Beweis: Wir benutzen das Randwertlemma von Hopf. Wir nehmen an, $u \neq \text{const}$ und es existiert ein inneres (falls $c \leq 0$ nicht positives) Maximum M. Dann ist

$$\Omega' := \Omega \cap \{u(x) < M\} \neq \phi$$

und

$$\partial\Omega' \cap \Omega \neq \phi$$

Sei $y \in \Omega'$ mit $\text{dist}(y, \partial\Omega') < \text{dist}(y, \partial\Omega)$ und $R > 0$ sei größtmöglich mit $\overset{\circ}{B}(y,R) \subset \Omega'$.
$\Rightarrow \quad \exists\, x_0 \in \partial B(y,R)$ mit

$$u(x_0) = M$$
$$u(x) < u(x_0) \quad \text{für } x \in \Omega',$$

aber $\nabla u(x_0) \neq 0$ nach Lemma 4.4.
Dies ist ein Widerspruch, da dort ein innerer Extremwert vorliegt.

q.e.d.

4.2. **Nichtlineare elliptische Gleichungen.** Wir haben bisher nur Maximumprinzipien für lineare elliptische Operatoren behandelt und fragen nun, ob es solch ein Maximumprinzip auch für nichtlineare, elliptische Differentialgleichungen gibt.
Sei hierzu ganz allgemein ein nichtlinearer elliptischer Operator

$$Fu = F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

mit

$$F : S := \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times S(m, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

gegeben, wobei $S(m,\mathbb{R})$ der Raum der symmetrischen $m \times m$ Matrizen ist und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen. Elemente aus S schreibt man für gewöhnlich in der Form $s = (x, z, p, r)$. Hierbei ist $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^m$, $p = (p_1, \ldots, p_m)$ und $r = (r_{ij})_{i,j=1,\ldots,m} \in S(m,\mathbb{R})$.
Es stellt sich heraus, daß es kein "richtiges" Maximumprinzip für nichtlineare Operatoren gibt, man hat aber folgenden Vergleichssatz:

Satz 4.6: Es seien $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^\circ(\overline{\Omega})$. Für den (nichtlinearen) Operator F gelte

a) $F \in C^1(S)$
b) F ist monoton fallend in z für jedes feste (x, p, r)
c) F ist elliptisch bei allen Funktionen $tu_1 + (1-t)u_2$; $0 \leq t \leq 1$.

Ist dann

$$u_1 \leq u_2 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

und

$$Fu_1 \geq Fu_2 \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

so ist entweder

$$u_1 < u_2 \quad \text{in} \quad \Omega$$

oder

$$u_1 \equiv u_2 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega}$$

Beweis: Es sei $u_t := tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
a^{ij}(x) &:= \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))dt,\\
b^i(x) &:= \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial p_i}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))dt,\\
c(x) &:= \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial z}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))dt.
\end{aligned}$$

Für $v := u_1 - u_2$ setzen wir nun

$$Lv := a^{ij}(x)v_{ij}(x) + b^i(x)v_i(x) + c(x)v(x)\,.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
Fu_1 - Fu_2 &= \int_0^1 \tfrac{d}{dt}Fu_t dt\\
&= \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))\tfrac{d}{dt}u_{tij}\\
&+ \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial p_i}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))\tfrac{d}{dt}u_{ti}\\
&+ \int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial p_i}(x, u_t(x), \nabla u_t(x), \nabla^2 u_t(x))\tfrac{d}{dt}u_t\\
&= a^{ij}(x)v_{ij} + b^i(x)v_i(x) + c(x)v(x) = Lv
\end{aligned}$$

also nach Voraussetzung

$$Lv = Fu_1 - Fu_2 \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Wegen c) ist L elliptisch und wegen b) gilt $c \geq 0$. Daher kann v nach dem starken Maximumprinzip für lineare elliptische Operatoren (Satz 4.5) kein nichtnegatives inneres Maximum annehmen. $\Rightarrow$ Behauptung.

Bemerkung: Verzichtet man auf Bedingung c), so ist das Resultat nicht mehr unbedingt erfüllt. Als Beispiel geben wir die Funktionen $u_1, u_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\begin{aligned} u_1 &:= \tfrac{1}{2}(1 + x^2 + y^2) \\ u_2 &:= \tfrac{1}{2}(3 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

und

$$Fu := u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 - 1\,.$$

Offenbar gilt $Fu_1 = Fu_2 = 0$.
Für $\Omega := B(0,1)$ gilt außerdem

$$u_1 = 1 = u_2 \quad \text{auf} \quad \partial B(0,1).$$

Es ist aber $u_2 > u_1$. Dies liegt daran, daß F nicht bei allen $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$ elliptisch ist für $t \in [0,1]$.

Korollar 4.7: Mit den Voraussetzungen in Satz 4.6 gelte

$$\begin{aligned} Fu_1 &= Fu_2 && \text{in} && \Omega \\ u_1 &= u_2 && \text{auf} && \partial\Omega \end{aligned}$$

Dann ist $u_1 \equiv u_2$ in $\overline{\Omega}$.
Auch für nichtlineare Operatoren kann man in vielen Fällen ein Maximumprinzip herleiten.

Satz 4.8: Ω sei ein beschränktes Gebiet. Für F gelte

a) $F \in C^2(S)$
b) $\exists\ \lambda > 0$ so daß

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,z,p,r)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^m\ ,\ (x,z,p,r) \in S$$

c) Es existieren Konstanten a_1, a_2, so daß $\forall (x,z,p)$

$$\frac{F(x,z,p,0)\mathrm{sign}(z)}{\lambda} \geq a_1|p| + \frac{a_2}{\lambda}.$$

Gilt dann für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^\circ(\overline{\Omega})$

$$Fu = 0 \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

so ist

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + b\frac{a_2}{\lambda}\,,$$

wobei die Konstante b nur von a_1 und dem Durchmesser $\mathrm{diam}(\Omega)$ abhängt.

Beweis: Wir werden dies wieder auf ein Maximumprinzip für lineare Operatoren zurückführen.
Es sei dazu $w := u - v$ mit einer noch zu bestimmenden Funktion v.
Wir betrachten den linearen elliptischen Operator

$$Lw := a^{ij}(x)w_{ij}(x) + b^i(x)w_i(x)$$

mit

$$a^{ij}(x) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x), t\nabla^2 u(x))dt$$

und den Koeffizienten $b^i(x)$, die durch die Gleichung

$$\begin{aligned} b^i(x)w_i(x) &= \Big(\int_0^1 \Big\{ \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x), t\nabla^2 u(x)) \\ &- \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla v(x), t\nabla^2 u(x)) \Big\} dt \Big) v_{ij} \\ &+ F(x, u(x), \nabla u(x), 0) - F(x, u(x), \nabla v(x), 0) \end{aligned}$$

bestimmt sind (dies geht nach dem Mittelwertsatz, da $F \in C^2(S)$). Nun ist

$$\begin{aligned} &\Big(\int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x), t\nabla^2 u(x))dt\Big) u_{ij} \\ = &\int_0^1 \tfrac{d}{dt} F(x, u(x), \nabla u(x), t\nabla^2 u(x))dt \\ = &\ F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \\ &-F(x, u(x), \nabla u(x), 0) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} Lw &= L(u - v) \\ &= \Big(\int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla u(x), t\nabla^2 u(x))dt\Big)\ u_{ij} + F(x, u(x), \nabla u(x), 0) \\ &\quad -\Big(\int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla v(x), t\nabla^2 u(x))dt\Big)\ v_{ij} - F(x, u(x), \nabla v(x), 0) \\ &= F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \\ &\quad -\Big(\int_0^1 \tfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla v(x), t\nabla^2 u(x))dt\Big)\ v_{ij} - F(x, u(x), \nabla v(x), 0) \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten

$$\tilde{a}^{ij}(x) := \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x, u(x), \nabla v(x), t\nabla^2 u(x))dt$$

gilt nach Voraussetzung $\tilde{a}^{ij}(x) \geq \lambda\delta^{ij}$, d.h. $\tilde{a}^{ij}\xi_i\xi_i \geq \lambda|\xi|^2$,$\forall \xi \in \mathbb{R}^m$. Die Hilfsfunktion v soll nun so bestimmt werden, daß

$$\tilde{L}v(x) := \tilde{a}^{ij}(x)v_{ij}(x) + F(x, u(x), \nabla v(x), 0) \leq 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

gelte.

Es sei $d := \operatorname{diam}(\Omega)$ und wir nehmen an, daß $\Omega \subset \{0 < x^1 < d\}$. Wir machen den Ansatz

$$v(x) := \max_{\partial\Omega} u^+ + \frac{a_2}{\lambda}(e^{(a_1+1)d} - e^{(a_1+1)x^1})$$

mit $u^+ = \max\,(0, u)$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
\tilde{L}v &= -\tfrac{a_2}{\lambda}(a_1+1)^2 \tilde{a}^{11}(x) e^{(a_1+1)x^1} + F(x, u(x), \nabla v(x), 0) \\
&\leq -a_2(a_1+1)^2 e^{(a_1+1)x^1} + a_2 a_1 (a_1+1) e^{(a_1+1)x^1} + a_2 \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

wegen $\frac{\tilde{a}^{11}}{\lambda} \geq 1$ und Voraussetzung c).
Damit

$$\begin{aligned}
Lw &= F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) \\
&\quad -\tilde{L}v \\
&= Fu - \tilde{L}v \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

und dies sogar unter der schwächeren Voraussetzung $Fu \geq 0$.
Auf $\partial\Omega$ gilt

$$\begin{aligned}
w(x) = (u-v)(x) &= u(x) - \max_{\partial\Omega} u^+ - \tfrac{a_2}{\lambda}\left(e^{(a_1+1)d} - e^{(a_1+1)x^1}\right) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\begin{aligned}
Lw &\geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\
w &\leq 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip somit

$$u - v = w \leq 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

also

$$\begin{aligned}
u(x) \leq v(x) &= \max_{\partial\Omega} u^+ + \tfrac{a_2}{\lambda}\left(e^{(a_1+1)d} - e^{(a_1+1)x^1}\right) \\
&\leq \max_{\partial\Omega} u^+ + \tfrac{a_2}{\lambda}\left(e^{(a_1+1)d} - 1\right).
\end{aligned}$$

Wir setzen $b := e^{(a_1+1)d} - 1$ und haben

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + b\frac{a_2}{\lambda}$$

nachgewiesen und b hängt auch nur von d und a_1 ab. Die Ungleichung

$$\inf_{\Omega} u \geq \min_{\partial\Omega} u^- - b\frac{a_2}{\lambda}$$

beweist man analog mit $u^-(x) := \min\,(u(x), 0)$.

q.e.d.

Wir wenden uns nun dem Maximumprinzip auf Mannigfaltigkeiten zu.

Satz 4.9: Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Omega \subset M$ ein Gebiet. $u \in C^2(\Omega)$ erfülle

$$Lu \geq 0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

mit einem quasilinearen elliptischen Operator

$$\begin{aligned} Lu(x) \quad := \quad & a^{ij}(x,u(x),\nabla u(x))\nabla_i\nabla_j u(x) \\ & +b^i(x,u(x))\nabla_i u(x) \\ & +c(x)u(x) \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten a^{ij}, b^i, c beschränkt seien mit

$$(1) \qquad c \leq 0$$

Ferner sei ohne Einschränkung $a^{ij} = a^{ji}$.
Dann gilt: Ist $c \equiv 0$ und nimmt u im Innern von Ω ein Maximum an, so gilt $u = \text{const.}$ ist $c \leq 0$ und nimmt u im Innern von Ω ein nichtnegatives Maximum an, so ist $u = \text{const.}$

Beweis: Sei $p \in \Omega$ ein innerer Punkt in dem u ein (nichtnegatives) Maximum annimmt. Wir wählen eine Karte, d.h.
$U \Subset \Omega$ offen, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ offen, $p \in U$, $x : U \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus.
Sei $x_0 := x(p)$.
In diesen lokalen Koordinaten hat der Operator L die Gestalt

$$\begin{aligned} Lu \quad = \quad & a^{ij}(x,u(x),\nabla u(x))u_{ij}(x) \\ + \quad & (b^i(x) - a^{kl}(x,u(x),\nabla u(x))\Gamma^i_{kl}(x))u_i(x) \\ + \quad & c(x)u(x). \end{aligned}$$

Wegen $U \Subset \Omega$, $u \in C^2(\Omega)$ und der Beschränktheit der Koeffizienten sind die Größen $\tilde{a}^{ij}(x)$ und $\tilde{b}^i(x)$ definiert durch

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{ij}(x) \quad &:= \quad a^{ij}(x,u(x),\nabla u(x)) \\ \tilde{b}^i(x) \quad &:= \quad b^i(x) - a^{kl}(x,u(x),\nabla u(x))\Gamma^i_{kl}(x) \end{aligned}$$

beschränkt in $\overline{\Omega'}$.
Für den linearen Operator

$$\tilde{L}v := \tilde{a}^{ij}(x)v_{ij}(x) + \tilde{b}^i(x)v_i(x) + c(x)v(x)$$

wenden wir das starke Maximumprinzip auf die Funktion $v := u$ an.

q.e.d.

Aus dem starken Maximumprinzip folgt jetzt natürlich auch das schwache.

Satz 4.10: Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Omega \Subset M$. Gilt

$$Lu \geq 0 \quad \text{in} \quad \mathring{\Omega}$$

für $u \in C^2(\overset{\circ}{\Omega}) \cap C^\circ(\overline{\Omega})$ und einem Operator wie in Satz 4.9, so ist

$$\begin{array}{lcll} \sup\limits_{\Omega} u & \leq & \max\limits_{\partial\Omega} u & \text{falls} \quad c \equiv 0, \\ \sup\limits_{\Omega} u^+(x) & \leq & \max\limits_{\partial\Omega} u^+ & \text{falls} \quad c \leq 0. \end{array}$$

Beweis: Der Unterschied im Beweis zum schwachen Maximumprinzip in $\mathbb{R}^m$ ist, daß man hier nicht mit Kartenabbildungen lokalisieren kann, da für eine Karte

$$\begin{aligned} &U \subset \Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^m \\ &x : U \to \Omega' \end{aligned}$$

der Rand $\partial\Omega'$ nicht unbedingt den Rand von Ω repräsentiert, sondern eventuell nur einen Teil. Wir können aber wie folgt argumentieren:
Nach Satz 4.6 existieren keine inneren Maxima (bzw. positive Maxima wenn $c \leq 0$) $\Rightarrow$ Behauptung.

Korollar 4.11: Sei u eine Lösung von $Lu = 0$ mit $c \equiv 0$ auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Dann ist

$$u \equiv \text{const}$$

Beweis: Sei $x_0 \in M$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $\Omega := M \setminus \{x_0\}$ offen. Wir wenden Satz 4.7 auf u an und erhalten

$$\sup_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u = u(x_0)\,,$$

da $\partial\Omega = \{x_0\}$.
Somit, da x_0 beliebig, gilt

$$u(y_1) \leq u(y_2) \qquad \forall\ y_1, y_2 \in M$$

$\Rightarrow$ Behautpung.

q.e.d.

Korollar 4.11 besagt insbesondere, daß es auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) nur konstante harmonische Funktionen gibt. Wie sieht dies aber bei vollständigen, nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) aus?
Für derartige Fragestellungen ist es sehr nützlich zunächst mehr über die Abstandsfunktion $d(x, y)$ zu einer gegebenen Riemannschen Metrik g herauszufinden.

5. Kapitel: Ein Vergleichssatz für den Laplaceoperator, Gradientenabschätzungen für harmonische Funktionen, Harnack Ungleichungen

In diesem Kapitel sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. Für einen festen Punkt $p \in M$ können wir die Abstandsfunktion

$$\begin{aligned} d_p &: & M \to \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ d_p(q) &:= & \operatorname{dist}_g(p, q) =: d(p, q) \end{aligned}$$

betrachten. Wegen der Dreiecksungleichung gilt:

$$\begin{aligned} |d_p(q_1) - d_p(q_2)| &= |d(p, q_1) - d(p, q_2)| \\ &\leq d(q_1, q_2) \end{aligned}$$

und daher ist d_p Lipschitzstetig.
Lipschitzstetige Funktionen sind fast überall differenzierbar.
Wir betrachten nun zu $p \in M$ die zugehörige Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} &\exp_p : T_pM \to M \\ &\exp_p(V) =: c_V(1) \end{aligned}$$

$c_V =$ eindeutig bestimmte Geodäte mit $c_V(0) = p$, $\dot{c}_V(0) = V$.
Es ist also $c_V(t) = \exp_p(tV)$.
Da $D\exp_{p|_0} = \mathrm{Id}_{T_pM}$, ist nach dem Satz über implizite Funktionen $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h.

$$\exists\ \alpha > 0\,, \text{so daß}$$

$$\exp_p : B_p(\alpha) \to \exp_p(B_p(\alpha)) \subset M$$

mit $B_p(\alpha) := \{V \in T_pM \mid |V| < \alpha\}$ ein Diffeomorphismus ist.

Definition 5.1: Es sei $c_V(t)$ die eindeutige Geodäte mit $c_V(0) = p$ und $\dot{c}_V(0) = V$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mu(V) := \sup \{ \quad & t_0 < 0 : c_V \text{ ist die eindeutige Geodäte} \\ & \text{kürzester Länge, die } p \text{ und } c_V(t_0) \text{ verbindet}\}. \end{aligned}$$

Ist $\mu(V) < \infty$, so heißt $c_V(\mu(V))$ ein **Schnittpunkt** von p. Die Menge aller Schnittpunkte von M bzgl. p wird mit Schnittort von p bezeichnet und durch $\operatorname{cut}(p)$ abgekürzt.

Bemerkung: Sind $V, W \in T_pM$ mit $V = \alpha W$, $\alpha > 0$, so ist der Schnittpunkt von c_V, sofern er existiert, mit dem von c_W identisch. Insbesondere existiert zu jedem V höchstens ein Schnittpunkt.
Für $V \in S_p := \{V \in T_pM : |V| = 1\}$ sei $E_p := \{tV : 0 \leq t < \mu(V), V \in S_p\}$.
Man kann zeigen, daß

$$\exp_p : E_p \to \exp_p(E_p) \subset M$$

ein Diffeomorphismus ist, daß

$$\mathrm{cut}(p) = \partial \exp_p(E_p),$$
$$M = \exp_p(E_p) \cup \mathrm{cut}(p)$$

und daß $\mathrm{cut}(p)$ m–dimensionales Maß 0 besitzt.

$$\exp_p : E_p \to M \setminus \mathrm{cut}(p)$$

ist dann ein maximales Koordinatensystem um p. d_p ist glatt auf $M \setminus \mathrm{cut}(p)$ und es gilt $|\nabla d_p|^2 = 1$.
Für spätere Zwecke benötigen wir den Vergleichssatz für den Laplaceoperator $\Delta = g^{ij}\nabla_i\nabla_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

Satz 5.2: (**Vergleichssatz für den Laplaceoperator**)
Es sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit $\mathrm{Ric}(M) \geq -(m-1)k^2$, $(k \geq 0)$. $(\tilde{M},\tilde{g})$ sei die einfach zusammenhängende m–dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung $-k^2$ (und dann konstanter Riccikrümmung $\mathrm{Ric}(\tilde{M}) = -(m-1)k^2$).
Weiter seien $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ zwei feste Punkte mit Abstandsfunktionen d_p, $\tilde{d}_{\tilde{p}}$. Dann gilt für jeden Punkt $x \in M$ wo $\Delta d_p(x)$ existiert

$$\Delta d_p(x) \leq \tilde{\Delta}\tilde{d}_{\tilde{p}}(\tilde{x})$$

$\forall\ \tilde{x} \in \tilde{M}$ mit $\mathrm{dist}_{\tilde{g}}(\tilde{x},\tilde{p}) = \mathrm{dist}_g(x,p)$.

Beweis: Siehe Schoen & Yau : Lectures on Differential Geometry, (Academic Press)

Korollar 5.3: Unter den Voraussetzungen von Satz 5.2 gilt $\forall\ x \in M$, wo Δd_p existiert, daß

$$\Delta d_p \leq (m-1)k\coth(kd_p) \quad ,k > 0 \tag{5.1}$$

$$\Delta d_p \leq \frac{m-1}{d_p} \quad ,k = 0 \tag{5.2}$$

Beweis: Wegen Satz 5.2 genügt es, $\tilde{\Delta}\tilde{d}_{\tilde{p}}$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\tilde{M},\tilde{g})$ mit konstanter Schnittkrümmung K zu berechnen. Sei $\tilde{p} \in \tilde{M}$ fest. Wir wählen Riemannsche Polarkoordinaten $(r, \phi = (\phi^1,\ldots,\phi^{m-1}))$ um p. In diesen Koordinaten ist

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2(r)(\sigma_{ij}(\phi))_{i,j=1,\ldots,m-1} \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_{ij}(\phi)$ die Standardmetrik auf S^{m-1} ist und

$$s(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r) & K > 0 \\ r & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r) & K < 0\,. \end{cases}$$

s ist also die Fundamentallösung der Jacobigleichung $\ddot{s} + Ks = 0$.
Die Metrik der Abstandssphäre $S_{\tilde{p}}(r)$ mit Radius r ist durch $s^2(r)\sigma_{ij}(\phi)$ gegeben. Die 2. Fundamentalform von $S_{\tilde{p}}(r)$ ist somit

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(s^2\sigma_{ij})' = ss'\sigma_{ij}$$

und die mittlere Krümmung H von $s_{\tilde{p}}(r)$ somit

$$H(r) = \frac{1}{s^2}\sigma^{ij}h_{ij} = \frac{s'}{s}(m-1)$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{cases} (m-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}r) & K > 0 \\ \frac{m-1}{r} & K = 0 \\ (m-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}r) & K < 0 \end{cases}$$

Außerdem ist $\tilde{\nabla}\tilde{d}_{\tilde{p}} = \tilde{\nu}$ die äußere Normale entlang $S_{\tilde{p}}(r)$ und da

$$H = \operatorname{div}\,\tilde{\nu} = \Delta d_p,$$

folgt

$$\tilde{\Delta}\tilde{d}_{\tilde{p}} = \begin{cases} (m-1)\sqrt{K}\cot(\sqrt{K}\tilde{d}_{\tilde{p}}) & K > 0 \\ \frac{m-1}{\tilde{d}_{\tilde{p}}} & K = 0 \\ (m-1)\sqrt{-K}\coth(\sqrt{-K}\tilde{d}_{\tilde{p}}) & K < 0 \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung mit $K := -k^2 \leq 0$.

q.e.d.

Wir kommen jetzt zu Gradientenabschätzungen.

Satz 5.4: (M, g) sei eine m–dimensionale vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}(M) \geq -(m-1)k^2$, $k \geq 0$, $m \geq 2$, k konstant. Dann existiert eine Konstante C_m, die nur von m abhängt, so daß $\forall$ positiven harmonischen Funktionen u auf einem geodätischen Ball $B_p(a)$ um einen Punkt $p \in M$ gilt:

$$(5.3) \qquad |\nabla \mathrm{ln} u| \leq C_m \left(\frac{1}{a} + k\right) \quad \text{auf} \quad B_p\left(\frac{a}{2}\right).$$

Beweis: Wir wollen das Maximumprinzip auf geeignete Gradiententerme anwenden. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}
\Delta|\nabla u|^2 &= \Delta(\nabla^i u \nabla_i u) \\
&= 2\Delta\nabla^i u \nabla_i u + 2|\nabla^2 u|^2 \\
&= 2(\nabla^i \Delta u + R^{il}\nabla_l u)\nabla_i u + 2|\nabla^2 u|^2 \\
&= 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) + 2|\nabla^2 u|^2, \text{ da } \Delta u = 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta|\nabla u|^2 \geq -2(m-1)k^2|\nabla u|^2 + 2|\nabla^2 u|^2. \tag{5.4}$$

Andererseits gilt auch

$$\Delta|\nabla u|^2 = 2|\nabla u|\Delta|\nabla u| + 2|\nabla|\nabla u||^2, \tag{5.5}$$

falls $|\nabla u|$ zweimal differenzierbar ist (also z.B. dort wo $|\nabla u| \neq 0$).
Zusammen ergibt dies:

$$-(m-1)k^2|\nabla u|^2 + |\nabla^2 u|^2 \leq |\nabla u|\Delta|\nabla u| + |\nabla|\nabla u||^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad |\nabla u|\Delta|\nabla u| + (m-1)k^2|\nabla u|^2 \geq |\nabla^2 u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2.$$

Sei $x_0 \in M$ ein beliebiger Punkt um den wir Normalkoordinaten (x^i), $(i = 1, \ldots, m$, wählen, so daß in x_0, $\nabla u = |\nabla u|\frac{\partial}{\partial x^1}$ gilt.
Es folgt

$$\begin{aligned}
|\nabla^2 u|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 &= \sum_{i,j=1}^m (u_{ij})^2 - \sum_{j=1}^m (u_{j1})^2 \\
&\geq \sum_{i\neq 1}(u_{i1})^2 + \sum_{i\neq 1}(u_{ii})^2 \\
&\overset{\text{Lemma 3.16.}}{\geq} \sum_{i\neq 1}(u_{i1})^2 + \tfrac{1}{m-1}\left(\sum_{i\neq 1} u_{ii}\right)^2 \\
&= \sum_{i\neq 1}(u_{i1})^2 + \tfrac{1}{m-1}(u_{11})^2, \text{ denn} \\
&\ \Delta u = \sum_{i=1}^m u_{ii} = 0 \\
&\geq \tfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m (u_{i1})^2 = \tfrac{1}{m-1}|\nabla|\nabla u||^2\,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$|\nabla u|\Delta|\nabla u| + (m-1)k^2|\nabla u|^2 \geq \frac{1}{m-1}|\nabla|\nabla u||^2\,. \tag{5.6}$$

Sei $f := |\nabla \ln u| = \frac{|\nabla u|}{u}$. (Dies ist wegen $u > 0$ zulässig.) Dann

$$\begin{aligned}|\nabla u|\Delta f &= |\nabla u|\left(\frac{\Delta|\nabla u|}{u} + |\nabla u|\Delta\frac{1}{u} + 2\left\langle \nabla|\nabla u|, \nabla\frac{1}{u}\right\rangle\right)\\ &\overset{\Delta u=0}{=} \frac{|\nabla u|\Delta|\nabla u|}{u} + 2f^3|\nabla u| - 2\frac{f}{u}\langle\nabla|\nabla u|, \nabla u\rangle\end{aligned}$$

, also

$$(5.7) \quad |\nabla u|\Delta f = \frac{|\nabla u|\Delta|\nabla u|}{u} - 2f\langle\nabla f, \nabla u\rangle.$$

Nun ist $\nabla|\nabla u| = u\nabla f + f\nabla u$ und daher

$$(5.8) \qquad \frac{|\nabla|\nabla u||^2}{u} = u|\nabla f|^2 + 2f\langle\nabla f, \nabla u\rangle + f^3|\nabla u|.$$

(5.6) - (5.8) ergeben dann

$$\begin{aligned}|\nabla u|\Delta f &\geq \tfrac{1}{u}\left(\tfrac{1}{m-1}|\nabla|\nabla u||^2 - (m-1)k^2|\nabla u|^2\right) - 2f\langle\nabla f, \nabla u\rangle\\ &= \tfrac{1}{m-1}\left(u|\nabla f|^2 + 2f\langle\nabla f, \nabla u\rangle + f^3|\nabla u|\right)\\ &\quad -2f\langle\nabla f, \nabla u\rangle - (m-1)k^2 f|\nabla u|\\ &\geq -2\tfrac{m-2}{m-1}f\langle\nabla f, \nabla u\rangle + \tfrac{1}{m-1}f^3|\nabla u| - (m-1)k^2 f|\nabla u|,\end{aligned}$$

also

$$(5.9) \qquad \Delta f \geq -2\frac{m-2}{m-1}\left\langle\nabla f, \frac{\nabla u}{u}\right\rangle + \frac{1}{m-1}f^3 - (m-1)k^2 f\,.$$

Sei nun $p \in M$ und $B_p(a)$ gewählt. Wir definieren eine neue Funktion

$$F : B_p(a) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$\begin{aligned}F(x) &:= (a^2 - d_p(x)^2)f(x)\\ &= (a^2 - d^2)\tfrac{|\nabla u|}{u}\end{aligned}$$

Es gilt $F|_{\partial B_p(a)} = 0$ und $F \geq 0$ auf $B_p(a)$. Daher muß F im Innern von $B_p(a)$ ein nichtnegatives Maximum in einem Punkt $x_0 \in B_p(a)$ annehmen. Sei zunächst x_0 kein Schnittpunkt von p. Dann ist F in einer Umgebung von x_0 glatt und nach dem Maximumprinzip muß in x_0 gelten:

$$\begin{aligned}\Delta F(x_0) \leq 0,\\ \nabla F(x_0) = 0\,.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta(a^2 - d^2)f + (a^2 - d^2)\Delta f + 2\langle\nabla(a^2 - d^2), \nabla f\rangle\\ &\geq -f\Delta d^2 + (a^2 - d^2)\big(-2\frac{m-2}{m-1}\langle\nabla f, \frac{\nabla u}{u}\rangle + \frac{1}{m-1}f^3\\ &\qquad -(m-1)k^2 f\big) - 2\langle\nabla d^2, \nabla f\rangle\end{aligned}$$

und $\nabla F = -f\nabla d^2 + (a^2 - d^2)\nabla f$. Daher in x_0

$$\nabla f = \frac{2fd}{a^2 - d^2}\nabla d\,.$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 \geq \Delta F \geq & -f\Delta d^2 - 2\frac{m-2}{m-1}(a^2 - d^2)\left\langle \frac{\nabla u}{u}, \frac{2fd}{a^2-d^2}\nabla d \right\rangle \\ & + \frac{Ff^2}{m-1} - (m-1)k^2F - 4d\left\langle \nabla d, \frac{2fd}{a^2-d^2}\nabla d \right\rangle \\ = & -2f(d\Delta d + 1) - 4\frac{m-2}{m-1}\frac{fd}{u}\langle \nabla u, \nabla d\rangle \\ & + \frac{Ff^2}{m-1} - (m-1)k^2F - \frac{8fd^2}{a^2-d^2}\,, \text{ denn } |\nabla d|^2 = 1. \end{aligned}$$

Cauchy-Schwarz ergibt

$$\langle \nabla u, \nabla d\rangle \leq |\nabla u||\nabla d| = |\nabla u| = fu$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 \geq & - 2f(d\Delta d + 1) - 4\tfrac{m-2}{m-1}df^2 + \tfrac{Ff^2}{m-1} - (m-1)k^2F \\ & - 8\tfrac{fd^2}{a^2-d^2}\,. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Ungleichung mit $\frac{F}{f^2} = \frac{a^2-d^2}{f}$ und bekommen

$$0 \geq \frac{F^2}{m-1} - (m-1)k^2(a^2-d^2)^2 - 8d^2 - 4\frac{m-2}{m-1}Fd - 2(d\Delta d + 1)(a^2 - d^2)\,.$$

Wir können jetzt den Vergleichssatz für den Laplaceoperator (Satz 5.2) anwenden und dies ergibt

$$d\Delta d + 1 \leq (m-1)(1+kd) + 1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 \geq F^2 - (m-1)k^2(a^2-d^2)^2 - 8(m-1)d^2 - 4(m-2)Fd \\ -2(m-1)((m-1)(1+kd)+1)(a^2-d^2)\,. \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq d \leq a$ und $1 \leq 1 + kd$ auch

$$\begin{aligned} 0 \geq F^2 - 4(m-2)aF - 8(m-1)a^2 - (m-1)^2k^2a^4 \\ -2(m-1)m(1+ka)a^2 \end{aligned}$$

und schließlich

$$0 \geq F^2 - 2C_1aF - C_2(1+ka)^2a^2$$

für zwei nur von m abhängende Konstanten C_1, C_2. Daraus folgt wegen $F \geq 0$, daß

$$F \leq C_1a + \sqrt{C_1^2a^2 + C_2(1+ka)^2a^2} \leq C_3a(1+ka)$$

mit einer nur von m abhängenden Konstanten C_3. Auf dem Ball $B_p(\frac{a}{2})$ ist daher

$$F = (a^2 - d^2)f \geq \frac{3}{4}a^2 f\,,$$

d.h.

$$\frac{|\nabla u|}{u} = f \leq \frac{4}{3a^2}C_3 a(1+ka) = C_m(\frac{1}{a}+k)\,.$$

Dies ist gerade die Behauptung. Würde das Maximum von F in einem Schnittpunkt von p liegen, so kann durch ein Abändern des Punktes p und der damit verbundenen Funktion F eine ähnliche Abschätzung hergeleitet werden (siehe Schoen & Yau, Lectures on Differential Geometry, Academic Press).

Korollar 5.5: Auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit $\mathrm{Ric} \geq 0$ sind alle nach oben oder nach unten beschränkten harmonischen Funktionen konstant.

Beweis: Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß diese harmonische Funktion positiv ist (sonst ersetze u durch $u - \inf\limits_M u + \varepsilon$ bzw. durch $\sup\limits_M u - u + \varepsilon$ je nachdem ob $\inf\limits_M u > -\infty$ oder $\sup\limits_M u < \infty$).
Wir können in Satz 5.4 $k = 0$ setzen und erhalten

$$|\nabla \ln u| \leq \frac{C_m}{a}$$

auf dem Ball $B_p(\frac{a}{2})$ für einen fest gewählten Punkt $p \in M$. Da M vollständig ist, können wir $a \to \infty$ laufen lassen und erhalten das Gewünschte.

Korollar 5.6: (**Harnackungleichung**)
Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m und es sei

$$\mathrm{Ric} \geq -(m-1)k^2$$

Ferner sei $u > 0$ harmonisch auf einem Ball $B_p(a)$, $a > 0$. Dann gilt

$$\sup_{B_p(\frac{a}{4})} u \leq C(m,a,k) \inf_{B_p(\frac{a}{4})} u$$

mit einer Konstanten $C(m,a,k)$, die nicht von u abhängt.

Beweis: Nach Satz 5.4 gilt

$$\sup_{B_p(\frac{a}{2})} \frac{|\nabla u|}{u} \leq C(m,a,k). \tag{5.10}$$

Wir wählen $x_1, x_2 \in B_p(\frac{a}{4})$ so, daß $u(x_1) = \sup\limits_{B_p(\frac{a}{4})} u$ und $u(x_2) = \inf\limits_{B_p(\frac{a}{4})} u$.
(Nach dem Maximumprinzip muß $x_1, x_2 \in \partial B_p(\frac{a}{4})$ gelten.)
Jetzt verbinden wir x_1 und x_2 durch eine minimale, nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte γ (nicht notwendig eindeutig).

Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$d(x_1,x_2) \leq d(x_1,p) + d(x_2,p) \leq 2\frac{a}{4} = \frac{a}{2}$$

und deswegen auch $d(x_1,x_2) = d(x_1,\gamma(s)) + d(\gamma(s),x_2) \leq \frac{a}{2}$, da γ die kürzeste Verbindung zwischen x_1 und x_2 ist. Falls nun ein $\varepsilon > 0$ und ein s existiert, so daß $\gamma(s) \in \partial B_p(\frac{a}{2}+\varepsilon)$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + \varepsilon = d(\gamma(s),p) &\overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} d(\gamma(s),x_1) + d(x_1,p) = \frac{a}{4} + d(\gamma(s),x_1)) \\ &\Rightarrow d(\gamma(s),x_1) > \frac{a}{4} \end{aligned}$$

Ebenso auch

$$d(\gamma(s),x_2) > \frac{a}{4}$$

und dann $d(x_1,x_2) = d(x_1,\gamma(s)) + d(\gamma(s),x_2) > \frac{a}{2}$. Dies ist ein Widerspruch und daher muß $\gamma \in B_p(\frac{a}{2})$ gelten. Somit haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int\limits_\gamma \tfrac{|\nabla u|}{u} d\gamma &\leq \int\limits_\gamma \sup_{B_p(\frac{a}{2})} \tfrac{|\nabla u|}{u} d\gamma \overset{(5.10)}{\leq} C(m,a,k) \int\limits_\gamma d_\gamma \\ &= C(m,a,k) d(x_1,x_2) \leq \tfrac{a}{2} C(m,a,k)\,. \end{aligned}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \ln \tfrac{u(x_1)}{u(x_2)} &= \left| \int\limits_\gamma \langle \nabla \ln u, \dot\gamma > d\gamma \right| \\ &\leq \int\limits_\gamma \tfrac{|\nabla u|}{u} |\dot\gamma| d\gamma = \int\limits_\gamma \tfrac{|\nabla u|}{u} d\gamma \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{u(x_1)}{u(x_2)} \leq e^{\frac{a}{2}C(m,a,k)} := \tilde{C}(m,a,k)$$

Dies ist gerade die Behauptung.

q.e.d.

Korollar 5.7: Es sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}(M) \geq -(m-1)k^2$ und $u > 0$ sei harmonisch auf M. Dann gilt $|\nabla \ln u| \leq C(m,k)$.

Beweis: Man wähle $a > 1$ in (5.3). Dann hängt die Konstante nicht mehr von a ab.

6. Kapitel: Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Es seien L, M zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension l bzw. m. Lokale Koordinaten auf L werden wir mit $(x^i)_{i=1,\dots,l}$ und solche auf M durch $(y^\alpha)_{\alpha=1,\dots,m}$ bezeichnen. Ist

$$F : L \to M$$

eine Abbildung, so schreiben wir auch oft F^α für $y^\alpha(F)$, wenn wir lokale Koordinaten gewählt haben. Ist

$$F : L \to M$$

glatt, so definiert man ein Vektorbündel $(F^{-1}TM, \pi, L)$ über L durch die Fasern

$$E_x := T_{F(x)}M \qquad \forall x \in L\,.$$

Der Rang dieses Vektorbündels ist $m = \dim(M)$ und man nennt es das Tangentialbündel entlang F oder auch entlang $F(L)$. Trägt TM einen Zusammenhang ∇ mit Christoffelsymbolen $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, so erhält man auch einen Zusammenhang auf $F^{-1}TM$ durch die Vorschrift

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} := \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\gamma}.$$

Nehmen wir jetzt zunächst an, daß (M, η), (L, g) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind und daß

$$F : L \to M$$

eine glatte Abbildung ist.
Da die Riemannschen Metriken η, g jeweils Levi-Civita Zusammenhänge auf TM bzw. TL und deren dualen Bündeln definieren, können wir dann insbesondere einen Zusammenhang auf

$$T^*L \otimes F^{-1}TM$$

einführen. Nach den Vorschriften eines Zusammenhangs soll nämlich

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = -\Gamma^j_{ik}dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \tag{6.1}$$

gelten.

Definition 6.1: Ist $F : L \to M$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen differenzierbaren Manngifaltigkeiten L, M, so heißt

$$dF := \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in \Gamma^\circ(T^*L \otimes F^{-1}TM)$$

das Differential von F.
Wir werden jetzt Formel (6.1) benutzen, um die kovariante Ableitung von dF zu berechnen.

Es ist

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dF = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$
$$= \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$
$$+ \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)$$
$$= \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^j} \left(-\Gamma^j_{ik} dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\gamma} \right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \right) dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Also haben wir gezeigt:

Satz 6.2: Sind (L, g), (M, η) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Levi-Civita Zusammenhängen, so erfüllt das Differential einer glatten Abbildung

$$F : L \to M$$

die Gleichung

$$\nabla dF = \left(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

wobei ∇ der kanonische Zusammenhang auf $T^*L \otimes F^{-1}TM$ und Γ^k_{ij}, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffelsymbole von g_{ij} bzw. $\eta_{\alpha\beta}$ sind.

Definition 6.3: $h := \nabla dF$ heißt der **zweite Fundamentaltensor** der Abbildung F.
Wir wollen noch einen wichtigen Spezialfall diskutieren. Ist $F : L \to M$ eine Immersion, d.h. glatt mit maximalem Rang und trägt M eine Riemannsche Metrik η, so kann man auf L eine Riemannsche Metrik g durch

$$g(V, W) := \eta(dF(V), dF(W))$$

definieren. In lokalen Koordinaten also

$$g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j}$$

Somit ist $g = F^*\eta$ die **zurückgezogene Metrik** auf L.
Als Korollar:

Satz 6.4: Ist (M, η) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F : L \to M$ eine Immersion einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit L, so existiert ein kanonischer Zusammenhang ∇ auf dem Bündel $T^*L \otimes F^{-1}TM$ und es gilt

$$\nabla dF = \left(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \right) dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

wobei $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ die Christoffelsymbole von η und Γ^k_{ij} die Christoffelsymbole der induzierten Metrik $g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j}$ sind.

Definition 6.5: Ist $F : L \to M$ eine Immersion, so heißt das Bild $F(L) \subset M$ eine immersierte Untermannigfaltigkeit von M. $h = \nabla dF$ heißt dann der zweite Fundamentaltensor von F bzw. auch von $F(L)$.

Notation: Wir setzen

$$h = \nabla dF =: h^\alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

also gilt die **Gaußformel**

$$h^\alpha_{ij} := \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} \tag{6.2}$$

Korollar 6.6: Es ist

$$h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}\,, \tag{6.3}$$

d.h. der zweite Fundamentaltensor ist symmetrisch.

Definition 6.7: Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine glatte Abbildung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, so heißt $\tau \in \Gamma(F^{-1}TM)$ definiert durch $\tau := \mathrm{spur}(\nabla dF) = g^{ij} h^\alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ der **Spannungstensor** von F.
Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Immersion und gilt $g = F^*\eta$, so nennt man $\vec{H} := \tau$ den **mittleren Krümmungsvektor** von $F(L)$.
Wir schreiben noch abkürzend

$$F^\alpha_i := \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}$$

, so daß $dF = F^\alpha_i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ und

$$h^\alpha_{ij} = \nabla_i F^\alpha_j\,. \tag{6.4}$$

Wir definieren jetzt den folgenden Hilfstensor

$$T := T_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

mit

$$T_{ijk} := \eta_{\alpha\beta} h^\alpha_{ij} F^\beta_k\,.$$

Wegen (6.3) gilt

$$T_{ijk} = T_{jik} \tag{6.5}$$

Lemma 6.8: Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Riemannsche Immersion (d.h. F ist eine Immersion und $g = F^*\eta$), so gilt

$$T \equiv 0\,.$$

Beweis: Es ist $g = F^*\eta$, also

$$g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} F^\alpha_i F^\beta_j\,.$$

Wir leiten diese Gleichung kovariant nach $\frac{\partial}{\partial x^k}$ ab und dies ergibt

$$\nabla_k g_{ij} = \nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta} F_k^\gamma F_i^\alpha F_j^\beta + \eta_{\alpha\beta} \nabla_k F_i^\alpha F_j^\beta + \eta_{\alpha\beta} F_i^\alpha \nabla_k F_j^\beta \,,$$

da aber wegen der metrischen Eigenschaft des Levi-Civita Zusammenhangs $\nabla_k g_{ij} = 0 = \nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{\alpha\beta} \nabla_k F_i^\alpha F_j^\beta + \eta_{\alpha\beta} F_i^\alpha \nabla_k F_j^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} h_{ki}^\alpha F_j^\beta + \eta_{\beta\alpha} h_{kj}^\beta F_i^\alpha \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$0 = T_{kij} + T_{kji} \tag{6.6}$$

also auch

$$\begin{aligned} 0 &= (T_{kij} + T_{kji}) + (T_{ikj} + T_{ijk}) - (T_{jik} + T_{jki}) \\ &= T_{kij} + T_{ikj} \\ &\quad + T_{kji} - T_{jki} \\ &\quad + T_{ijk} - T_{jik} \\ &\overset{(6.5)}{=} 2T_{ikj} \end{aligned}$$

q.e.d.

Definition 6.9: Ist $F : L \to (M, \eta)$ eine Immersion, so ist das **Normalenbündel** (NL, π, L) über L durch die Fasern

$$N_x L := \{ V \in T_{F(x)} N \mid \eta(V, dF(W)) = 0 \,\forall\, W \in TL \}$$

definiert. $k := m - l$ heißt die **Kodimension** von $F(L)$ ($l = \dim L$, $m = \dim M$). $F(L)$ heißt **Hyperfläche**, falls $k = 1$.

Korollar 6.10: Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Riemannsche Immersion, so ist der zweite Fundamentaltensor

$$h = \nabla dF \in \Gamma(T^*L \otimes T^*L \otimes NL) \,.$$

Beweis: Nach Lemma 6.8 sind keine tangentialen Anteile vorhanden, denn $\eta_{\alpha\beta} h_{ij}^\alpha F_k^\beta = 0$, $\forall\, i, j, h$.

Korollar 6.11: Der mittlere Krümmungsvektor $\vec{H}$ einer Riemannschen Immersion $F : (L, g) \to (M, \eta)$ ist stets normal an $F(L)$.

Bemerkung: Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ nicht Riemannsch, d.h. ist $g \neq F^*\eta$, so gilt eine analoge Aussage für den Spannungstensor τ i.A. nicht. Dieser kann also auch tangentiale Komponenten besitzen.
Als nächstes betrachten wir die Krümmung. Es ist

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) dx^k = -R_{lij}^k dx^l \tag{6.7}$$

und

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j}R^\delta_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial y^\delta}, \tag{6.8}$$

so daß

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) &= -R^k_{lij}dx^l \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &\quad + \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j}R^\delta_{\alpha\beta\gamma}dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^\delta} \end{aligned} \tag{6.9}$$

Hierbei sind R^k_{ijl} die Krümmungssymbole bzgl. g_{ij} und $R^\delta_{\beta\gamma\alpha}$ die Symbole bzgl. $\eta_{\alpha\beta}$.
Wir wollen dies nun benutzen, um die sogenannten Codazzi-Mainardi Gleichungen zu beweisen.

Satz 6.12: (**Codazzi-Mainardi**) ∇h erfüllt die Gleichung

$$\nabla_i h^\alpha_{jk} - \nabla_j h^\alpha_{ik} = F^\alpha_l R^l_{kji} + F^\beta_k F^\gamma_i F^\delta_j R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \tag{6.10}$$

Beweis: Da $h = \nabla dF$, erhalten wir

$$\begin{aligned} R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) dF &= (\nabla_i\nabla_j F^\alpha_k - \nabla_j\nabla_i F^\alpha_k)dx^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} \\ &= (\nabla_i h^\alpha_{jk} - \nabla_j h^\alpha_{ik})dx^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}. \end{aligned}$$

Andererseits mit (6.9)

$$\begin{aligned} R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right) dF &= R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(F^\alpha_l dx^l \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \\ &= F^\alpha_l R\left(\tfrac{\partial}{\partial x^i}, \tfrac{\partial}{\partial x^j}\right)\left(dx^l \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) \\ &= F^\alpha_l\left(-R^l_{kij}dx^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha} + F^\beta_i F^\gamma_j R^\delta_{\alpha\beta\gamma}dx^l \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\delta}\right) \\ &= (F^\alpha_l R^l_{kji} + F^\beta_k F^\gamma_i F^\delta_j R^\alpha_{\beta\gamma\delta})dx^k \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\alpha}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann (6.10).
Mit (6.10) können wir jetzt auch die Gaußgleichungen beweisen.

Satz 6.13: (**Theorema Egregium, Gaußgleichungen**)
Es sei $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Riemannsche Immersion. Dann gelten die folgenden Gleichungen

$$R_{ijkl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^\alpha_i F^\beta_j F^\gamma_k F^\delta_l + \eta_{\alpha\beta}(h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl} - h^\alpha_{il}h^\beta_{jk}) \tag{6.11}$$

Beweis: Wir benutzen den Tensor $T = T_{ijk}dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$ mit $T_{ijk} = \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{ij}F^\beta_k$. Nach Lemma 6.8 gilt $T \equiv 0$. Daher auch $\nabla T = 0$. Dies impliziert

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_i T_{jkl} &= \nabla_i(\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{jk}F^\beta_l) \\ &= \nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta}F^\gamma_i h^\alpha_{jk}F^\beta_l + \eta_{\alpha\beta}\nabla_i h^\alpha_{jk}F^\beta_l \\ &\quad +\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{jk}h^\beta_{il}\,,\ \text{da } \nabla_i F^\beta_l = h^\beta_{il} \\ &= \eta_{\alpha\beta}\nabla_i h^\alpha_{jk}F^\beta_l + \eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{jk}h^\beta_{il} \end{aligned}$$

Vertauscht man i und j und subtrahiert dies voneinander, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_i T_{jkl} - \nabla_j T_{ikl} &= \eta_{\alpha\beta}(\nabla_i h^\alpha_{jk} - \nabla_j h^\alpha_{ik})F^\beta_l \\ &+ \ \eta_{\alpha\beta}(h^\alpha_{jk}h^\beta_{il} - h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl}). \end{aligned}$$

In diese Formel setzen wir die Codazzi-Mainardi Gleichungen (6.10) ein und erhalten

$$0 = \eta_{\alpha\beta}(F^\alpha_m R^m_{kji} + F^\varepsilon_k F^\gamma_i F^\delta_j R^\alpha_{\varepsilon\gamma\delta})F^\beta_l + \eta_{\alpha\beta}(h^\alpha_{jk}h^\beta_{il} - h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl}).$$

Nun ist aber $\eta_{\alpha\beta}F^\alpha_m F^\beta_l = g_{ml}$ und $g_{ml}R^m_{kji} = R_{lkji}$ sowie $\eta_{\alpha\beta}R^\alpha_{\varepsilon\gamma\delta} = R_{\beta\varepsilon\gamma\delta}$, also

$$0 = R_{lkji} + R_{\beta\varepsilon\gamma\delta}F^\varepsilon_k F^\gamma_i F^\delta_j F^\beta_l + \eta_{\alpha\beta}(h^\alpha_{jk}h^\beta_{il} - h^\alpha_{ik}h^\beta_{jl})$$

und dies ist gerade die Behauptung ($R_{jilk} = R_{ijkl}$ usw).

q.e.d.

Ist $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Riemannsche Immersion einer orientierten Mannigfaltigkeit L in eine orientierte Mannigfaltigkeit M mit Kodimension 1, so kann man im Normalenbündel NL einen eindeutig bestimmten Schnitt ν definieren durch die beiden Bedingungen

a) $\eta(\nu, \nu) = 1$
b) Ist $(e_1, \ldots, e_l)$ eine orientierte Basis von T_pL, so sei $(\nu, dF(e_1), \ldots, dF(e_l))$ eine orientierte Basis von $T_{F(p)}M$.

ν hängt also nur von den gewählten Orientierungen auf L und M ab. Wir nennen ν dann den positiv orientierten Normalenvektor bzgl. der Orientierung von L und M.

Definition 6.14: Es seien L, M zwei orientierte Mannigfaltigkeiten und

$$F : (L, g) \to (M, \eta)$$

eine Riemannsche Immersion

$$h_{ij}dx^i \otimes dx^j \in \Gamma(T^*L \otimes T^*L)$$

mit

$$h_{ij} := -\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{ij}\nu^\beta$$

heißt zweite Fundamentalform von L bzgl. der positiv orientierten Normalen ν.

Bemerkung: Da $h^\alpha_{ij} dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \in \Gamma(T^*(L \otimes T^*L \otimes NL)$, existiert ein p_{ij} mit

$$h^\alpha_{ij} = p_{ij}\nu^\alpha$$

Da andererseits

$$\begin{aligned} h_{ij} = -\eta_{\alpha\beta} h^\alpha_{ij}\nu^\beta &= -\eta_{\alpha\beta} p_{ij}\nu^\alpha\nu^\beta \\ &= -p_{ij}\eta(\nu,\nu) = -p_{ij}\,, \end{aligned}$$

folgt also

$$h^\alpha_{ij} = -h_{ij}\nu^\alpha \tag{6.12}$$

und auch

$$\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial F^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} = -h_{ij}\nu^\alpha. \tag{6.13}$$

Da $\nu \in NL \subset F^{-1}TM$, existiert

$$\nabla\nu \in \Gamma(T^*L \otimes F^{-1}TM).$$

Nun ist $\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu\beta \equiv 1$ und somit

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_i(\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta) &= \nabla_\gamma\eta_{\alpha\beta}F^\gamma_i\nu^\alpha\nu^\beta + 2\eta_{\alpha\beta}\nabla_i\nu^\alpha\nu^\beta \\ &= 2\eta_{\alpha\beta}\nabla_i\nu^\alpha\nu^\beta\,. \end{aligned}$$

Ebenso

$$\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha F^\beta_j = 0 \qquad ,\forall j$$

$\Rightarrow$

$$\eta_{\alpha\beta}\nabla_i\nu^\alpha F^\beta_j + \eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nabla_i F^\beta_j = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\eta_{\alpha\beta}\nabla_i\nu^\alpha F^\beta_j = -\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha h^\beta_{ij} = h_{ij}.$$

Wir haben also gezeigt, daß $\nabla_i\nu^\alpha\frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ $\forall i$ in $dF(TL)$ liegt und daß

$$\eta(\nabla_i\nu, F_j) = h_{ij} \tag{6.14}$$

Daraus folgt aber

$$\nabla_i\nu = h_{ik}g^{kl}F_l = h^l_i F_l \tag{6.15}$$

und da $\nabla_i\nu^\alpha = \frac{\partial\nu^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}F^\beta_i\nu^\gamma$ auch

$$\frac{\partial\nu^\alpha}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}F^\beta_i\nu^\gamma = h^l_i F^\alpha_l. \tag{6.16}$$

Die Codazzi Gleichung sowie die Gaußgleichungen für Hyperflächen, lassen sich einfacher schreiben.
Da $\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_{ij}h^\beta_{kl} = \eta_{\alpha\beta}h_{ij}\nu^\alpha h_{kl}\nu^\beta = h_{ij}h_{kl}$, haben wir die Gaußgleichungen

$$R_{ijkl} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}F^\alpha_i F^\beta_j F^\gamma_k F^\delta_l + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \tag{6.17}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
&\nabla_i h_{jk} - \nabla_j h_{ik} \\
&= \nabla_j(\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha h^\beta_{ik}) - \nabla_i(\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha h^\beta_{jk}) \\
&= \nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta}(F^\gamma_j \nu^\alpha h^\beta_{ik} - F^\gamma_i \nu^\alpha h^\beta_{jk}) \\
&\qquad + \eta_{\alpha\beta}\nabla_j \nu^\alpha h^\beta_{ik} - \eta_{\alpha\beta}\nabla_i \nu^\alpha h^\beta_{jk} \\
&\qquad + \eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha(\nabla_j h^\beta_{ik} - \nabla_i h^\beta_{jk})
\end{aligned}$$

Die erste Zeile verschwindet wegen $\nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta} = 0$. Die zweite Zeile verschwindet, da $h^\beta_{jk}\frac{\partial}{\partial y^\beta}$ normal und $\nabla_i \nu^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ tangential ist.
In die letzte Zeile setzen wir (6.10) ein und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\nabla_i h_{jk} - \nabla_j h_{ik} &= \eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha(F^\beta_l R^l_{kij} + F^\delta_k F^\gamma_j F^\varepsilon_i R^\beta_{\delta\gamma\varepsilon}) \\
&= \eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha F^\delta_k F^\gamma_j F^\varepsilon_i \eta^{\beta\rho} R_{\rho\delta\gamma\varepsilon} \\
&= \delta^\rho_\alpha \nu^\alpha F^\delta_k F^\gamma_j F^\varepsilon_i R_{\rho\delta\gamma\varepsilon} \\
&= R_{\rho\delta\gamma\varepsilon}\nu^\rho F^\delta_k F^\gamma_j F^\varepsilon_i =: \overline{R}_{okji}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\nabla_i h_{jk} - \nabla_j h_{ik} = \overline{R}_{okji}. \tag{6.18}$$

Z.B. ist $\nabla_i h_{jk}$ in allen Indizes symmetrisch, wenn die Krümmung auf M verschwindet, also für Hyperflächen im $\mathbb{R}^{l+1}$.
Eine sehr wichtige Gleichung in der Theorie minimaler Hyperflächen ist die sogenannte Simonsgleichung. Sie setzt

$$\nabla^k \nabla_k h_{ij} \quad \text{und} \quad \nabla_i \nabla_j h^k_k$$

in Beziehung.
Zunächst definieren wir die skalare mittlere Krümmung H als

$$H := h^k_k = g^{kl} h_{kl}\,.$$

Der mittlere Krümmungsvektor

$$H^\alpha = g^{ij} h^\alpha_{ij} \text{ erfüllt somit}$$

$$H^\alpha = -H\nu^\alpha \quad \text{also} \quad \vec{H} = -H\nu. \tag{6.19}$$

Wir können nun $\nabla_i \nabla_j H - \Delta h_{ij}$ berechnen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j H &= \nabla_i \nabla_j h^k_k \\
&\overset{\text{Codazzi}}{=} \nabla_i(\nabla^k h_{jk} + \overline{R}_{ok}{}^k{}_j).
\end{aligned}$$

Man beachte, daß hier $\overline{R}_{ok}{}^k{}_j$ die Komponenten der 1-Form $\overline{R}_{ok}{}^k{}_j dx^j \in \Gamma(T^*L)$ sind! Die Vertauschungsregel für kovariante Ableitungen gibt

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla^k h_{jk} &= \nabla_i \nabla_k h^k_j \\
&= \nabla_k \nabla_i h^k_j + R^m_{jki} h^k_m - R^k_{mki} h^m_j \\
&= \nabla_k \nabla_i h^k_j + R^m_{jki} h^k_m - R_{mi} h^m_j.
\end{aligned}$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$\nabla_i\nabla_j H = \nabla_k\nabla_i h_j^k + R_{jki}^m h_m^k - R_{mi}h_j^m + \nabla_i \overline{R}_{ok}{}^k{}_j .$$

Jetzt benutzen wir nochmal die Codazzi Gleichung und $h_{jk} = h_{kj}$. Daraus folgern wir

$$(6.20)\qquad \begin{aligned} \nabla_i\nabla_j H &= \nabla_k(\nabla^k h_{ij} + \overline{R}_{oj}{}^k{}_i) + R_{jki}^m h_m^k - R_{mi}h_j^m + \nabla_i\overline{R}_{ok}{}^k{}_j \\ &= \Delta h_{ij} + R_{jki}^m h_m^k - R_{mi}h_j^m + \nabla_k\overline{R}_{oj}{}^k{}_i + \nabla_i\overline{R}_{ok}{}^k{}_j \end{aligned}$$

Wir sind jetzt schon fast fertig. Wir wollen nur noch die Terme $\nabla_i\overline{R}_{ok}{}^k{}_j$, $\nabla_k\overline{R}_{oj}{}^k{}_i$ vereinfachen.
Es ist

$$\begin{aligned} \nabla_i\overline{R}_{oklj} &= \nabla_i(R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nu^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta) \\ &= \nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}F_i^\varepsilon \nu^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta \\ &\quad + R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_i\nu^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta \\ &\quad + R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nu^\alpha(\nabla_i F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta + F_k^\beta\nabla_i F_l^\gamma F_j^\delta + F_k^\beta F_l^\gamma \nabla_i F_j^\delta). \end{aligned}$$

Somit unter Berücksichtigung von (6.15) und $\nabla_i F_l^\gamma = -h_{il}\nu^\gamma$

$$\begin{aligned} \nabla_i\overline{R}_{oklj} &= \nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}F_i^\varepsilon \nu^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta \\ &+ R_{\alpha\beta\gamma\delta}h_i^m F_m^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta \\ &- R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nu^\alpha(h_{ik}\nu^\beta F_l^\gamma F_j^\delta + h_{il}F_k^\beta \nu^\gamma F_j^\delta + h_{ij}F_k^\beta F_l^\gamma \nu^\delta). \end{aligned}$$

Nun ist z.B. $\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}F_i^\varepsilon\nu^\alpha F_l^\gamma F_j^\delta$ nichts anderes als

$$\nabla^M R^M(F_i,\nu,F_k,F_l,F_j) = \nabla^M_{F_i} R^M(\nu,F_k,F_l,F_j)\,,$$

wobei $\nabla^M R^M$ die kovariante Ableitung des Krümmungstensors R^M auf (M,η) ist. Um dies kürzer schreiben zu können, benutzen wir wie oben einen Balken, um anzudeuten, daß es sich um ambiente (d.h. auf M bezogene) Ausdrücke handelt. So ist $\overline{\nabla}_i\overline{R}_{oklj}$ z.B. die Kurzschreibweise für

$$\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta}F_i^\varepsilon\nu^\alpha F_k^\beta F_l^\gamma F_j^\delta$$

und

$$\overline{R}_{okoj} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nu^\alpha F_k^\beta \nu^\gamma F_j^\delta$$

Ebenso wäre

$$\overline{R}_{oolj} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}\nu^\alpha\nu^\beta F_l^\gamma F_j^\delta\,,$$

dies verschwindet aber wegen $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$. Also mit diesen Bezeichnungen

$$(6.21)\qquad \nabla_i\overline{R}_{oklj} = \overline{\nabla}_i\overline{R}_{oklj} + h_i^m\overline{R}_{mklj} - h_{il}\overline{R}_{okoj} - h_{ij}\overline{R}_{oklo}.$$

Daraus ergibt sich dann sofort

$$\begin{aligned}\nabla_i \overline{R}_{ok\ j}^{\ \ k} &= g^{kl}\nabla_i \overline{R}_{oklj} \\ &= g^{kl}\overline{\nabla}_i \overline{R}_{oklj} - h_i^m \overline{R}_{mkj}^{\ \ \ \ k} \\ &\quad -h_i^k \overline{R}_{okoj} + h_{ij}\overline{R}_{oko}^{\ \ \ \ k}\end{aligned} \tag{6.22}$$

und

$$\begin{aligned}\nabla_k \overline{R}_{oj\ i}^{\ \ k} &= g^{kl}\nabla_k \overline{R}_{ojli} \\ &= g^{kl}(\overline{\nabla}_k \overline{R}_{ojli} + h_k^m \overline{R}_{mjli} - h_{kl}\overline{R}_{ojoi} - h_{ki}\overline{R}_{ojlo}) \\ &= g^{kl}\overline{\nabla}_k \overline{R}_{ojli} + h^{kl}\overline{R}_{kjli} - H\overline{R}_{ojoi} + h_i^k \overline{R}_{ojok}\end{aligned} \tag{6.23}$$

Aus den Gaußgleichungen folgt noch

$$\begin{aligned}R_{jki}^m h_m^k &= R_{mjki}h^{mk} \\ &= (\overline{R}_{mjki} + h_{mk}h_{ji} - h_{mi}h_{jk})h^{mk} \\ &= \overline{R}_{mjki}h^{mk} + |A|^2 h_{ij} - h_{im}h^{mk}h_{kj}\end{aligned} \tag{6.24}$$

mit $|A|^2 := h_{kl}h^{kl}$ und

$$\begin{aligned}R_{mi}h_j^m &= g^{kl}R_{ikml}h_j^m \\ &= g^{kl}h_j^m(\overline{R}_{ikml} + h_{im}h_{kl} - h_{il}h_{km}) \\ &= h_j^m \overline{R}_{ikm}^{\ \ \ \ k} + Hh_i^m h_{mj} - h_{im}h^{mk}h_{kj}\end{aligned}$$

so daß

$$R_{jki}^m h_m^k - R_{mi}h_j^m = \overline{R}_{mjki}h^{mk} - h_j^m \overline{R}_{ikm}^{\ \ \ \ k} + |A|^2 h_{ij} - Hh_i^m h_{mj}. \tag{6.25}$$

Wir setzen (6.22), (6.23) und (6.25) in (6.20) ein und dies ergibt unmittelbar:

6.15: (Simons' Gleichung)
Es sei $F : (L, g) \to (M, \eta)$ eine Riemannsche Immersion einer orientierten Hyperfläche in eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, η). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\nabla_i\nabla_j H &= \nabla h_{ij} + |A|^2 h_{ij} - Hh_i^m h_{mj} \\ &\quad +2\overline{R}_{ikjl}h^{kl} - \overline{R}_{ikm}^{\ \ \ \ k}h_j^m - \overline{R}_{jkm}^{\ \ \ \ k}h_i^m \\ &\quad -H\overline{R}_{oioj} + \overline{R}_{oko}^{\ \ \ \ k}h_{ij} \\ &\quad -g^{kl}\overline{\nabla}_i \overline{R}_{okjl} + g^{kl}\overline{\nabla}_k \overline{R}_{ojli}\end{aligned} \tag{6.26}$$

Korollar 6.16: Mit den Voraussetzungen in Satz 6.15 gilt:
(6.27)

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta|A|^2 &= \langle h_{ij}, \nabla_i\nabla_j H\rangle + |\nabla A|^2 + HC - |A|^4 \\ &\quad +Hh^{ij}\overline{R}_{oioj} - |A|^2\overline{R}_{oko}^{\ \ \ \ k} + 2h^{ij}h_j^l \overline{R}_{lki}^{\ \ \ \ k} - 2h^{ij}h^{lm}\overline{R}_{limj} \\ &\quad +h^{ij}g^{kl}(\overline{\nabla}_j \overline{R}_{okil} + \overline{\nabla}_k \overline{R}_{oijl}),\end{aligned}$$

wobei

$C := h^{ij}h_j^k h_{ik}$, $\langle h_{ij}, \nabla_i\nabla_j H\rangle := h^{ij}\nabla_i\nabla_j H$,
$|\nabla A|^2 := \nabla_i h_{jk}\nabla^i h^{jk} = g^{kl}g^{ij}g^{mn}\nabla_k h_{im}\nabla_l h_{jn}$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus (6.26), wenn wir diese Gleichung mit h^{ij} multiplizieren, da z.B.

$$\begin{aligned} h^{ij}\Delta h_{ij} &= \tfrac{1}{2}\Delta(h^{ij}h_{ij}) - \nabla^i h^{jk}\nabla_i h_{jk} \\ &= \tfrac{1}{2}\Delta|A|^2 - |\nabla A|^2 \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung: Die Bedeutung der Simons Gleichung wird klarer, wenn wir zusätzlich annehmen, daß $(M,\eta) = (\mathbb{R}^{n+1},\delta)$ der euklidische Raum ist und wenn $H = 0$ gilt. Dann vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4 = 0$$

Dies ist eine elliptische Gleichung und man kann versuchen, daraus für $|A|^2$ Abschätzungen herzuleiten.

7. Kapitel: Variationen von Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, harmonische Abbildungen, minimale Untermannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel betrachten wir nur glatte Abbildungen F zwischen Riemannschen Manngifaltigkeiten (L,g) und (M,η), wobei entweder $F^*\eta = g$ und F zusätzlich eine Immersion ist oder g und η gegeben sind.
Sei nun $F \in C^\infty(L,M)$ fest. Da wir sowohl auf TL als auch auf TM eine Riemannsche Metrik gegeben haben, induziert dies auch eine Metrik auf $T^*L \otimes F^{-1}TM$. Für $G = G_i^\alpha dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $K = K_j^\beta dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta}$ setzen wir nämlich einfach

$$\langle G, K\rangle := \eta_{\alpha\beta}g^{ij}G_i^\alpha K_j^\beta\,.$$

Definition 7.1: Die Energiedichte $e(F)$ einer glatten Abbildung

$$F : (L,g) \to (M,\eta)$$

ist gegeben durch

$$e(F) := \frac{1}{2}|dF|^2 = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}g^{ij}F_i^\alpha F_j^\beta$$

Wenn (L,g) orientiert ist, so existiert die Volumenform $d\mu$, für die lokal $d\mu = \sqrt{\det\,(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^l$ gilt und man kann die Energiedichte einer Abbildung F aufintegrieren.

Definition 7.2: Es sei $F : (L,g) \to (M,\eta)$ eine glatte Abbildung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten und (L,g) sei orientiert. Die Energie $E(F)$ von F ist definiert durch

$$E(F) := \int_L e(F)d\mu = \frac{1}{2}\int_L |dF|^2 d\mu$$

Bemerkung: Ist $F : (L,g) \to (M,\eta)$ zusätzlich eine Riemannsche Immersion, so gilt wegen $\eta_{\alpha\beta}F_i^\alpha F_j^\beta = g_{ij}$ und $g^{ij}g_{ij} = \dim(L) = l$ offenbar

$$\begin{aligned} e(F) &= \tfrac{l}{2} \\ E(F) &= \tfrac{l}{2}\int_L d\mu = \tfrac{l}{2}\mathrm{vol}(L). \end{aligned}$$

Da die Konstante $\frac{l}{2}$ nicht wesentlich ist, führt dies zu folgenden Funktionalen:

Definition 7.3: Es sei L eine orientierte Mannigfaltigkeit, (M,η) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Auf dem Raum $\mathrm{Imm}(L,M,\eta)$ der glatten Riemannschen Immersionen ist das Energiefunktional E durch

$$E(F) := \int_L d\mu = \mathrm{vol}(L)$$

definiert.

b) Ist g eine feste Riemannsche Metrik auf L, so ist das Energiefunktional E auf dem Raum der glatten Abbildungen $F \in C^\infty(L,M)$ durch

$$E(F) := \frac{1}{2}\int_L |dF|^2 d\mu$$

gegeben.

Bemerkungen: b) ist eine Erweiterung der Dirichletenergie

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

für eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^l$, denn wenn wir $(L,g) := (\Omega,\delta)$, $(M,\eta) := (\mathbb{R},\delta)$ setzen, so ist für $F = u \in C^\infty(L,M) = C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$

$$e(F) = \frac{1}{2}|dF|^2 = \frac{1}{2}|du|^2 = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta^{ij}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} = \frac{1}{2}|\nabla u|^2$$

Die Regularitätsvoraussetzungen für F kann man natürlich geeignet abschwächen.

Wir wollen nun Bedingungen für die Abbildung F herleiten unter denen die Energie minimiert wird. Dazu ist es nötig, Variationen einer Ausgangsabbildung F_0 zu betrachten, d.h. wir nehmen an, daß

$$F_t : (L, g_t) \to (M, \eta)$$

für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Familie von glatten Abbildungen (bzw. von Riemannschen Immersionen $F_t^* \eta = g_t$) ist. Dabei sei $g_t = g \ \forall t$, wenn wir nur glatte Abbildungen zwischen festen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (L, g), (M, η) untersuchen und falls wir an glatten Riemannschen Immersionen interessiert sind, sei $g_t := F_t^* \eta$ auch zeitabhängig (im folgenden bezeichne der Parameter t die **Zeit**.)
Um die 1. und 2. Variation der Energie zu berechnen, müssen wir Tensoren wie z.B. dF_t nach t differenzieren. Dies geht am besten, wenn wir statt L die Mannigfaltigkeit

$$\tilde{L} := L \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

betrachten und dann Zusammenhänge auf den zugehörigen Bündeln definieren. Z.B. sei der Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf $T\tilde{L}$ durch $(\nabla^{TL}, \frac{d}{dt})$ gegeben. Wir erhalten dann auch eine glatte Abbildung

$$F : \tilde{L} \to M$$

durch

$$F(x,t) := F_t(x)$$

und $F^{-1}TM$ ist dann ein Bündel über $\tilde{L}$ mit $\mathrm{Rang}(F^{-1}TM) = \mathrm{Rang}(TM)$. Wie oben erhalten wir dann einen Zusammenhang auf $F^{-1}TM$ durch

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{dF^\gamma}{dt} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\gamma}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \frac{dF^\gamma}{dt} \frac{\partial}{\partial y^\beta}$$

und

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \nabla_i \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\beta}.$$

Für $dF_t \in \Gamma(T^*L \otimes F_t^{-1}TM)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d}{dt}} dF_t &= \nabla_{\frac{d}{dt}} \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\
&+ \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} (\nabla_{\frac{d}{dt}} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + dx^i \otimes \nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \\
&+ \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{dF^\gamma}{dt} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{dF^\beta}{dt} + \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{dF^\gamma}{dt} \Gamma^\beta_{\gamma\alpha} \right) dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} \\
&= \nabla_i \frac{dF^\beta}{dt} dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\beta} ,
\end{aligned}$$

d.h. es ist $\nabla_{\frac{d}{dt}} F_i^\alpha = \nabla_i \frac{dF^\alpha}{dt}$.

Wenn g nicht von t abhängt ist

$$\begin{aligned} & \nabla_{\frac{d}{dt}}(g^{ij}F_i^\alpha F_j^\beta \eta_{\alpha\beta}) \\ = \; & 2g^{ij}\nabla_{\frac{d}{dt}}F_i^\alpha F_j^\beta \eta_{\alpha\beta} + g^{ij}F_i^\alpha F_j^\beta \tfrac{dF^\gamma}{dt}\underbrace{\nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta}}_{=0} \\ & = 2g^{ij}\nabla_i \tfrac{dF^\alpha}{dt}F_j^\beta \eta_{\alpha\beta}\,, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}E(F_t) &= \tfrac{d}{dt}\tfrac{1}{2}\int\limits_L g^{ij}F_i^\alpha F_j^\beta \eta_{\alpha\beta}d\mu \\ &= \int\limits_L g^{ij}\nabla_i \tfrac{dF^\alpha}{dt}F_j^\beta \eta_{\alpha\beta}d\mu. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, daß die Variation von F eigentlich ist. Dies bedeutet, daß supp $(\frac{dF^\alpha}{dt}) \Subset L$, außerhalb einer kompakten Menge gilt also $F_t = F$, $\forall t$. Durch partielle Integration der obigen Integralformel erhält man

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}E(F_t) &= -\int\limits_L \nabla_i(g^{ij}F_j^\beta \eta_{\alpha\beta})\tfrac{dF^\alpha}{dt}d_\mu \\ &= -\int\limits_L g^{ij}\nabla_i F_j^\beta \eta_{\alpha\beta}\tfrac{dF^\alpha}{dt}d\mu \\ &= -\int\limits_L \tau^\beta(F)\tfrac{dF^\alpha}{dt}\eta_{\alpha\beta}d\mu \end{aligned}$$

mit dem Spannungstensor $\tau = \mathrm{spur}(\nabla dF)$. Nimmt man daher an, daß bei $t = 0$ ein kritischer Punkt des Energiefunktionals vorliegt, so gilt

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}E(F_t) = 0 \qquad \forall \;\; \text{eigentliche Variationen } \frac{dF^\alpha}{dt}$$

und somit

$$0 = \int\limits_L \eta(\tau, \frac{dF}{dt}_{|t=0})d\mu$$

$\forall$ eigentlichen Variationen.
$\Rightarrow \tau = 0$.

Definition 7.4: Eine Abbildung $F : (L, g) \to (M, \eta)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten heißt harmonisch, wenn

$$\tau(F) = 0\,.$$

Bemerkung: Da man τ auch definieren kann, wenn L nicht orientiert ist, kann man also auch harmonische Abbildungen zwischen nichtorientierten Mannigfaltigkeiten betrachten.
Wir untersuchen noch den Fall, wo

$$F_t : L \to (M, \eta)$$

eine Variation von Riemannschen Immersionen ist. Auch hier gilt

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}dF_t = \nabla\frac{dF_t}{dt}\,,$$

also
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} F_i^\alpha = \nabla_i \frac{dF^\alpha}{dt}.$$
(Hierbei ist die Bedeutung von ∇ allerdings etwas anders.)
Da $d\mu = \sqrt{\det\,(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^l$, und $\nabla_{\frac{d}{dt}}(\det\, g_{ij}) = g^{kl}\nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl} \det\,(g_{ij})$, folgt
$$\nabla_{\frac{d}{dt}} d\mu = \frac{1}{2} g^{kl} \nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl} d\mu$$
und daher
$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}E(F_t) &= \tfrac{d}{dt}\int\limits_L d\mu \\ &= \tfrac{1}{2}\int\limits_L g^{kl}\nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl} d\mu. \end{aligned}$$
Andererseits ist
$$\begin{aligned} &\nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl} \\ =\ &\nabla_{\frac{d}{dt}}(\eta_{\alpha\beta}F_k^\alpha F_l^\beta) \\ =\ &\nabla_\gamma \eta_{\alpha\beta} \tfrac{dF^\gamma}{dt} F_k^\alpha F_l^\beta \\ &+\eta_{\alpha\beta}\left(\nabla_{\frac{d}{dt}} F_k^\alpha F_l^\beta + F_k^\alpha \nabla_{\frac{d}{dt}} F_l^\beta\right) \\ =\ &\eta_{\alpha\beta}\left(\nabla_k \tfrac{dF^\alpha}{dt} F_l^\beta + F_k^\alpha \nabla_l \tfrac{dF^\beta}{dt}\right) \end{aligned}$$
$\Rightarrow$
$$g^{kl}\nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl} = 2\eta_{\alpha\beta} F_k^\alpha \nabla_l \frac{dF^\beta}{dt} g^{kl}$$
und
$$\frac{d}{dt}E(F_t) = \int \eta_{\alpha\beta} g^{kl} F_k^\alpha \nabla_l \frac{dF^\beta}{dt} d\mu_t.$$
Partielle Integration für eigentliche Variationen ergibt hier
$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}E(F_t) &= -\int \eta_{\alpha\beta}\nabla_i F_j^\alpha g^{ij} \tfrac{dF^\beta}{dt} d\mu_t \\ &= -\int \eta_{\alpha\beta} H^\alpha \tfrac{dF^\beta}{dt} d\mu_t\,, \end{aligned}$$
so daß die kritischen Abbildungen hier durch $\vec{H} = H^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = 0$ charakterisiert sind.

Definition 7.5: Eine Riemannsche Immersion $F : (L, g) \to (M, \eta)$ mit $\vec{H} = 0$ heißt minimale Immersion und $F(L)$ minimale (immersierte) Untermannigfaltigkeit.
Wichtig bei der Untersuchung kritischer Punkte eines Energiefunktionals ist die Frage, ob es sich hierbei um ein Minimum handelt (falls angenommen werden kann, daß Minima die interessanten kritischen Punkte sind). Dazu muß offenbar für eigentliche Variationen
$$\frac{d^2}{dt^2}E(F_t) \geq 0$$

an der Stelle $t = 0$ gelten, wenn dort ein Minimum liegt. Dies nennt man dann auch eine **Stabilitätsbedingung**. Wir werden im folgenden die Stabilitätsbedingung für minimale Hyperflächen herleiten.
Es sei dazu $F_0 : L \to (M, \eta)$ ein kritischer Punkt des Energiefunktionals, d.h.

$$\vec{H} = 0 \qquad \text{und}$$
$$\frac{d}{dt} E(F_t) = -\int \eta_{\alpha\beta} \frac{dF^\alpha}{dt} H^\beta d\mu = 0$$

$\forall$ eigentlichen Variationen

$$\begin{aligned} & F : L \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \\ & F(x, 0) = F_0(x) \\ & \text{supp } \left(\tfrac{dF}{dt}\right) \Subset L \end{aligned}$$

Wir berechnen nun zunächst formal die zweite Ableitung von E nach g an der Stelle $t = 0$

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2} E(F_t) &= -\tfrac{d}{dt} \int \eta_{\alpha\beta} \tfrac{dF^\alpha}{dt} H^\beta d\mu \\ &= -\int \nabla_{\frac{d}{dt}} \left(\eta_{\alpha\beta} \tfrac{dF^\alpha}{dt} H^\beta d\mu\right) \\ &= -\int \eta_{\alpha\beta} \tfrac{dF^\alpha}{dt} \nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta d\mu\,, \end{aligned}$$

da $H^\beta = 0$ für $t = 0$.
Es genügt also die Variation des mittleren Krümmungsvektors $\vec{H} = H^\beta \frac{\partial}{\partial y^\beta}$ an der Stelle $t = 0$ zu berechnen. Nun ist

$$H^\beta = g^{ij} \nabla_i F_j^\beta$$

und daher

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta = \nabla_{\frac{d}{dt}} g^{ij} \nabla_i F_j^\beta + g^{ij} \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_i F_j^\beta.$$

Zunächst ist wegen $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$ der Term $\nabla_{\frac{d}{dt}} g^{ij}$ durch

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \nabla_{\frac{d}{dt}} g_{kl}$$

gegeben und da $g_{kl} = \eta_{\alpha\beta} F_k^\alpha F_l^\beta$, folgt

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} g^{ij} = -2 g^{ik} g^{jl} \eta_{\alpha\beta} \nabla_{\frac{d}{dt}} F_k^\alpha F_l^\beta$$

Wir hatten schon gesehen, daß

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} F_k^\alpha = \nabla_k \frac{dF^\alpha}{dt} \tag{7.1}$$

und somit

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} g^{ij} = -2 g^{ik} g^{jl} \eta_{\alpha\beta} \nabla_k \frac{dF^\alpha}{dt} F_l^\beta. \tag{7.2}$$

Damit also bisher

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta &= -2 g^{ik} g^{jl} \eta_{\gamma\delta} \nabla_k \tfrac{dF^\gamma}{dt} F_l^\delta \nabla_i F_j^\beta \\ &\quad + g^{ij} \nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_i F_j^\beta. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Wir möchten nun gerne den Ausdruck $\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_i F_j^\beta$ durch $\nabla_i \nabla_j \frac{dF^\beta}{dt}$ ersetzen. Es gilt

$$\begin{aligned} R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) dF_t &= R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right)\left(F_j^\beta dx^j \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\beta}\right) \\ &= F_j^\beta \Big(R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^j \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\beta} \\ &\qquad + dx^j \otimes R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \tfrac{\partial}{\partial y^\beta}\Big). \end{aligned}$$

Da aber T^*L zeitunabhängig ist und der Krümmungstensor $R(\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial x^i})dx^j$ somit verschwindet, folgt

$$\begin{aligned} R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) dF_t &= F_j^\beta dx^j \otimes R\left(\tfrac{d}{dt}, \tfrac{\partial}{\partial x^i}\right) \tfrac{\partial}{\partial y^\beta} \\ &= F_j^\beta R^\varepsilon_{\beta\gamma\delta} \tfrac{dF^\gamma}{dt} \tfrac{\partial F^\delta}{\partial x^i} dx^j \otimes \tfrac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \end{aligned}$$

also

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_i F_j^\varepsilon - \nabla_i \nabla_{\frac{d}{dt}} F_j^\varepsilon = R^\varepsilon_{\beta\gamma\delta} \frac{dF^\gamma}{dt} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \tag{7.4}$$

und mit (7.1)

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \nabla_i F_j^\beta = \nabla_i \nabla_j \frac{dF^\beta}{dt} + R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta} \frac{dF^\gamma}{dt} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^j}. \tag{7.5}$$

Wir setzen dies in (7.3) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta &= -2g^{ik} g^{jl} \eta_{\gamma\delta} \nabla_k \tfrac{dF^\gamma}{dt} F_l^\delta \nabla_i F_j^\beta \\ &\quad + g^{ij} \nabla_i \nabla_j \tfrac{dF^\beta}{dt} + g^{ij} R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta} \tfrac{dF^\gamma}{dt} \tfrac{\partial F^\delta}{\partial x^i} \tfrac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^j}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Im folgenden konzentrieren wir uns auf die Variation von Hyperflächen. Da tangentiale Anteile von $\frac{dF}{dt}$ nicht die Gestalt der Hyperfläche $F(L) \subset M$ ändern, führen sie auch zu keinen Beiträgen bei der eigentlichen Variation des Volumen $E(F(L)) = \int\limits_L d\mu$ (die auftretenden Beiträge tangentialer Anteile ergeben Divergenzterme, die sich dann wegen $\int_L \operatorname{div} V d\mu = 0$ für $\operatorname{supp}(V) \Subset L$ wegheben).
Eigentliche, normale Variationen einer orientierten Hyperfläche in einer orientierten Mannigfaltigkeit M, lassen sich in der Form

$$\frac{dF}{dt} = f\nu$$

mit $f : L \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}(f) \Subset L$, $\nu =$ pos. orient. Normale schreiben.
Insbesondere gilt dann

$$\nabla_k \frac{dF^\gamma}{dt} = \nabla_k (f\nu^\gamma) = \nabla_k f \nu^\gamma + h_k^l F_l^\gamma,$$

da $\nabla_k \nu^\gamma = h_k^l F_l^\gamma$. Ebenso $\nabla_i F_j^\beta = -h_{ij} \nu^\beta$.

Wir können diese Ausdrücke in (7.6) einsetzen und daher gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta &= -2g^{ik}g^{jl}\eta_{\gamma\delta}(\nabla_k f\nu^\gamma + h_k^m F_m^\gamma)F_l^\delta(-h_{ij}\nu^\beta) \\
&\quad + g^{ij}\nabla_i\nabla_j(f\nu^\beta) + fg^{ij}R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta}\nu^\gamma F_i^\delta F_j^\varepsilon \\
&= 2fh^{kl}h_k^m g_{ml}\nu^\beta + \Delta f\nu^\beta + 2\nabla^i f\nabla_i\nu^\beta \\
&\quad + f\Delta\nu^\beta + fg^{ij}R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta}\nu^\gamma F_i^\delta F_j^\varepsilon .
\end{aligned}$$

Da $\nabla_i\nu^\beta = h_i^m F_m^\beta$ und $\nabla^i F_m^\beta = -h_m^i\nu^\beta$, folgt

$$\begin{aligned}
\Delta\nu^\beta &= \nabla^i\nabla_i\nu^\beta = \nabla^i(h_i^m F_m^\beta) = \nabla^i h_i^m F_m^\beta - h_i^m h_m^i \nu^\beta \\
&= \nabla^i h_i^m F_m^\beta - |A|^2\nu^\beta
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta &= 2f|A|^2\nu^\beta + \Delta f\nu^\beta + 2\nabla^i f h_i^l F_l^\beta + f\nabla^i h_i^m F_m^\beta \\
&\quad - f|A|^2\nu^\beta + fg^{ij}R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta}\nu^\gamma F_i^\delta F_j^\varepsilon .
\end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in die vorläufige Formel für die 2. Variation von E ein

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}E(F_t)_{|t=0} &= -\int_L \eta_{\alpha\beta}\frac{dF^\alpha}{dt}\nabla_{\frac{d}{dt}} H^\beta d\mu \\
&= -\int_L f\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha(f|A|^2\nu^\beta + fg^{ij}R^\beta_{\varepsilon\gamma\delta}\nu^\gamma F_i^\delta F_j^\varepsilon + \Delta f\nu^\beta)d\mu\,,
\end{aligned}$$

da die anderen Terme wegen $\eta_{\alpha\beta}\nu^\alpha F_l^\beta = 0$ verschwinden. Also

$$\frac{d^2}{dt^2}E(F_t)_{|t=0} = -\int_L \{f^2(|A|^2 + g^{ij}\overline{R}_{oioj}) + f\Delta f\}d\mu.$$

Durch partielle Integration und wegen supp $(f) \Subset L$ ist dies gleich

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}E(F_t)_{|t=0} &= \int_L \{|\nabla f|^2 - f^2(|A|^2 + \overline{R}_{oioi})\}d\mu \\
&= \int_L \{|\nabla f|^2 - f^2(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))\}d\mu.
\end{aligned}$$

Ein Minimum der Energie bei F_0 kann also nur dann vorliegen, wenn der Ausdruck auf der rechten Seite nichtnegativ ist. Daher führt man die folgende Definition ein:

Definition 7.6: Es sei $F : L \to (M,\eta)$ eine minimale Hyperfläche. $F(L)$ heißt stabil, falls die Stabilitätsbedingung

$$\int_L |\nabla f|^2 d\mu \geq \int_L f^2(|A|^2 + \overline{R}ic(\nu,\nu))d\mu$$

$\forall\, f \in C_0^\infty(L,\mathbb{R})$ erfüllt ist.

8. Kapitel: Krümmungsabschätzungen für minimale, stabile Hyperflächen

Wir hatten ganz zu Beginn der Vorlesung bereits gesehen, daß die Minimalflächengleichung $H = 0$ elliptisch ist. Oft ist man an der Qualität der Lösungen von Differentialgleichungen interessiert. In dem hier zu diskutierenden, konkreten Fall einer Immersion

$$F : L \to \mathbb{R}^{n+1}$$

mit

$$H(F) = 0$$

möchte man z.B. die Norm der 2. Fundamentalform $h_{ij}dx^i \otimes dx^j$, also $|A|^2$ abschätzen. Aus den Gaußgleichungen im $\mathbb{R}^{n+1}$

$$R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$$

folgt offenbar $R_{ijkl} \equiv 0$ falls $|A|^2 = 0$. Falls man demnach zeigen kann, daß unter bestimmten Zusatzbedingungen $|A|^2 = 0$ folgt, so muß die minimale Hyperfläche flach sein und total geodätisch, woraus folgt, daß dies ein affiner Raum ist. Wir werden hier nur Krümmungsabschätzungen für stabile, minimale Hyperflächen im $(\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ betrachten. Analoge Abschätzungen, die dann noch vom Krümmungstensor $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der umgebenden Mannigfaltigkeit abhängen, kann man auch durchführen, falls L als Hyperfläche in eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit immersiert wird (siehe Schoen & Yau, Lectures on Differential Geometry, Academic Press).
Im folgenden werden wir oft einen Punkt $x_0 \in L$ fixieren und annehmen, daß wir um x_0 Normalkoordinaten $(x^i)_{i=1,\ldots,n}$ (bzgl. $g = F^*\delta$) eingeführt haben, so daß die zweite Fundamentalform $h_{ij}dx^i \otimes dx^j$ in x_0 diagonalisiert ist, d.h. in x_0 gilt:

$$\begin{aligned}
g_{ij}(x_0) &= \delta_{ij} \\
g_{ij,k}(x_0) &= 0 \\
\Gamma^k_{ij}(x_0) &= 0 \\
h_{ij}(x_0) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wobei λ_i die Eigenwerte von h_i^j, also die Eigenkrümmungen (oder auch Prinzipalkrümmungen) sind. Wir benutzen jetzt die Simons Gleichung um die Krümmungsabschätzungen herzuleiten.
Zunächst vereinfacht sich die Simonsgleichung wegen $H = 0$, $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, $\overline{\nabla}_\alpha R_{\beta\gamma\delta\varepsilon} = 0$ zu

$$\Delta|A|^2 = 2|\nabla A|^2 - 2|A|^4. \tag{8.1}$$

In den Punkten $x \in L$, wo $|A| \neq 0$ ist, folgt

$$\Delta|A|^2 = 2|A|\Delta|A| + 2|\nabla|A||^2. \tag{8.2}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} & |A|^2(|\nabla A|^2 - |\nabla|A||^2) \\ = \; & |A|^2|\nabla A|^2 - \tfrac{1}{4}|\nabla|A|^2|^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & |h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij}|^2 \\ = \; & 2|h_{ij}\nabla_k h_{lm}|^2 - 2h^{ij}\nabla^k h^{lm} h_{lm}\nabla_k h_{ij} \\ = \; & 2|A|^2|\nabla A|^2 - \tfrac{1}{2}\nabla^k|A|^2\nabla_k|A|^2 \\ = \; & 2(|A|^2|\nabla A|^2 - \tfrac{1}{4}|\nabla|A|^2|^2), \end{aligned}$$

so daß

$$|\nabla A|^2 - |\nabla|A||^2 = \frac{1}{2|A|^2}|h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij}|^2 \tag{8.3}$$

Als nächstes vereinfachen wir den Ausdruck

$$Q^2 := |h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij}|^2.$$

In den oben angesprochenen Koordinaten in einem Punkt $x_0 \in L$ haben wir

$$\begin{aligned} Q^2 &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{n} (h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij})^2 \\ &= \sum_{i,k,l,m} (h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij})^2 + \sum_{i\neq j,k,l,m} (h_{ij}\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ij})^2 \\ &= \sum_{i,k,l,m} (\lambda_i\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ii})^2 + \underbrace{\sum_{l,m}(h_{lm})^2}_{=|A|^2} \sum_{i\neq j,k} (\nabla_k h_{ij})^2 \\ &\geq \sum_{i,k,l\neq m} (\lambda_i\nabla_k h_{lm} - h_{lm}\nabla_k h_{ii})^2 + |A|^2 \sum_{i\neq j,k} (\nabla_k h_{ij})^2 \\ &= \underbrace{\sum_i \lambda_i^2}_{=|A|^2} \sum_{k,l\neq m} (\nabla_k h_{lm})^2 + |A|^2 \sum_{i\neq j,k} (\nabla_k h_{ij})^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$Q^2 \geq 2|A|^2 \sum_{k,l\neq m} (\nabla_k h_{lm})^2. \tag{8.4}$$

Nun schätzen wir ab

$$\begin{aligned} & \sum_{k,l\neq m} (\nabla_k h_{lm})^2 \geq \sum_{l\neq m} (\nabla_l h_{lm})^2 + \sum_{l\neq m} (\nabla_m h_{lm})^2 \\ = \; & 2\sum_{l\neq m} (\nabla_m h_{lm})^2 = 2\sum_{l\neq m} (\nabla_l h_{mm})^2, \end{aligned}$$

dabei folgt die letzte Gleichung aus den Codazzi Gleichungen im $\mathbb{R}^{m+1}$, d.h. aus $\nabla_k h_{lm} = \nabla_l h_{km}\ \forall\ l, k, m$. Also

$$Q^2 \geq 4|A|^2 \sum_{l\neq m} (\nabla_l h_{mm})^2. \tag{8.5}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} |\nabla|A||^2 = \frac{|\nabla|A|^2|^2}{4|A|^2} &= \frac{1}{|A|^2} \sum_k \left(\sum_{i,j} h_{ij} \nabla_k h_{ij} \right)^2 \\ &= \frac{1}{|A|^2} \sum_k \left(\sum_i \lambda_i \nabla_k h_{ii} \right)^2 \\ &\leq \sum_{k,i} (\nabla_k h_{ii})^2, \text{da } |\lambda_i| \leq |A| \quad \forall i \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$|\nabla|A||^2 \leq \sum_{k\neq i} (\nabla_k h_{ii})^2 + \sum_i (\nabla_i h_{ii})^2. \tag{8.6}$$

Da aber $H = 0$, folgt auch $\nabla_i H = 0$ und

$$\begin{aligned} \nabla_i H &= g^{kl} \nabla_i h_{kl} = \sum_k \nabla_i h_{kk} \\ &= \nabla_i h_{ii} + \sum_{\substack{k\neq i \\ \text{keine Summe über } i}} \nabla_i h_{kk}\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sum_i (\nabla_i h_{ii})^2 &= \sum_i \left(\sum_{\substack{k\neq i \\ \text{k.S.über } i}} \nabla_i h_{kk} \right)^2 \\ &\leq (n-1) \sum_{k\neq i} (\nabla_i h_{kk})^2\,, \end{aligned}$$

da

$$\left(\sum_{\substack{k\neq i \\ \text{k.S.über } i}} \nabla_i h_{kk} \right)^2 \leq (n-1) \sum_{\substack{k\neq i \\ \text{k.S.über } i}} (\nabla_i h_{kk})^2.$$

Mit (8.6) somit

$$|\nabla|A||^2 \leq n \sum_{k\neq i} (\nabla_k h_{ii})^2 \tag{8.7}$$

Faßt man jetzt die (Un)gleichungen (8.3), (8.5) und (8.7) zusammen, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|\nabla A|^2 - |\nabla |A||^2 &\overset{(8.3)}{=} \tfrac{1}{2|A|^2} Q^2 \\
&\overset{(8.5)}{\geq} 2 \sum_{l \neq m} (\nabla_l h_{mm})^2 \\
&\overset{(8.7)}{\geq} \tfrac{2}{n} |\nabla |A||^2
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Aus (8.8), (8.1) und (8.2) folgt jetzt

$$
|A|\Delta|A| + |A|^4 = |\nabla A|^2 - |\nabla|A||^2 \geq \frac{2}{n} |\nabla |A||^2
$$

in allen Punkten $x_0 \in L$, wo $|A| \neq 0$.
Im folgenden sei $a := |A|$, so daß wir die Ungleichung

$$
a\Delta a + a^4 \geq \frac{2}{n} |\nabla a|^2 \tag{8.9}
$$

bewiesen haben, falls $a = |A|^2 \neq 0$. Ab jetzt nehmen wir an, daß die minimale Hyperfläche in $\mathbb{R}^{n+1}$ stabil ist, d.h. es ist

$$
\int\limits_L |\nabla f|^2 d\mu \geq \int\limits_L f^2 |A|^2 d\mu
$$

$\forall\ f \in C_0^\infty(L)$.
Ersetzen wir f in dieser Ungleichung durch $a^{1+q} f$ mit einem $q \geq 0$, so gilt wegen $a = |A|$ und

$$
\nabla(a^{1+q} f) = (1+q) a^q f \nabla a + a^{1+q} \nabla f
$$

und

$$
\begin{aligned}
|\nabla(a^{1+q} f)|^2 &= (1+q)^2 a^{2q} f^2 |\nabla a|^2 + a^{2+2q} |\nabla f|^2 \\
&\quad + 2(1+q) a^{1+2q} f \langle \nabla a, \nabla f \rangle
\end{aligned}
$$

die Ungleichung

(8.10)

$$
\begin{aligned}
&\int \left\{ (1+q)^2 a^{2q} f^2 |\nabla a|^2 + a^{2+2q} |\nabla f|^2 + 2(1+q) a^{1+2q} f \langle \nabla a, \nabla f \rangle \right\} d\mu \\
\geq\ &\int a^{4+2q} f^2 d\mu.
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren nun (8.9) mit $f^2 a^{2q}$ und integrieren

$$
\int (f^2 a^{2q+1} \Delta a + f^2 a^{4+2q}) d\mu \geq \frac{2}{n} \int f^2 a^{2q} |\nabla a|^2 d\mu
$$

und mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
&\int \left\{ f^2 a^{4+2q} - 2a^{2q+1} f \langle \nabla f, \nabla a \rangle - (2q+1) f^2 a^{2q} |\nabla a|^2 \right\} d\mu \\
\geq\ &\tfrac{2}{n} \int f^2 a^{2q} |\nabla a|^2 d\mu.
\end{aligned}
$$

Wir setzen (8.10) in diese Ungleichung ein und in einem ersten Schritt haben wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{n}\int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu &\le (1+q)^2 \int a^{2q} f^2 |\nabla a|^2 d\mu + \int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu \\
&\quad +2(1+q)\int a^{1+2q} f\langle \nabla a, \nabla f\rangle d\mu \\
&\quad -2\int a^{2q+1} f\langle \nabla f, \nabla a\rangle d\mu \\
&\quad -(2q+1)\int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu \\
&= q^2\int a^{2q} f^2|\nabla a|^2 d\mu + \int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu \\
&\quad +2q\int a^{1+2q} f\langle \nabla a, \nabla f\rangle d\mu
\end{aligned}$$

Die Schwarzsche Ungleichung impliziert:

$$2qa^{1+2q} f\langle \nabla a, \nabla f\rangle \le \varepsilon q^2 f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 + \frac{1}{\varepsilon} a^{2+2q}|\nabla f|^2.$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{2}{n}\int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu &\le q^2\int a^{2q} f^2|\nabla a|^2 d\mu + \int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu \\
&\quad +\varepsilon q^2 \int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu + \tfrac{1}{\varepsilon}\int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu \\
&= q^2(1+\varepsilon)\int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu + (1+\tfrac{1}{\varepsilon})\int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

(8.11)
$$\left(\frac{2}{n} - q^2(1+\varepsilon)\right)\int f^2 a^{2q}|\nabla a|^2 d\mu \le (1+\frac{1}{\varepsilon})\int a^{2+2q}|\nabla f|^2 d\mu, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Diese Ungleichung werden wir im Beweis des nächsten Satzes verwenden.

Satz 8.1: Sei $F : L \to (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ eine stabile, minimale Immersion einer Hyperfläche.
Für jedes $p \in [4, 4+\sqrt{\frac{8}{n}})$ und für jedes nichtnegative $f \in C_0^\infty(L)$ ist die nachstehende Ungleichung gültig.

$$\int_L |A|^p f^p d\mu \le \beta \int_L |\nabla f|^p d\mu\,,$$

wobei β eine Konstante ist, die nur von n und p abhängt.

Beweis: Für $q \ge 0$ sei $p := 2q+4$. Wir knüpfen an (8.10) an und daher

$$\begin{aligned}
\int_L a^p f^2 d\mu &\le \int_L (1+q)^2 a^{2q}|\nabla a|^2 f^2 d\mu + 2(1+q)\int \langle a^q f\nabla a, a^{\frac{p}{2}-1}\nabla f\rangle d\mu \\
&\quad + \int a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu \\
&\overset{\text{C.S.}}{\le} \int_L (1+q)^2 a^{2q}|\nabla a|^2 f^2 d\mu + \int_L a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu \\
&\quad +(1+q)\int a^{2q} f^2|\nabla a|^2 d\mu + (1+q)\int a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

(8.12)
$$\int_L a^p f^2 d\mu \leq (1+q)(2+q)\int a^{2q} f^2 |\nabla a|^2 d\mu + (2+q)\int a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu$$

Falls $q^2 < \frac{2}{n}$, so finden wir ein $\varepsilon > 0$, daß auch $\frac{2}{n} - q^2(1+\varepsilon) > 0$ gilt und dann folgt aus (8.11)

$$\int f^2 a^{2q} |\nabla a|^2 d\mu \leq \beta_1 \int a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu \tag{8.13}$$

mit einer Konstanten β_1 die nur von n und p abhängt. Wegen $q \geq 0$ ist

$$q^2 < \frac{2}{n} \Leftrightarrow p < 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}.$$

Dies ist der Grund, warum wir in den Voraussetzungen des Satzes $p < 4 + \frac{8}{n}$ wählen müssen.
(8.12) und (8.13) ergeben zusammen

$$\int_L a^p f^2 d\mu \leq \beta_2(n,p) \int a^{p-2}|\nabla f|^2 d\mu \tag{8.14}$$

(mit einer Konstanten $\beta_2 = \beta_2(n,p)$, die nur von n, p abhängt). Da

$$\begin{aligned} a^{p-2}|\nabla f|^2 &= f^2 a^{p-2}\tfrac{|\nabla f|^2}{f^2} \\ &\leq \varepsilon f^2 a^p + \beta_4 \tfrac{|\nabla f|^p}{f^{p-2}} \qquad \text{(Youngsche Ungleichung)}, \end{aligned}$$

mit $\beta_4 = \beta_4(n,p,\varepsilon)$, ist auch mit (8.14)

$$\int_L a^p f^2 d\mu \leq \varepsilon\beta_2 \int f^2 a^p d\mu + \beta_2\beta_4 \int \frac{|\nabla f|^p}{f^{p-2}} d\mu \tag{8.15}$$

Wir wählen ε so klein, daß $1 - \varepsilon\beta_2 > 0$ gilt und dann haben wir

$$\int_L a^p f^2 d\mu \leq \beta_5 \int \frac{|\nabla f|^p}{f^{p-2}} d\mu \tag{8.16}$$

$\forall\ p \in [4, 4+\sqrt{\frac{8}{n}})$, $f \geq 0$ bewiesen. Ersetzen wir f durch $f^{\frac{p}{2}}$, so ist wegen

$$\begin{aligned} \tfrac{|\nabla f^{\frac{p}{2}}|^p}{(f^{\frac{p}{2}})^{p-2}} &= \frac{\left(\frac{p}{2} f^{\frac{p}{2}-1}\right)^p |\nabla f|^p}{f^{\frac{p(p-2)}{2}}} = |\nabla f|^p f^{p\left(\frac{p}{2}-1-\frac{p-2}{2}\right)}\left(\tfrac{p}{2}\right)^p \\ &= \left(\tfrac{p}{2}\right)^p |\nabla f|^p \end{aligned}$$

auch

$$\int_L a^p f^p d\mu \leq \beta_6 \int |\nabla f|^p d\mu \tag{8.17}$$

mit $\beta_6 = \left(\frac{p}{2}\right)^p \beta_5$. Dies war zu zeigen.

q.e.d.

Es sei nun $0 < R_0 \leq \infty$ gegeben und wir nehmen im folgenden an, daß eine Familie $\{B_r\}_{r\in(0,R_0)}$
$$B_r := \{x \in L : \rho(x) \leq r\}$$
gegeben ist, wobei $\rho : L \to \mathbb{R}$ eine Lipschitzfunktion ist, die fast überall $|\nabla\rho|^2 \leq 1$ erfüllt. (ρ wird später die Einschränkung der Abstandsfunktion im $\mathbb{R}^{n+1}$ auf $F(L)$ bzw. eine Abstandsfunktion bzgl. der induzierten Metrik auf L sein.) Zusätzlich sei jedes B_r kompakt und
$$L = \bigcup_{r\in(0,R_0)} B_r .$$
Sei nun $R_0 > R > 0$, $\theta \in (0,1)$ und
$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\gamma(rt) := \begin{cases} 1 & ; r \leq \theta R \\ \frac{1}{1-\theta}(1 - \frac{r}{R}) & ; \theta R < r \leq R \\ 0 & ; r > R \end{cases} .$$
γ ist Lipschitzstetig und die Funktion
$$f := \gamma(\rho) \qquad \text{fast überall glatt} .$$
Außerdem supp $(f) \subset B_R \subset L$, falls $R < R_0$. Wir nehmen an, daß $B_R \Subset L$. Dann können wir f in die Formel aus Satz 8.1 einsetzen. (Es reicht, daß f fast überall glatt ist.) Daher gilt $\forall\, p \in [4, 4 + \frac{8}{n})$
$$\int_L |A|^p f^p d\mu \leq \beta \int_L |\nabla p|^p d\mu$$
mit einer Konstanten β die nur von n und p abhängt. Andererseits ist
$$\begin{aligned} \int_{B_{\theta R}} |A|^p d\mu &= \int_{B_{\theta R}} |A|^p f^p d\mu \leq \int_L |A|^p f^p d\mu \\ &\leq \beta \int_L |\nabla f|^p d\mu = \beta \int_{B_R} |\nabla f|^p d\mu . \end{aligned}$$
Da $\nabla f = \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}\nabla\rho = -\frac{1}{R(1-\theta)}\nabla\rho$, folgt wegen $|\nabla\rho|^2 \leq 1$ auch
$$|\nabla f| \leq \frac{1}{R(1-\theta)}$$
und somit
$$\int_{B_{\theta R}} |A|^p d\mu \leq \beta \int_{B_R} |\nabla f|^p d\mu \leq \frac{\beta}{(1-\theta)^p} \frac{|B_R|}{R^p} .$$
Hier sei $|B_R| = \int_{B_R} d\mu = \mathrm{vol}(B_R)$.
Daraus folgt der nachstehende Satz:

Satz 8.2: Es sei $F : L \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine stabile, minimale Immersion und $\{B_r\}_{r\in(0,R_0)}$ wie oben. Ist $R_0 = \infty$, sind alle $B_R \Subset L$ mit $R < R_0$ und gilt $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{|B_R|}{R^p} = 0$ für ein $p \in [4, 4+\sqrt{\frac{8}{n}})$, so ist $F(L)$ total geodätisch, d.h. $|A|^2 \equiv 0$.

Beweis: Unter diesen Voraussetzungen gilt $\forall R$ mit $0 < R < \infty$ und jedes $\theta \in (0,1)$

$$\int\limits_{B_{\theta R}} |A|^p d\mu \leq \frac{\beta}{(1-\theta)^p} \frac{|B_R|}{R^p} \to 0 \quad \text{für} \quad R \to \infty$$

q.e.d.

Korollar 8.3: (**Bernstein Theorem**)
$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei gegeben und

$$U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid t < u(x)\} \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1}$$

Für die Immersion

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$F(x) := (x, u(x))$$

gelte

$$\text{vol}(F(\mathbb{R}^n) \cap V) \leq \text{vol}(U \cap \partial V)$$

$\forall$ offenen $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit kompaktem Abschluß.
Ist $n \leq 5$, so gilt

$$|A|^2 \equiv 0\,,$$

d.h. u ist linear.

Beweis: $F(\mathbb{R}^n)$ ist eine stabile, minimale Untermannigfaltigkeit, da eigentliche Variationen wegen

$$\text{vol}(F(\mathbb{R}^n) \cap V) \leq \text{vol}(\partial V \cap U)$$

das Volumen vergrößern.
Wir wählen die Abstandsfunktion

$$\rho : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$
$$\rho(x) := |x|$$

und schränken sie auf $F(\mathbb{R}^n)$ ein.
Wegen

$$\nabla \rho_{|F(\mathbb{R}^n)} = (\nabla\rho)^T$$

und $|\nabla\rho|^2 = 1$ gilt

$$|\nabla \rho_{|F(\mathbb{R}^n)}|^2 \leq 1.$$

Die Mengen $B_R := \{x \in L = F(\mathbb{R}^n) \mid \rho_{|L} \leq R\}$ sind dann durch

$$B_R = B(0,R) \cap F(\mathbb{R}^n)$$

gegeben mit

$$B(0,r) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| \leq R\}$$

Da $F(\mathbb{R}^n)$ ein Graph über $\mathbb{R}^n$ ist, bilden die $\overset{\circ}{B}_R$ eine Familie von relativ kompakten Teilmengen in $L = F(\mathbb{R}^n)$ mit

$$L = \bigcup_{R\in(0,\infty)} B_R$$

Außerdem ist $|B_R| \leq \text{const}\, R^n$ und dann

$$\frac{|B_R|}{R^p} \leq cR^{n-p}$$

Da für $p > n$, $R^{n-p} \to 0$ für $R \to \infty$, gilt die Behauptung daher wegen Satz 8.2 für solche Dimensionen n für die ein $p > n$ mit $p \in [4, 4 + \sqrt{\frac{8}{n}})$ existiert. Dies ist gerade $\forall\ n \leq 5$ erfüllt.

Satz 8.4: $F : L \to \mathbb{R}^{n+1}$, $n \leq 5$ sei eine stabile, minimale Immersion, $\{B_R\}_{R\in(0,\infty)}$ wie oben $B_R \Subset L$, $\forall\ R$ mit $R^{-n}|B_R| \leq \beta_0$, $\forall R$. Dann gilt:

$$\sup_{B_{\theta R}} |A| \leq \frac{\beta}{R}$$

$\forall\ \theta \in (0,1)$, wobei β eine Konstante ist, die nur von θ, n und β_0 abhängt.

Beweis: Es sei $u := R^{-2}\beta_0^2 + |A|^2$. Dann gilt mit (8.1)

$$\Delta u = \Delta |A|^2 \geq -2|A|^4 \geq -2(R^{-2} + |A|^2)u\,,$$

da $u \geq |A|^2$, $R^{-2} + |A|^2 \geq |A|^2$.
$\Rightarrow$

$$\Delta u + 2(R^{-2} + |A|^2)u \geq 0. \tag{8.18}$$

Ohne Beweis erwähnen wir: Ist ϕ eine nichtnegative Funktion auf einem Ball $K_R \subset \mathbb{R}^n$, für die gilt

$$\Delta\phi + c\phi \geq 0$$

mit einer Funktion c, so ist $\forall\ \theta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$

$$\sup_{K_{\theta R}} \phi \leq c_1 \left\{ R^{-n} \int_{K_R} \phi^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.19}$$

mit einer Konstanten c_1 die nur von n, ε, θ und $R^\varepsilon \int_{K_R} |c|^{\frac{n+\varepsilon}{2}} dx$ abhängt.

Für den Beweis dieser Tatsache benötigt man eine Sobolev Ungleichung. Ist $F : L \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine minimale Immersion, so gilt die Sobolev Ungleichung

$$\left(\int_L f^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c_2 \int_M |\nabla f|$$

$\forall\ f \in C_0^\infty(L)$, wobei c_2 nur von n abhängt.

Benutzt man diese Ungleichung, so kann der Beweis von (8.19) kopiert werden, um zu zeigen, daß eine Lösung von (8.18) die Ungleichung

$$\sup_{B_{\theta R}} |A|^2 \le c_3 \left\{ R^{-n} \int_{B_R} (R^{-2}\beta_0^2 + |A|^2)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{8.20}$$

erfüllt, wobei c_3 von n, ε, θ und $R^\varepsilon \int_{B_R} (R^{-2} + |A|^2)^{\frac{n+\varepsilon}{2}}$ abhängt. Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ so klein, daß $n + \varepsilon < 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}$ (dies geht für $n \le 5$). Dann ist

$$\begin{aligned} R^\varepsilon \int_{B_R} (R^{-2} + |A|^2)^{\frac{n+\varepsilon}{2}} &\le c_4 R^\varepsilon \left(\int_{B_R} R^{-(n+\varepsilon)} + \int_{B_R} |A|^{n+\varepsilon} \right) \\ &\le c_4 \left(\tfrac{|B_R|}{R^n} + \tilde{\beta} \tfrac{|B_R|}{R^n} \right) \\ &\le c_5(n, \beta_0) \end{aligned}$$

und mit (8.20)

$$\begin{aligned} \sup_{B_{\theta R}} |A|^2 &\le \tilde{c}_3 R^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{B_R} R^{-4} + \int_{B_R} |A|^4 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \tilde{\tilde{c}}_3 R^{-\frac{n}{2}} \left(\tfrac{|B_R|}{R^4} + \tfrac{|B_R|}{R^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \overline{c_3} \left(\tfrac{|B_R|}{R^{n+4}} \right)^{\frac{1}{2}} \le \tfrac{\beta^2}{R^2} \end{aligned}$$

mit $\beta = \beta(\theta, n, \beta_0)$

q.e.d

Wie wir im Beweis des letzten Satzes gesehen haben, sind Sobolev Ungleichungen in der Theorie partieller Differentialgleichungen von zentraler Bedeutung. Wir wollen daher näher darauf eingehen.

9. **Kapitel: Sobolev Räume, Einbettungssätze, Sobolev Ungleichungen**

In diesem Kapitel betrachten wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) mit Levi-Civita Zusammenhang ∇. Für ganze Zahlen $k \ge 0$ und $p \ge 1$, $p \in \mathbb{R}$ sei

$$C_k^{\infty,p}(M) := \{u \in C^\infty(M) \mid |\nabla^j u| \in L^p(M) \quad \forall\, j = 0, \ldots, k\}$$

Hierbei ist wie üblich

$$L^p(M) := \{u : M \to \mathbb{R} \mid \int_M u^p d\mu < \infty\}$$

und

$$\|u\|_p := \left(\int\limits_M u^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

ist die L^p–Norm.
Für kompaktes M ist $C_k^{\infty,p}(M) = C^\infty(M)$, da $|\nabla^k u|$ stetig und beschränkt ist.

Definition 9.1: Der Sobolev Raum $H^{k,p}(M)$ ist die Vervollständigung von $C_k^{\infty,p}(M)$ bzgl. der $H^{k,p}$–Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{k,p} &:= \sum_{j=0}^{k} \left(\int\limits_M |\nabla^j u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \||\nabla^j u|\|_p \end{aligned} .$$

Da eine Cauchy-Folge u_n in $C_k^{\infty,p}(M)$ auch insbesondere eine Cauchy-Folge in $L^p(M)$ ist und da eine Cauchy-Folge $u_n \in C_k^{\infty,p}$ die in $L^p(M)$ gegen 0 konvergiert, dies auch in $C_k^{\infty,p}(M)$ macht, kann man die Sobolev Räume $H^{k,p}(M)$ als Teilräume von $L^p(M)$ auffassen.
Als Übung zeige man, daß diese Räume Banachräume sind!

Lemma 9.2: (M, g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit $u : M \to \mathbb{R}$ sei Lipschitzstetig und $u \equiv 0$ auf $M \setminus K$ mit einer kompakten Menge K. Dann gilt

$$u \in H^{1,p}(M) \qquad \forall\, p \geq 1\,.$$

Beweis: Sei u Lipschitzstetig, K kompakt und $u \equiv 0$ auf $M \backslash K$. Wir wählen eine endliche Überdeckung von K durch N Karten (Ω_i, ϕ_i) mit $\Omega_i \subset M$ $\bigcup\limits_{i=1}^{N} \Omega_i \supset K$, und wir nehmen an, daß jedes ϕ_i die Menge Ω_i diffeomorph auf die Einheitskugel $B_0(1) \subset \mathbb{R}^n$ abbildet. Die Metrik g besitzt dann in der Karte $(\Omega_j, \phi_j, B_0(1))$ die Gestalt

$$g = g^j_{kl} dx^k \otimes dx^l$$

und ohne Einschränkung gelte für eine positive Konstante A

$$\frac{1}{A}\delta_{kl} \leq g^j_{kl} \leq A\delta_{kl} \qquad \forall\, j = 1, \ldots, N$$

(d.h. $g^j_{kl} - \frac{1}{A}\delta_{kl}$ und $A\delta_{kl} - g^j_{kl}$ sind positiv semidefinit).
Nun sei $(\chi_j)_{j=1,\ldots,N}$ eine glatte Zerlegung der 1 bzgl. der Überdeckung $(\Omega_j)_{j=1,\ldots,N}$. Die Funktionen

$$\begin{aligned} &f_j : B_0(1) \to \mathbb{R} \\ &f_j(x) := (\chi_j u)(\phi_j^{-1}(x)) \end{aligned}$$

sind dann offenbar Lipschitzstetig (bzgl. der Metrik δ). Aus dem Satz von Rademacher folgt daher, daß f_j fast überall differenzierbar ist und daß die partiellen Ableitungen von f_j in $L^p(B_0(1))$ liegen $\forall\ p \geq 1$. Dann folgt aber auch

$$\begin{aligned} \chi_j u \in H^{1,p}(M) \quad & \forall\ j = 1, \ldots, N \\ & \forall\ p \geq 1 \end{aligned}$$

und dann $u \in H^{1,p}(M)\ \forall\ p \geq 1$.

Definition 9.3: (M, g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. $H_0^{k,p}(M)$ ist der Abschluß von $C_0^\infty(M)$ in der $H^{k,p}(M)$-Norm.
Nicht für jede Mannigfaltigkeit (M, g) gilt $H_0^{k,p}(M) = H^{k,p}(M)$, z.B. ist dies für ein offenes, beschränktes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ falsch. Jedoch haben wir

Satz 9.4: (M, g) sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt $\forall\ p \geq 1$ $H_0^{1,p}(M) = H^{1,p}(M)$.

Beweis: Wir setzen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(t) := \begin{cases} 1 & ; t \leq 0 \\ 1 - t & ; 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & ; t \geq 1 \end{cases}$$

Sei $x \in M$ fest und $\rho(y)$ die Abstandsfunktion bzgl. g und x. ρ ist Lipschitzstetig und nach Lemma 9.2 ist daher die Funktionenfamilie

$$u_j(y) := u(y) f(\rho(y) - j)$$

in $H_0^{1,p}(M)$ falls $u \in C_1^{\infty,p}(M)$. Sei $B_x(j)$ der geodätische Ball mit Zentrum x und Radius j. Auf $B_x(j)$ gilt

$$\begin{aligned} (u_j - u)(y) &= u(y)(f(\rho(y) - j) - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und daher zunächst

$$\begin{aligned} \left(\int_M |u_j - u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{M \setminus B_x(j)} |u_j - u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{M \setminus B_x(j)} |u|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

denn $|u_j - u| \leq |u||f - 1| \leq |u|$.
Da f.ü. $\nabla(u_j - u) = (f - 1)\nabla u + u f' \nabla \rho$, gilt f.ü.

$$\nabla(u_j - u) = \begin{cases} 0 & , \rho \leq j \\ (f - 1)\nabla u + u f' \nabla \rho & , \rho > j \end{cases}$$

und dann

$$\left(\int_M |\nabla(u_j - u)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{M\setminus B_x(j)} |(f-1)\nabla u + uf'\nabla\rho|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{M\setminus B_x(j)} |(f-1)\nabla u|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{m\setminus B_x(j)} |uf'\nabla\rho|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

aufgrund der Dreiecksungleichung für die L^p-Norm. Weil $|\nabla\rho| = 1$, $|f-1| \leq 1$, $|f'| \leq 1$ auch

$$\left(\int_M |\nabla(u_j - u)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{M\setminus B_x(j)} |\nabla u|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{M\setminus B_x(j)} |u|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

impliziert, folgt

$$\|u_j - u\|_{H^{1,p}(M)} \leq \|u\|_{H^{1,p}(M\setminus B_x(j))} + \|u\|_{L^p(M\setminus B_x(j))}$$

$\Rightarrow \|u_j - u\|_{H^{1,p}(M)}$ konvergiert für $j \to \infty$ gegen Null.
$H_0^{1,p}(M)$ liegt daher dicht in $H^{1,p}(M)$, da $u \in C_1^{\infty,p}(M)$ und $C_1^{\infty,p}(M)$ nach Definition von $H^{1,p}(M)$ dicht in $H^{1,p}(M)$ liegt (alles bzgl. der $H^{1,p}$-Norm). Die Behauptung folgt, da $H_0^{1,p}$ abgeschlossen ist.

q.e.d.

Ohne Beweis erwähnen wir noch

Satz 9.5: (M, g) sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit positivem Injektivitätsradius. Für ganzes $k \geq 2$ existiere eine Konstante C, so daß $\forall\ j = 0, 1, \ldots, k-2$

$$|\nabla^j \mathrm{Ric}| \leq C.$$

Dann gilt $\forall\ p \geq 1$

$$H_0^{k,p}(M) = H^{k,p}(M)$$

und

Satz 9.6: (M, g) sei vollständig. Die Ricci-Krümmung sei nach unten beschränkt und der Injektivitätsradius von (M, g) positiv. Dann ist

$$H_0^{2,2}(M) = H^{2,2}(M)\,.$$

Wir kommen nun zu den Sobolevschen Einbettungssätzen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Wir sagen dann, daß die Einbettungssätze für (M, g) erfüllt sind, wenn zu zwei reellen Zahlen p, q mit $1 \leq q < p$ und zwei ganzen Zahlen k, l mit $0 \leq l < k$ und mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{m}$ eine positive Konstante C existiert, die nur von M, p, q, k, l abhängt, so daß

$$\|u\|_{H^{l,p}(M)} \leq C\|u\|_{H^{k,q}(M)}$$

$\forall\, u \in H^{k,q}(M)$ erfüllt ist. Offenbar bedeutet dies dann, daß $H^{k,q}(u)$ stetig in $H^{l,p}(u)$ eingebettet ist. Hierbei ist natürlich $m = \dim(M)$. Wir schreiben dann $H^{k,q}(M) \subset H^{l,p}(M)$.

Satz 9.7: (M,g) sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. Falls $H^{1,1}(M) \subset L^{\frac{m}{m-1}}(M)$, so gilt auch

$$H^{k,q}(M) \subset H^{l,p}(M)$$

$\forall\, 1 \leq q < p,\, 0 \leq l < k$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{m}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst $H^{1,1}(M) \subset L^{\frac{m}{m-1}(M)}$ impliziert $H^{1,q}(M) \subset L^p(M)$, $\forall\, 1 \leq q < m$ und $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$, d.h. die Aussage des Satzes ist für $k = 1$ erfüllt. Sei also $C \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß

$$\|u\|_{L^{\frac{m}{m-1}(M)}} \leq C\|u\|_{H^{1,1}(M)}$$

$\forall\, u \in H^{1,1}(M)$.
Wir fixieren p, q, so daß $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$ und $1 < q < m$. (Für $q = 1$ ist nichts zu zeigen.) Weiter sei $f := |u|^{\frac{p(m-1)}{m}}$ mit $u \in C_0^\infty(M)$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(M)}^{\frac{p(m-1)}{m}} &= \|f\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(M)} \\
&\leq C\|f\|_{H^{1,1}(M)} \\
&= C\int_M \{|\nabla f| + |f|\}d\mu \\
&= \frac{Cp(m-1)}{m}\int_M |u|^{p'}|\nabla u|d\mu + C\int_M |u|^{\frac{p(m-1)}{m}}d\mu
\end{aligned}$$

mit $p' := \frac{p(m-1)}{m} - 1$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{Cp(m-1)}{m}\left(\int_M |u|^{p'q'}d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_M |\nabla u|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+C\left(\int_M |u|^{p'q'}d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_M |u|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$. Nun ist

$$\begin{aligned}
p'q' &= \left(p\tfrac{m-1}{m} - 1\right)\tfrac{q}{q-1} \\
&= \left(p\tfrac{m-1}{m} - 1\right)\tfrac{1}{1-\frac{1}{q}} \\
&= p\left(1 - \tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{p}\right)\tfrac{1}{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{m}} = p
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(M)}^{\frac{p(m-1)}{m}} &\leq \frac{Cp(m-1)}{m}\|u\|_{L^p(M)}^{p\frac{m-1}{m}-1}\|\nabla u\|_{L^q(M)} \\
&+ C\|u\|_{L^p(M)}^{p\frac{m-1}{m}-1}\|u\|_{L^q(M)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(M)} &\leq \tfrac{Cp(m-1)}{m}\|\nabla u\|_{L^q(M)} + C\|u\|_{L^q(M)} \\ &\leq \tfrac{Cp(m-1)}{m}\left(|\nabla u\|_{L^q(M)} + \|u\|_{L^q(M)}\right) \ ,\end{aligned}$$

da $\frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m}$ und daher auch $1 \leq \frac{p(m-1)}{m}$.
Nach Satz 9.4 folgt die Ungleichung dann auch $\forall\ u \in H^{1,q}(M)$. Die Behauptung $H^{k,q}(M) \subset H^{l,p}(M)\ \forall\ 1 \leq q < p,\ 0 \leq l < k$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{m}$ folgt leicht per Induktion (Übung).

q.e.d.

Lemma 9.8: (Carron)
(M, g) sei eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. Falls sich $H^{1,q}(M)$ für ein Paar p, q mit $1 \leq q < m$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$ stetig in $L^p(M)$ einbetten läßt, so existiert zu jedem $r > 0$ eine positive Konstante $\mu = \mu(M, q, r)$, so daß $\forall\ x \in M\ |B_x(r)| \geq \mu$.

Beweis: p, q, C seien so gewählt, daß $1 \leq q < m$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$ und

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq C\|u\|_{H^{1,q}(M)}$$

$\forall\ u \in H^{1,q}(M)$.
Wir fixieren $r > 0$. Sei $x \in M$ beliebig und $v \in H^{1,q}(M)$ so gewählt, daß supp $(v) \Subset B_x(r)$. Die Höldersche Ungleichung impliziert zunächst

$$\|v\|_{L^q(M)} \leq |B_x(r)|^{\frac{1}{m}}\|v\|_{L^p(M)}$$

Insgesamt somit auch

$$\|v\|_{L^q(M)} \leq C|B_x(r)|^{\frac{1}{m}}\|v\|_{H^{1,q}(M)}$$

und dann $(v \not\equiv 0)$

$$|B_x(r)|^{-\frac{1}{m}} - C \leq C\frac{\left(\int\limits_M |\nabla v|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_M |v|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}$$

Gilt $|B_x(r)| \leq \left(\frac{1}{2C}\right)^m$, so gilt auch

$$|B_x(r)|^{-\frac{1}{m}} - C \geq \frac{1}{2}|B_x(r)|^{-\frac{1}{m}}$$

und dann

$$\frac{1}{2|B_x(r)|^{\frac{1}{m}}} \leq C\frac{\left(\int\limits_M |\nabla v|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_M |v|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{(2C)^q|B_x(r)|^{\frac{q}{m}}} \leq \frac{\int\limits_M |\nabla v|^q d\mu}{\int\limits_M |v|^q d\mu}.$$

Wir wählen jetzt wieder eine spezielle Testfunktion v, nämlich

$$\begin{aligned} v(y) &:= r - \rho_x(y) \quad \text{falls } \rho_x(y) \leq r \\ v(y) &:= 0 \qquad\qquad\quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

v ist Lipschitz und supp $(v) \Subset B_x(r)$. Daher ist $v \in H_0^{1,q}$ nach Lemma 9.2. Da $|\nabla v| \leq 1$ und $\int\limits_M |v|^q d\mu \geq \int\limits_{B_x(\frac{r}{2})} |v|^q d\mu$ folgt

$$\frac{1}{(2C)^q}|B_x(r)|^{-\frac{q}{m}} \leq \frac{|B_x(r)|}{\int\limits_{B_x(\frac{r}{2})} |v|^q d\mu}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} |v| &= |r - \rho| \\ &\geq \tfrac{r}{2} \quad \text{auf} \quad B_x(\tfrac{r}{2}). \end{aligned}$$

Daher

$$\int\limits_{B_x(\frac{r}{2})} |v|^q d\mu \geq (\frac{r}{2})^q |B_x(\frac{r}{2})|$$

und

$$(2C)^{-q}|B_x(r)|^{-\frac{q}{m}} \leq \frac{2^q|B_x(r)|}{r^q|B_x(\frac{r}{2})|}$$

$\Leftrightarrow$

$$|B_x(r)| \geq \left(\frac{r}{4C}\right)^{\frac{mq}{m+q}} |B_x(\frac{r}{2})|^{\frac{m}{m+q}}.$$

Induktiv dann $\forall\ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$|B_x(r)| \geq \left(\frac{r}{2C}\right)^{q\alpha(k)} \left(\frac{1}{2}\right)^{q\beta(k)} |B_x\left(\frac{r}{2^k}\right)|^{\gamma(k)}$$

mit den Reihen

$$\alpha(k) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{m}{m+q}\right)^i, \beta(k) = \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{m}{m+q}\right)^i$$

und

$$\gamma(k) = \left(\frac{m}{m+q}\right)^k.$$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} |B_x\left(\frac{r}{2^k}\right)|^{\gamma(k)} = 1$ (da $|B_x(r)| = \omega_n(r^n + O(r))$) und

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{m}{m+q}\right)^i = \frac{m}{q}, \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{m}{m+q}\right)^i = \frac{m(m+q)}{q^2},$$

folgt im Limes $k \to \infty$

$$|B_x(r)| \geq \left(\frac{1}{2^{\frac{(m+2q)}{q}} C} \right)^m r^m .$$

Dies folgt also wenn $|B_x(r)| \leq \frac{1}{(2C)^m}$ und folglich

$$|B_x(r)| \geq \min \left\{ \frac{1}{(2C)^m}, \left(\frac{r}{2^{\frac{m+2q}{q}} C} \right)^m \right\} .$$

q.e.d.

Wir kommen jetzt zu den Einbettungssätzen im $\mathbb{R}^m$.

Lemma 9.9: Für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\|u\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u_i(x)| dx \right)^{\frac{1}{m}} .$$

Beweis: Sei $p \in \mathbb{R}^m$ ein beliebiger Punkt ($p = (p^1, \ldots, p^m)$). Ferner seien D_i die Geraden durch den Punkt p, die parallel zur x^i-Achse sind ($x = (x^1, \ldots, x^m)$ sind kartesische Koordinaten). Offenbar ist wegen $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} u(p) &= \int_{-\infty}^{p^i} u_i(p^1, \ldots, p^{i-1}, x^i, p^{i+1}, \ldots, p^m) dx^i \\ &= -\int_{p^i}^{\infty} u_i(p^1, \ldots, p^{i-1}, x^i, p^{i+1}, \ldots, p^m) dx^i \end{aligned}$$

und daher $\forall\ i$

$$(9.1) \qquad |u(p)| \leq \frac{1}{2} \int_{D_i} |u_i(p^1, \ldots, p^{i-1}, x^i, p^{i+1}, \ldots, p^m)| dx^i .$$

Um den Beweis übersichtlicher zu gestalten, führen wir Abkürzungen ein. Für $0 \leq k < i \leq m$ sei

$$\begin{aligned} &A_{ik} := \\ &= \int_{D_1 \times \cdots \times D_k \times D_i} |u_i(x^1, \ldots, x^k, p^{k+1}, \ldots, p^{i-1}, x^i, p^{i+1}, \ldots, p^m)| dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^k dx^i , \end{aligned}$$

und für $1 \leq i \leq k \leq m$

$$A_{ik} := \int_{D_1 \times \cdots \times D_k} |u_i(x^1, \ldots, x^k, p^{k+1}, \ldots, p^m)| dx^1 \ldots dx^k$$

Es gilt also zunächst $\forall\ i$ wegen (9.1)

$$|u(p)| \leq \frac{1}{2} A_{i0}$$

und dann auch

$$|u(p)|^{\frac{m}{m-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-2}} \prod_{i=1}^{m} (A_{i0})^{\frac{1}{m-1}} . \tag{9.2}$$

Wir integrieren diese Gleichung nun nacheinander über p^1 bis p^m. Für p^1 ergibt sich

$$\int_{D_1} |u(p)|^{\frac{m}{m-1}} dp^1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} (A_{10})^{\frac{1}{m-1}} \int_{D_1} \prod_{i>1} (A_{i0})^{\frac{1}{m-1}} dp^1 ,$$

da A_{10} schon nicht mehr von p^1 abhängt. Mit der Hölderschen Ungleichung schätzen wir weiter ab

$$\int_{D_1} \prod_{i>1} (A_{i0})^{\frac{1}{m-1}} dp^1 \leq \prod_{i>1} \left(\int_{D_1} A_{i0} dp^1 \right)^{\frac{1}{m-1}} ,$$

aber

$$\int_{D_1} A_{i0} dp^1 = A_{i1} \quad \text{für } i > 1 ,$$

so daß

$$\int_{D_1} |u(p)|^{\frac{m}{m-1}} dp^1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} (A_{10})^{\frac{1}{m-1}} \prod_{i>1} (A_{i1})^{\frac{1}{m-1}}$$

Da $A_{10} = A_{11}$, kann man dies auch als

$$\int_{D_1} |u(p)|^{\frac{m}{m-1}} dp^1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \prod_{i} (A_{i1})^{\frac{1}{m-1}}$$

schreiben.
Wir behaupten nun, daß

$$\int_{D_1 \times \cdots \times D_k} |u(p)|^{\frac{m}{m-1}} dp^1 \dots dp^k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \prod_{i} (A_{ik})^{\frac{1}{m-1}} \tag{9.3}$$

$\forall\ 1 \leq k \leq m$ gilt. Wir beweisen dies per Induktion über k und die Aussage für $k = 1$ haben wir gerade nachgewiesen. Dann ist für $k \geq 1$, $k < m$

$$\begin{aligned}
&\int_{D_1 \times \cdots \times D_k \times D_{k+1}} |u(p)|^{\frac{m}{m-1}} dp^1 \dots dp^k dp^{k+1} \\
&\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \int_{D_{k+1}} \prod_{i} (A_{ik})^{\frac{1}{m-1}} dp^{k+1} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} A_{k+1k} \int_{D_{k+1}} \prod_{i \neq k+1} (A_{ik})^{\frac{m}{m-1}} d_p^{k+1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} A_{k+1k} \prod_{i \neq k+1} \left(\int_{D_{k+1}} A_{ik} d_p^{k+1} \right)^{\frac{1}{m-1}}
\end{aligned}$$

und weil $A_{k+1k} = A_{k+1k+1}$ und $\int\limits_{D_{k+1}} A_{ik} d_p^{k+1} = A_{ik+1}$ für $i \neq k+1$ dann auch

$$\begin{aligned}\int\limits_{D_1\times\cdots\times D_{k+1}} |u(p)|dp^1 \ldots d_p^{k+1} &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} A_{k+1k+1} \prod_{i\neq k+1} (A_{ik+1})^{\frac{m}{m-1}} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \prod_i (A_{ik+1})^{\frac{1}{m-1}}\end{aligned}.$$

Damit ist die Induktion beendet und für $k = m$ folgt aus (9.3)

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^m} |u|^{\frac{m}{m-1}} dx &\leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \prod_{i=1}^m (A_{im})^{\frac{1}{m-1}} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} \prod_i \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |u_i(x)|dx\right)^{\frac{1}{m-1}}\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\|u\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^m \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |u_i(x)|dx\right)^{\frac{1}{m}}$$

q.e.d.

Korollar 9.10: Es sei $q \in [1, m)$ und $p \geq 1$ so, daß $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$. Dann gilt $\forall\ u \in H^{1,q}(\mathbb{R}^m)$

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{p(m-1)}{2m} \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^m)}.$$

Insbesondere sind $\forall\ 1 \leq q < p,\ 0 \leq l < k,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{m}$ die Einbettungen

$$H^{k,q}(\mathbb{R}^m) \subset H^{l,p}(\mathbb{R}^m)$$

erfüllt und stetig.

Beweis: Aus Lemma 9.9 folgt zunächst $\forall\ u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$\|u\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\nabla u| dx, \tag{9.4}$$

denn $|u_i(x)| \leq |\nabla u(x)| \quad \forall\ i$.
Da $H_0^{1,1}(\mathbb{R}^m)$ der Abschluß von $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ bzgl. der $H^{1,1}$-Norm ist, gilt dies dann auch $\forall\ u \in H_0^{1,1}(\mathbb{R}^m)$. Nach Satz 9.4 dann aber auch $\forall\ u \in H^{1,1}(\mathbb{R}^m)$. Mit den Ausführungen im Beweis von Satz 9.7 erhalten wir hieraus dann auch die Ungleichung

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2} \frac{p(m-1)}{m} \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^m)},$$

da die im Beweis verwendete Konstante C hier $\frac{1}{2}$ gleicht und wir mit einer "besseren" Ausgangsungleichung (9.4) starten können.

q.e.d.

Wir behandeln jetzt die Einbettungssätze auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Satz 9.11: (M, g) sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. Dann ist für alle $1 \leq q < p$, $0 \leq l < k$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{k-l}{m}$

$$H^{k,q}(M) \subset H^{l,p}(M)$$

Beweis: Wegen Satz 9.7 müssen wir nur noch $H^{1,1}(M) \subset L^{\frac{m}{m-1}}(M)$ nachweisen. Man kann die kompakte Mannigfaltigkeit M durch eine endliche Anzahl N von Karten $(\Omega_i, \phi_i)_{i=1,\ldots,N}$ überdecken, mit $\phi_i : \Omega_i \to B_0(1) \subset \mathbb{R}^m$ und so, daß auf jeder Karte

$$\frac{1}{2}\delta_{ij} \leq g_{ij} \leq 2\delta_{ij}$$

erfüllt ist. Sei χ_i eine glatte Zerlegung der 1 bzgl. dieser Überdeckung. Für $u \in H^{1,1}(M)$ ist dann

$$\begin{aligned} \int_M |\chi_i u|^{\frac{m}{m-1}} d\mu &= \int_{B_0(1)} |(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1}(x)|^{\frac{m}{m-1}} \sqrt{\det g_{ij}}\, dx \\ &\leq 2^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} |(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1}(x)|^{\frac{m}{m-1}} dx \end{aligned}$$

und ebenso

$$\int_M |\nabla(\chi_i u)| d\mu \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1}(x))| dx.$$

Wir können das Korollar 9.10 benutzen und erhalten

$$\|(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1}\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \leq \frac{1}{2} \|\nabla((\chi_i u) \circ \phi_i^{-1})\|_{L^1(\mathbb{R}^m)}$$

$\forall\ i = 1, \ldots, N$. Daher $\forall\ u \in H^{1,1}(M)$.

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(M)} &\leq \sum_{i=1}^{N} \|\chi_i u\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(M)} \\ &\leq 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{i=1}^{N} \|(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1}\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq 2^{\frac{m-3}{2}} \sum_{i=1}^{N} \|\nabla(\chi_i u) \circ \phi_i^{-1})\|_{L^1(\mathbb{R}^m)} \\ &\leq 2^{\frac{m-3}{2}} \cdot 2^{\frac{m+1}{2}} \sum_{i=1}^{N} \|\chi_i u\|_{L^1(M)} \\ &\leq 2^{m-1} \left(\|\nabla u\|_{L^1(M)} + \max_M \sum_{i=1}^{N} |\nabla \chi_i| \|u\|_{L^1(M)} \right) \end{aligned}$$

q.e.d.

Als weiteres Korollar erhalten wir auch

Korollar 9.12: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt. Dann gilt $\forall\ 1 \leq q < m$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$ und $f \in H_0^{1,q}(\Omega)$ auch $f \in L^p(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $c = c(q, m)$ mit

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|Df\|_{L^q(\Omega)}.$$

Bis jetzt haben wir stets $1 \leq q < m$ angenommen. Für $q > m$ erhält man sogar eine schärfere Aussage

Satz 9.13: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt, $f \in H_0^{1,q}(\Omega)$ sei gegeben, $q > m$. Dann gilt

$$f \in C^0(\overline{\Omega})$$

und

$$\sup_{x\in\Omega} |f(x)| \leq C\mathrm{vol}(\Omega)^{-\frac{1}{p}} \|Df\|_{L^q(\Omega)}$$

mit $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{m}$ und einer Konstanten C, die nur von m und q abhängt.

Beweis: Wir nehmen zunächst $\mathrm{vol}(\Omega) = 1$ und $\|Df\|_{L^q(\Omega)} = 1$ an. (9.4) ergibt für $f \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|f\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|Df\|_{L^1(\Omega)}.$$

Wenden wir diese Ungleichung auf $|f|^\gamma$ mit $\gamma > 1$ an, ergibt dies mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
\||f|^\gamma\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)} &\leq \tfrac{\gamma}{2}\int_\Omega |f|^{\gamma-1}|Df|dx \\
&\overset{H\ddot{o}lder}{\leq} \tfrac{\gamma}{2}\||f|^{\gamma-1}\|_{L^{q*}(\Omega)}\|Df\|_{L^q(\Omega)}
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q*} = 1$.
Da wir $\|Df\|_{L^q(\Omega)} = 1$ angenommen haben, folgt also zunächst

$$\||f|^\gamma\|_{L^{\frac{m}{m-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2}\||f|^{\gamma-1}\|_{L^{q*}(\Omega)},$$

also

$$\|f\|^\gamma_{L^{\frac{\gamma m}{m-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2}\|f\|^{\gamma-1}_{L^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}(\Omega)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma m}{m-1}}(\Omega)} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \|f\|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{L^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}(\Omega)}.$$

Aus der Hölderschen Ungleichung folgt auch

$$\begin{aligned}
\|f\|^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}_{L^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}(\Omega)} &= \int_\Omega |f|^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |f|^{\frac{\gamma q}{q-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{\gamma}} \\
&= \|f\|^{\frac{(\gamma-1)q}{q-1}}_{L^{\frac{\gamma q}{q-1}}}, \text{ da } \mathrm{vol}(\Omega) = 1
\end{aligned}$$

und daher zunächst

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma m}{m-1}}(\Omega)} \leq \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \|f\|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}_{L^{\frac{\gamma q}{q-1}}(\Omega)}. \tag{9.5}$$

Wir wählen nun $\gamma := \frac{m}{m-1} \cdot \frac{q-1}{q} > 1$ (weil $q > m$). Setzen wir statt γ in (9.5) γ^n für $n > 1$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{\frac{\gamma^n m}{m-1}}(\Omega)} &\leq \left(\frac{\gamma^n}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma^n}} \|f\|^{\frac{\gamma^n - 1}{\gamma^n}}_{L^{\frac{\gamma^n q}{q-1}}(\Omega)} \\ &= \left(\frac{\gamma^n}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma^n}} \|f\|^{\frac{\gamma^n - 1}{\gamma^n}}_{L^{\frac{\gamma^{n-1} m}{m-1}}(\Omega)}, \end{aligned}$$

denn $\frac{\gamma q}{q-1} = \frac{m}{m-1}$.
Da für jedes meßbare f auf einer offenen beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ die Konvergenz

$$\lim_{p \to \infty} \left(\frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_\Omega |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f|$$

gilt, und dies wegen der Hölderschen Ungleichung auch eine monotone Konvergenz ist, gilt wegen $\gamma > 1$: Ist $\|f\|_{L^{\frac{\gamma^n m}{m-1}}} \leq 1$ für unendlich viele n, so gilt $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| \leq 1$.
Wir können also annehmen, daß $\|f\|_{L^{\frac{\gamma^n m}{m-1}}} \geq 1$, $\forall\, n \geq n_0$ mit einem $n_0 \geq 1$ erfüllt ist. Dann ist aber $\forall\, n \geq n_0 + 1$

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma^n m}{m-1}}(\Omega)} \leq \left(\frac{\gamma^n}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma^n}} \|f\|_{L^{\frac{\gamma^{n-1} m}{m-1}}(\Omega)}$$

und iterativ auch

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma^n m}{m-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma^{\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{n} \frac{\nu}{\gamma^\nu}}}{2^{\sum\limits_{\nu=n_0+1}^{n} \frac{1}{\gamma^\nu}}} \|f\|_{L^{\frac{\gamma^{n_0} m}{m-1}}(\Omega)}.$$

Ist $n_0 = 1$, so ist

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma^{n_0} m}{m-1}}(\Omega)} = \|f\|_{L^{\frac{\gamma m}{m-1}}(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2} \|Df\|_{L^q(\Omega)} = \frac{\gamma}{2}.$$

Ist dagegen $n_0 > 1$, so ist nach Wahl von n_0 dann

$$\|f\|_{L^{\frac{\gamma^{n_0} m}{m-1}}(\Omega)} \leq 1.$$

In jedem Fall folgt also durch Grenzübergang $n \to \infty$ die Ungleichung

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| \leq c(q, m). \tag{9.6}$$

Wir müssen uns jetzt noch von den Normalisierungen

$$\text{vol}(\Omega) = 1, \|Df\|_{L^q(\Omega)} = 1, f \in C_0^\infty(\Omega)$$

lösen. Ist $\|Df\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$ so setzen wir $g := \frac{f}{\|Df\|_{L^q(\Omega)}}$ in (9.6) ein und erhalten

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|f| \leq c(q,m)\|Df\|_{L^q(\Omega)} \tag{9.7}$$

Ist $\|Df\|_{L^q(\Omega)} = 0$, so können wir die Ungleichung leicht mit einem Approximationsargument herleiten. Um uns von $\mathrm{vol}(\Omega) = 1$ zu lösen, betrachten wir die Koordinatentransformation
$y = y(x) = \mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{m}} x$
$\tilde{\Omega} := \{y : x \in \Omega\}$
$\overline{f}(y) := f(x)$
Dann ist $\mathrm{vol}(\tilde{\Omega}) = 1$ und

$$D_i f(x) = D_i \overline{f}(y)\mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{m}}$$

und auch

$$\left(\int_{\Omega} |Df|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\tilde{\Omega}} |D\overline{f}|^q \frac{dy}{\mathrm{vol}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{q}} \mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{m}}.$$

Wenden wir (9.7) auf $\overline{f}$ an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega}|f| &= \operatorname*{ess\,sup}_{\tilde{\Omega}}|\overline{f}| \leq c(q,m)\|D\overline{f}\|_{L^q(\tilde{\Omega})} \\ &= c(q,m)\mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{m}}\|Df\|_{L^q(\Omega)} \end{aligned}. \tag{9.8}$$

Dies ist die Behauptung für $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Ist allgemeiner $f \in H_0^{1,q}(\Omega)$, so approximieren wir f durch eine Folge $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. der $H^{1,q}$-Norm und wenden die Ungleichung auf $f_n - f_m$ an $(n, m \geq 0)$. Da f_n eine Cauchyfolge in $H^{1,q}(\Omega)$ ist, ist Df_n eine Cauchyfolge in $L^q(\Omega)$ und wegen (9.8) ist f_n dann auch eine Cauchyfolge in $C^0(\overline{\Omega})$. Daher liegt auch f in dem Raum und erfüllt die Ungleichung (9.8).

Bemerkung: $f \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt hier lediglich, daß f äquivalent ist zu einer Funktion $\tilde{f}$ die $\tilde{f} \in C^0(\overline{\Omega})$ im üblichen Sinne erfüllt, wobei äquivalent hier Gleichheit f.ü. bedeutet.

Korollar 9.14: (Poincaré-Ungleichung)
$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt, $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Dann ist

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathrm{const}\,\mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{1}{m}}\|Df\|_{L^2(\Omega)}$$

mit einer Konstanten, die nicht von f abhängt.

Beweis: Für $q := \frac{2m}{2+m}$ ist $q < m$ und $p := \frac{mq}{m-q} = 2$. Nach Korollar 9.12 ist dann

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \text{const} \cdot \|Df\|_{L^{\frac{2m}{m+2}}} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \text{const} \cdot \operatorname{vol}(\Omega)^{\frac{m+2}{2m}-\frac{1}{2}} \|Df\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \text{const} \cdot \operatorname{vol}(\Omega)^{\frac{1}{m}} \|Df\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 9.15: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt. Dann gilt

$$H_0^{k,q}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{mq}{m-kq}}(\Omega) & kq < m \\ C^l(\overline{\Omega}) & 0 \leq l < k - \frac{m}{q} \end{cases}$$

Beweis: Dies folgt iterativ aus Korollar 9.12 und Satz 9.13.

10. **Kapitel: Wärmeleitungsgleichungen**

$\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen $(0,T) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned}\Omega_T &:= \Omega \times (0,T) \\ \partial_P \Omega_T &:= (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \overline{(0,T)}) .\end{aligned}$$

$\partial_P \Omega_T$ heißt der parabolische Rand von Ω_T. Wir nehmen im folgenden an, daß $u : \overline{\Omega}_T \to \mathbb{R}$ die Bedingungen

(10.1) $$u(x,t) \in C^2(\Omega) \qquad \forall\, t \in (0,T)$$

(10.2) $$u(x,t) \in C^1((0,T)) \qquad \forall\, x \in \Omega$$

(10.3) $$u \in C^0(\overline{\Omega}_T)$$

erfüllt. Weiterhin sei $f \in C^0(\partial_P \Omega_T)$.
Wir sagen dann, daß u die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletrandwerten f erfüllt, falls

(10.4) $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t) & \forall\, (x,t) \in \Omega_T \\ u(x,t) = f(x,t) & \forall\, (x,t) \in \partial_P \Omega_T \end{cases}$$

erfüllt. Dabei ist $\Delta u(x,t) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2}(x,t)$. Anstatt $\frac{\partial u}{\partial t}$ schreiben wir einfach u_t, also

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \Omega_T \\ u = f & \text{auf } \partial_P \Omega_T \end{cases} .$$

(10.4) ist eine lineare, parabolische Differentialgleichung. Hier legen wir nur Randwerte auf dem parabolischen Rand $\partial_P \Omega_T$ fest und **nicht** auf $\partial \Omega_T$.

Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu den Dirichletproblemen für elliptische Gleichungen. Die Wärmeleitungsgleichung beschreibt verschiedene Diffusionsprozesse, z.B. die Ausbreitung der Temperatur in Metallen.

Definition 10.1: Für $x, x_0 \in \mathbb{R}^m$, $t, t_0 \in \mathbb{R}$, $t \neq t_0$ ist der Wärmeleitungskern in (x_0, t_0) durch

$$\Lambda(x, x_0, t, t_0) := \frac{1}{(4\pi|t - t_0|)^{\frac{m}{2}}} e^{\frac{|x-x_0|^2}{4(t_0-t)}}$$

gegeben.

Bemerkung: Man rechnet leicht nach, daß $\Lambda_t = \Delta\Lambda$, d.h. Λ ist eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung. Die Bedeutung von Λ für 10.4 ist auch ähnlich wie die Bedeutung der Fundamentallösung der Laplacegleichung für jene.
Zunächst können wir auch für die Wärmeleitungsgleichung ein schwaches Maximumprinzip herleiten.

Satz 10.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt, $0 < T \leq \infty$. $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ erfülle (10.1), (10.2) und (10.3). Ferner gelte in Ω_T

$$u_t \leq \Delta u$$

Dann ist

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u = \sup_{\partial_P \Omega_T} u$$

Bemerkung: Das parabolische Maximumprinzip ist also etwas schärfer als das elliptische, da hier das Supremum sogar auf dem parabolischen Rand $\partial_P \Omega_T \neq \partial \Omega_T$ liegt.

Beweis von Satz 10.2: Wir nehmen zunächst $u_t < \Delta u$ in Ω_T an. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $0 < t_0 < T$. Wegen der Stetigkeit von u und der Kompaktheit von $\overline{\Omega}_{t_0}$ existiert dann ein $(x, t) \in \overline{\Omega}_{t_0}$ mit

$$u(x, t) = \max_{\overline{\Omega}_{t_0}} u. \tag{10.5}$$

Nun kann nicht $(x, t) \in \Omega_{t_0}$ gelten, da in einem inneren Maximum $\Delta u(x, t) \leq 0$, $\nabla u(x, t) = u_t(x, t) = 0$ gilt und dies einen Widerspruch zu $u_t < \Delta u$ bildet. Also ist $(x, t) \in \partial\Omega_{t_0}$. Wäre $x \in \Omega$, $t = t_0$, so würde (da $t_0 < T$) $\Delta u(x, t_0) \leq 0$, $u_t(x, t_0) \geq 0$ folgen und dies ist auch ein Widerspruch. Somit

$$(x, t) \in \partial_P \Omega_{t_0}\,.$$

Wir müssen uns jetzt noch von der Bedingung $u_t < \Delta u$ befreien. Ist also allgemeiner $u_t \leq \Delta u$, so setzen wir $v := u - \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$. Dann ist aber

$$v_t - \Delta v = u_t - \varepsilon - \Delta u \leq -\varepsilon < 0$$

und daher wie oben
$$\sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} v = \sup_{\partial_P \Omega_{t_0}} v$$
Andererseits ist $\sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} v = \sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} (u - \varepsilon t) \geq \sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} u - \varepsilon t_0$ und $\sup_{\partial_p \Omega_{t_0}} v \leq \sup_{\partial_P \Omega_{t_0}} u$, so daß
$$\begin{aligned} \sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} u &\leq \sup_{\overline{\Omega}_{t_0}} v + \varepsilon t_0 \\ &= \sup_{\partial_p \Omega_{t_0}} v + \varepsilon t_0 \ . \\ &\leq \sup_{\partial_p \Omega_{t_0}} u + \varepsilon t_0 \end{aligned}$$
Die Behauptung folgt für $\varepsilon \to 0$ und weil $t_0 < T$ beliebig war.

Bemerkung: Für unbeschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist die Aussage im allgemeinen falsch. Das Maximumprinzip impliziert nun die Eindeutigkeit von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Dirichletrandbedingungen auf bescränkten Mengen Ω.

Satz 10.3: u, v seien Lösungen von (10.4), $u \equiv v$ auf $\partial_P \Omega_T$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt. Dann gilt $u = v$ auf $\overline{\Omega}_T$.

Beweis: Die Wärmeleitungsgleichung ist linear. Damit erfüllen $f_1 := u - v$, $f_2 := v - u$
$$\begin{aligned} \Delta f_i &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega_T \\ f_i &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial_P \Omega_T \,, \end{aligned}$$
da die Randwerte von u und v übereinstimmen. Aus Satz 10.2 folgt daher die Behauptung.
Für unbeschränkte Mengen Ω läßt sich unter geeigneten "Wachstumsbedingungen" auch ein Maximumprinzip herleiten.

Satz 10.4: Sei $\Omega := \mathbb{R}^m$ und es sei u eine Funktion, die (10.1)-(10.3) erfüllt und für die gilt
$$\begin{aligned} u_t &\leq \Delta u && \text{in } \Omega_T \\ u(x,t) &\leq A e^{\lambda |x|^2} && \text{in } \Omega_T \text{ für } A, \lambda > 0 \\ u(x,0) &= f(x) && \text{für } x \in \Omega \,, \end{aligned}$$
wobei $f \in C^0(\mathbb{R}^m)$ gegeben sei.
Dann ist
$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u \leq \sup_{\mathbb{R}^m} f \qquad (= \sup_{\Omega} f)$$

Beweis: Es sei $0 < t_0 < T$ so gewählt, daß $t_0 < \frac{1}{4\lambda}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $t_0 + \varepsilon < \frac{1}{4\lambda}$. Für $y \in \mathbb{R}^m$, $\delta > 0$ fest sei für $0 \leq t \leq t_0$
$$v^\delta(x,t) := u(x,t) - \delta \Lambda(x, y, t, t_0 + \varepsilon).$$

Dann ist

$$v_t^\delta - \Delta v^\delta = u_t - \Delta u \le 0. \tag{10.6}$$

Auf $\Omega^r := B(y,r)$ gilt deshalb nach Satz 10.2

$$v^\delta(y,t) \le \max_{\partial_P \Omega_{t_0}^r} v^\delta. \tag{10.7}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} v^\delta(x,0) &= u(x,0) - \delta\Lambda(x,y,0,t_0+\varepsilon) \\ &\le u(x,0) \le \sup_{\mathbb{R}^m} f \end{aligned}$$

Gilt $|x-y| = r$, so ist

$$\begin{aligned} v^\delta(x,t) &= u(x,t) - \delta\Lambda(x,y,t,t_0+\varepsilon) \\ &\le Ae^{\lambda|x|^2} - \frac{\delta}{(4\pi(t_0+\varepsilon-t))^{\frac{m}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(t_0+\varepsilon-t)}} \\ &\le Ae^{\lambda(|y|+r)^2} - \frac{\delta}{(4\pi(t_0+\varepsilon))^{\frac{m}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(t_0+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

und da $t_0+\varepsilon < \frac{1}{4\lambda}$ hat der zweite Term für genügend großes r einen größeren Exponenten als der erste, so daß für genügend großes r und $\forall\ x$ mit $|x-y| = r$

$$v^\delta(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^m} f$$

und wegen (10.7) dann auch

$$v^\delta(y,t) \le \max_{\partial_P \Omega^r} v^\delta \le \sup_{\mathbb{R}^m} f.$$

Für $\delta > 0$ ist aber

$$v^\delta(y,t) = u(y,t) - \delta \frac{1}{(4\pi(t_0+\varepsilon-t))^{\frac{m}{2}}}$$

und läßt man δ gegen Null konvergieren, so ergibt sich

$$u(y,t) \le \sup_{\mathbb{R}^m} f.$$

Zerlegen wir nun das Intervall $[0,T)$ in gleichgroße Intervalle $[kt_0,(k+1)t_0)$, $k \in \mathbb{N}$, so folgt die Behauptung durch Iteration.

q.e.d.

Als nächstes betrachten wir die Fundamentallösung

$$K(x,y,t) := \Lambda(x,y,t,0) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \tag{10.8}$$

Es ist $\forall\, x \in \mathbb{R}^m,\, t > 0$

$$
\begin{aligned}
(10.9)\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t)dy &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} m\omega_m \int\limits_0^\infty e^{\frac{-r^2}{4t}} r^{m-1} dr \\
&= \frac{m\omega_m}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_0^\infty e^{-s^2} s^{m-1} ds \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-|y|^2} dy = 1\,.
\end{aligned}
$$

Für ein beschränktes, stetiges $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ betrachten wir die Faltung

$$
(10.10)\qquad u(x,t) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t) f(y) dy
$$

Lemma 10.5: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Dann ist

$$
u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t) f(y) dy
$$

von der Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^m \times (0,\infty))$ und eine Lösung von $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^m \times (0,\infty)$.

Beweis: Da $p_y(x,t) := K(x,y,t)$ für festes $y \in \mathbb{R}^m$ in $C^\infty(\mathbb{R}^m \times (0,\infty))$ liegt, folgt die Regularitätsaussage durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Dann ist insbesondere

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} K_t(x,y,t) f(y) dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Delta_x K(x,y,t) f(y) dy = \Delta_x u(x,t)\,.
\end{aligned}
$$

Es gilt aber noch mehr, nämlich

Lemma 10.6: Unter den Voraussetzungen von Lemma 10.5 gilt

$$
\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m\,.
$$

Beweis: Es ist

$$
\begin{aligned}
|f(x)-u(x,t)| &= |f(x) - \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t)f(y)dy| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t)(f(x)-f(y))dy\right| \quad \text{wegen (10.9)} \\
&= \left|\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{\frac{-r^2}{4t}} r^{m-1} \int_{S^{m-1}} (f(x)-f(x+r\zeta))d\sigma(\zeta)dr\right| \\
&= \left|\frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int_0^\infty e^{-s^2} s^{m-1} \int_{S^{m-1}} (f(x)-f(x+2\sqrt{t}s\zeta))d\sigma(\zeta)ds\right| \\
&= \left|\ldots \int_0^M \ldots + \ldots \int_M^\infty \ldots\right| \\
&\leq \sup_{y\in B(x,2\sqrt{t}M)} |f(x)-f(y)| + 2\sup_{\mathbb{R}^m} |f| \frac{m\omega_m}{\pi^{\frac{m}{2}}} \int_M^\infty e^{-s^2} s^{m-1} ds
\end{aligned}
$$

Wir wählen nun zu $\varepsilon > 0$, M so groß, daß der zweite Summand kleiner ist als $\frac{\varepsilon}{2}$ und danach t_0 so klein, daß $\forall\ 0 < t < t_0$ der erste Summand ebenfalls kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Daraus folgt die Konvergenz. Insgesamt erhalten wir also durch die Faltung eine Lösung von

$$
\begin{array}{rcll}
u_t(x,t) &=& \Delta u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^m \times (0,\infty) \\
u(x,0) &=& f(x) & x \in \mathbb{R}^m
\end{array}.
$$

Nach Satz (10.4) ist dies auch die einzige Lösung mit höchstens exponentiellem Wachstum.
Für ein beliebiges, beschränktes f gilt $\forall\ x, z$

$$
|u(x,t)-u(z,t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^m} |f| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|z-y|^2}{4t}} \right| dy
$$

und da die rechte Seite für $t \to \infty$ gegen Null konvergiert, konvergiert die Oszillation von u für $t \to \infty$ gegen Null. Da aber u nach dem Maximumprinzip auch beschränkt ist, folgt, daß u für $t \to \infty$ gegen eine Konstante konvergiert. Ist f eine Funktion mit kompaktem Träger, so muß diese Konstante verschwinden, d.h. u konvergiert gegen Null, denn

$$
|u(x,t)| \leq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{\operatorname{dist}(x,K)^2}{4t}} \int_K |f(y)|dy
$$

mit $\overline{\operatorname{supp}\ f} \subset K$ und die rechte Seite konvergiert gegen Null für $t \to \infty$.
Wir wenden uns jetzt dem Dirichletproblem für die Wärmeleitungsgleichung zu. Wegen Satz 10.3 können wir nicht die Existenz einer Lösung mit vorgeschriebenen Randwerten auf $\partial\Omega_T$ erwarten, da schon die Randwerte auf $\partial_P\Omega_T$ die Lösung eindeutig festlegen.
Sei also $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt, $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega \times (0,T))$ gegeben mit $0 < T \leq \infty$.

Wir suchen dann eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 && \text{in } \Omega_T \\ u(x,0) &= f(x) && \forall\ x \in \Omega \\ u(x,t) &= g(x,t) && \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

Dabei soll u stetig bis zum Rand sein, d.h. wir fordern $u \in C^0(\overline{\Omega}_T)$. Damit dies überhaupt möglich ist, müssen f und g zusammenpassen, d.h. es muß die Verträglichkeits- oder Kompatibilitätsbedingung

(10.11) $$f(x) = g(x,0)\ ,\ f \in C^0(\overline{\Omega})\ ,\ g \in C^0(\partial\Omega \times [0,T))$$

gelten.
Wir interessieren uns für das Verhalten der Dirichlet-Energie

$$E(u(\cdot,t)) := \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |Du(\cdot,t)|^2 dx.$$

Es ist

$$\begin{aligned} E_t &= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m u_i u_{it} dx \\ &= -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^m u_{ii} u_t dx + \int\limits_{\partial\Omega} u_t \langle Du, \nu\rangle d\sigma \end{aligned}$$

mit der äußeren Normalen ν und dem Volumenelement $d\sigma$ auf $\partial\Omega$. Nun ist $u_t(x) = g_t(x)\ \forall\ x \in \partial\Omega$ und somit verschwinden die Randterme, wenn wir $g(x,t) = g(x,0)\ \forall\ t > 0$ annehmen. Wir wollen dies im folgenden so voraussetzen und haben demnach bereits gezeigt, daß

(10.12) $$E_t = -\int\limits_\Omega \Delta u u_t dx = -\int\limits_\Omega (u_t)^2 dx \le 0.$$

Die 2. Variation von E kann man auch leicht berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} E_{tt} &= -\int\limits_\Omega (u_t^2)_t dx \\ &= -2\int\limits_\Omega u_{tt} u_t dx \\ &= -2\int\limits_\Omega u_t \Delta u_t dx \\ &= -\int\limits_\Omega (\Delta u_t^2 - 2|Du_t|^2) dx \\ &= -\int\limits_{\partial\Omega} \langle Du_t^2, \nu\rangle d\sigma + 2\int\limits_\Omega |Du_t|^2 dx \end{aligned}$$

Da aber $u_t^2(x,t) = 0\ \forall\ x \in \partial\Omega$, folgt wegen $u_t^2 \ge 0$ noch $\langle Du_t^2, \nu\rangle \le 0$ auf $\partial\Omega$. Demnach gilt

(10.13) $$E_{tt} \ge 0\,.$$

Die Energie E ist also als Funktion von t eine monoton fallende und konvexe Funktion. Außerdem ist E beschränkt, da nichtnegativ.

Falls nun eine Lösung $\forall\, t$ existiert, d.h. falls $T = \infty$, so setzen wir

$$C := \lim_{t\to\infty} E_t(u(\cdot,t))$$

Wegen (10.12) ist $C \leq 0$. Da aber wegen der Konvexität von E auch

$$\begin{aligned} E(u(\cdot,\tau)) &= E(u(\cdot,0)) + \int_0^\tau E_t(u(\cdot,t))dt \\ &\leq E(u(\cdot,0)) + c\tau \end{aligned}$$

gilt, muß $C = 0$ gelten, da sonst, für genügend großes τ, $E(u(\cdot,\tau))$ negativ würde. Daher ist im Fall $T = \infty$, $g(x,t) = g(x)\ \forall\, t, \Omega$ offen und beschränkt für eine Lösung u die Aussage

$$\lim_{t\to\infty} \int_\Omega u_t^2 dx = 0$$

erfüllt. u_t konvergiert also in $L^2(\Omega)$ gegen 0. Es gilt aber sogar punktweise Konvergenz. Es sei hierzu $\phi \in C^0(\mathbb{R}^m)$ eine beliebige Funktion mit

$$\begin{aligned} \phi(x) &= u_t^2(x,0) \quad \forall\, x \in \Omega \\ \phi(x) &\geq 0 \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

und ϕ habe außerdem kompakten Träger. Wir betrachten die Faltung von ϕ, d.h.

$$\begin{aligned} v(x,t) &:= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{m}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \phi(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} K(x,y,t)\phi(y)dy\,. \end{aligned}$$

Wir wissen schon, daß

$$\begin{aligned} v_t &= \Delta v \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^m \times (0,\infty) \\ v(x,0) &= \phi(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

und weil $\phi \geq 0$, ist auch $v(x,t) \geq 0\ \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^m \times [0,\infty)$. Da wir $g(x,t) = g(x)$ voraussetzen, ist $u_t(x,t) = 0\ \forall\, x \in \partial\Omega,\ \forall\, t \geq 0$. Somit ist auch insbesondere

$$v(x,t) \geq u_t^2(x,t) \qquad \forall\, x \in \partial\Omega \times [0,\infty).$$

Da $v(x,0) = u_t^2(x,0)\ \forall\, x \in \Omega$, gilt für die Funktion $w(x,t) := v(x,t) - u_t^2(x,t)$

$$w \geq 0 \quad \text{auf} \quad \partial_P\Omega_{(0,\infty)}.$$

Andererseits

$$\begin{aligned} w_t - \Delta w &= v_t - \Delta v - ((u_t^2)_t - \Delta u_t^2) \\ &= 2|Du_t|^2 \geq 0 \end{aligned}.$$

Nach Satz 10.2 somit

$$w \geq 0 \quad \text{auf} \quad \overline{\Omega} \times [0,\infty)$$

also

$$v(x,t) \geq u_t^2(x,t) \quad \text{auf} \quad \overline{\Omega} \times [0,\infty). \tag{10.14}$$

Da ϕ kompakten Träger besitzt, konvergiert die Faltung für $t \to \infty$ gegen Null und somit nach (10.14) auch $u_t^2(x,t)$. Dies beweist die punktweise Konvergenz.

Kann man nun zeigen, daß die Lösung des Anfangswertproblems mit zeitlich konstanten Randwerten g für $t \to \infty$ in $C^2(\Omega)$ konvergiert, so muß die Limesfunktion u_∞ die Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta u_\infty &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u_\infty &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

erfüllen. Sie löst also das Dirichletproblem für harmonische Funktionen. Diese Methode ist äußerst fruchtbar, um Lösungen elliptischer Gleichungen durch eine parabolische Gleichung zu generieren, d.h. sucht man allgemeiner eine Lösung u des elliptischen Dirichletproblems

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit einem elliptischen Operator L, so kann man diese oft durch die Limesfunktion u_∞ des Flusses

$$\begin{aligned} u_t &= Lu && \text{in } \Omega_T \\ u(x,t) &= g(x) && \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

gewinnen. Dabei läßt sich die Lösung oft schon durch die Anfangsdaten u_0 kontrollieren.

Allgemeiner haben wir folgenden Satz:

Satz 10.7: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen und beschränkt. Es seien Funktionen $g \in C^0(\partial\Omega \times (0,\infty))$, $g_\infty \in C^0(\partial\Omega)$, $k \in C^0(\Omega \times (0,\infty))$, $k_\infty \in C^0(\Omega)$ gegeben, so daß

$$\lim_{t\to\infty} g(x,t) = g(x) \qquad \text{gleichmäßig auf } \partial\Omega \tag{10.15}$$

$$\lim_{t\to\infty} k(x,t) = k(x) \qquad \text{gleichmäßig auf } \Omega \tag{10.16}$$

erfüllt ist. u sei eine Lösung von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + k & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u = g & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\infty) \end{cases} \tag{10.17}$$

und v eine Lösung von

$$\begin{cases} \Delta v + k_\infty = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ v = g_\infty & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{10.18}$$

Dann gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x) \qquad \text{gleichmäßig auf } \Omega\,.$$

Beweis: Wir betrachten die Differenz

$$w(x,t) := u(x,t) - v(x)$$

Somit ist nach Voraussetzung

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = k - k_\infty & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ w = g - g_\infty & \text{auf} \quad \partial\Omega \end{cases} . \tag{10.19}$$

Wir wählen nun $r > 0$, so daß

$$x^1 < \frac{1}{2} r \qquad \forall\, x = (x^1, \dots, x^m) \in \Omega\,. \tag{10.20}$$

Dann setzen wir

$$l(x) := e^r - e^{x^1}.$$

Für l ist $\Delta l = -\Delta e^{x^1} = -e^{x^1}$ und mit $\lambda := \inf_{x\in\Omega} e^{x^1}$ ist

$$\Delta l \leq -\lambda. \tag{10.21}$$

Sei $l_{\text{inf}} := \inf_{x\in\Omega} l(x)$, $l_{\text{sup}} := \sup_{x\in\Omega} l(x)$ und für $t \geq \tau$ sei

$$d(x,t) := \eta \frac{l(x)}{\lambda} + \eta \frac{l(x)}{l_{\text{inf}}} + c \frac{l(x)}{l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}(t-\tau)}}$$

für noch zu wählende Konstanten $\eta, c, \tau > 0$ (man beachte, daß wegen (10.20) $l_{\text{inf}} > 0$ gilt). Dann ist

$$\begin{aligned} d_t - \Delta d &= -\tfrac{c\lambda}{l_{\text{sup}} l_{\text{inf}}} l(x) e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}(t-\tau)}} \\ &\quad -\eta \left(\tfrac{1}{\lambda} + \tfrac{1}{l_{\text{inf}}} + \tfrac{c}{\eta l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}(t-\tau)}} \right) \Delta l \\ &> \eta + \eta \tfrac{\lambda}{l_{\text{inf}}} + \tfrac{c\lambda}{l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}}(t-\tau)} \\ &\quad -\tfrac{c\lambda}{l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}}(t-\tau)} \end{aligned}$$

also

$$d_t - \Delta d > \eta. \tag{10.22}$$

Für $x \in \Omega$ ist ferner

$$d(x,\tau) = \frac{\eta l(x)}{\lambda} + \frac{\eta l(x)}{l_{\text{inf}}} + c \frac{l(x)}{l_{\text{inf}}} > c \tag{10.23}$$

und für $x \in \partial\Omega$, $t \geq \tau$

$$d(x,\tau) > \eta. \tag{10.24}$$

Nach Voraussetzung (10.15) + (10.16) existiert zu jedem $\eta > 0$ ein $\tau = \tau(\eta)$ mit

$$(10.25) \qquad \begin{cases} |g(x,t) - g_\infty(x)| < \eta & \text{für} \quad x \in \partial\Omega, t \geq \tau \\ |k(x,t) - k_\infty(x)| < \eta & \text{für} \quad x \in \Omega, t \geq \tau \end{cases}$$

Wir setzen nun in der Definition von d die Konstanten $\tau := \tau(\eta)$ sowie $c := \sup\limits_{x \in \Omega} |w(x,\tau)|$ ein. Dann ist wegen (10.23)

$$d(x,\tau) \pm w(x,\tau) \geq 0 \qquad \text{für } x \in \Omega$$

und

$$d(x,t) \pm w(x,t) \geq 0 \qquad \text{für } x \in \partial\Omega, t \geq \tau$$

wegen (10.24), (10.19) und (10.25). Außerdem

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)(d(x,t) \pm w(x,t)) \geq 0$$

wegen (10.22), (10.19) und (10.25).
Aus dem Maximumprinzip (Satz 10.2; es ist unwesentlich, daß wir hier bei $t_0 = \tau$ starten und nicht bei $t_0 = 0$) folgt dann

$$d(x,t) \pm w(x,t) \geq 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau, \infty)\,,$$

also

$$\begin{aligned} |w(x,t)| &\leq d(x,t) \\ &\leq \eta\left(\frac{l_{\text{sup}}}{\lambda} + \frac{l_{\text{sup}}}{l_{\text{inf}}}\right) + c\frac{l_{\text{sup}}}{l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}}(t-\tau)} \ . \end{aligned}$$

Wählt man daher zu $\varepsilon > 0$, $\eta := \frac{\varepsilon}{2}\frac{\lambda + l_{\text{inf}}}{l_{\text{sup}}}$ und nach Wahl von c, τ wie oben schließlich $t_0 > \tau$ so groß, daß $c\frac{l_{\text{sup}}}{l_{\text{inf}}} e^{-\frac{\lambda}{l_{\text{sup}}}(t_0-\tau)} < \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt $\forall\ t > t_0$ und $\forall\ x \in \Omega$

$$|w(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

q.e.d.

Wir kommen nun zum Anfangs-Randwertproblem und der Darstellungsformel. $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei offen, beschränkt und so gewählt, daß der Divergenzsatz erfüllt ist. Ist u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und v eine Lösung der rückwertigen Wärmeleitungsgleichung, d.h. gilt:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \Omega_T \\ v_t &= -\Delta v \quad \text{in } \Omega_T \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Omega_T} v(u_t - \Delta u)dxdt = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^T v(x,t)u_t(x,t)dtdx \\
&\quad - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} v(x,t)\Delta u(x,t)dxdt \\
&= \int\limits_{\Omega}\big(v(x,T)u(x,T) - v(x,0)u(x,0) - \int\limits_0^T v_t(x,t)u(x,t)dt\big)dx \\
&\quad - \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \Delta v \cdot udxdt - \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \left(v\tfrac{\partial u}{\partial\nu} - u\tfrac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma dt\,,
\end{aligned}$$

wobei hier ν natürlich die äußere Einheitsnormale und $d\sigma$ das Volumenmaß auf $\partial\Omega$ ist.
Da aber $v_t = -\Delta v$, ist dies somit

$$= \int\limits_{\Omega\times\{T\}} vudx - \int\limits_{\Omega\times\{0\}} vudx - \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)d\sigma dt.$$

Setzt man $v(x,t) := \Lambda(x,y,T+\varepsilon,t)$, so ist wegen

$$\Lambda(x,y,T+\varepsilon,t) = \frac{1}{(4\pi|T+\varepsilon-t|)^{\frac{m}{2}}}e^{\frac{|x-y|^2}{4(t-T-\varepsilon)}}$$

$v_t = -\Delta v$ und man erhält

$$\int\limits_{\Omega\times\{T\}} \Lambda udx = \int\limits_{\Omega\times\{0\}} \Lambda udx + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \Lambda\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial\Lambda}{\partial\nu}d\sigma dt.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen $u(y,T)$ und dann folgt für $\varepsilon \to 0$ aus obiger Formel

$$\begin{aligned}
(10.26) u(y,T) &= \int\limits_{\Omega}\Lambda(x,y,T,0)u(x,0) + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega}\Lambda(x,y,T,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu} \\
&- \quad u(x,t)\frac{\partial\Lambda(x,y,T,t)}{\partial\nu}d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Leider löst diese Formel nicht das Anfgangswertproblem, da noch normale Ableitungen von u auftreten.

Lemma 10.8: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei beschränkt, von der Klasse C^2 mit äußerer Einheitsnormalen ν. $\gamma \in C^0(\partial\Omega\times[0,T])$, $T>0$ gegeben. Mit

$$v(x,t) := -\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial K(x,y,\tau)}{\partial\nu_y}\gamma(y,t-\tau)d\sigma(y)d\tau$$

gilt

a) $v \in C^\infty(\Omega\times[0,T])$

b) $v(x,0) = 0, \forall\, x \in \Omega$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} v(x,t) = \frac{\gamma(x_0,t)}{2} - \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial K(x_0,y,\tau)}{\partial \nu_y}\gamma(y,t-\tau)d\sigma(y)d\tau$
$\forall\, x_0 \in \partial\Omega,\ 0 < t \le T.$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu_y}K(x,y,\tau) &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{m}{2}}}\frac{\partial}{\partial\nu_y}e^{\frac{-|x-y|^2}{4\tau}}\\ &= \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{m}{2}}}\frac{\langle x-y,\nu\rangle}{2\tau}e^{\frac{-|x-y|^2}{4\tau}}\end{aligned}$$

und daher existiert zunächst $v(x,t)\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, t \in [0,T]$, denn für $\tau \to 0$ fällt $e^{-\frac{|x-y|^2}{4\tau}}$ schneller gegen Null ab als $\frac{1}{\tau^{\frac{m}{2}+1}}$ gegen ∞ konvergiert. Die Regularität folgt aus der Regularität des Kerns, b) ist auch klar. Es bleibt noch, die Sprungrelation c) nachzuweisen.
Dafür reicht es offenbar aus, die Sprungrelation

$$-\lim_{x\to x_0}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x,y,\tau)\gamma(y,t-\tau)d\sigma d\tau$$

$$= \frac{\gamma(x_0,t)}{2} - \int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x_0,y,\tau)\gamma(y,t-\tau)d\sigma d\tau$$

für beliebig kleine $\delta, \tau_0 > 0$ zu beweisen. Wählt man für $\varepsilon > 0$ ein δ, τ_0 so, daß $\forall\, y \in \partial\Omega$ mit $|y - x_0| < \delta$ und $\forall\, \tau$ mit $0 \le \tau < \tau_0$ die Abschätzung

$$|\gamma(x_0,t) - \gamma(y,t-\tau)| < \varepsilon$$

gilt (dies ist wegen der Stetigkeit von γ möglich), so ist bis auf einen Störterm der Ordnung ε also nur

$$-\lim_{x\to x_0}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x,y,\tau)\gamma(x_0,t)d\sigma d\tau$$

$$= \frac{\gamma(x_0,t)}{2} - \int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x_0,y,\tau)\gamma(x_0,t)d\sigma d\tau$$

nachzuweisen. Da $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x_0,y,\tau)\gamma(x_0,t)d\sigma d\tau = 0$ müssen wir aber nur noch

$$-\lim_{\substack{x\to x_0\\ \delta\to 0}}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)}\frac{\partial K}{\partial\nu_y}(x,y,\tau)d\sigma d\tau = \frac{1}{2}$$

zeigen.

Da γ auf dem Rand stetig ist, reicht es zudem aus, x_0 durch Folgen $x \in \Omega$ zu approximieren, die in normaler Richtung verlaufen, d.h. wir betrachten die Werte $x \in \Omega$ für die ein $\mu = 0$ existiert mit

$$x_0 - \mu\nu_y = x$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |y - x_0 + \mu\nu|^2 \\ &= |y-x_0|^2 + \mu^2 + 2\mu\langle \nu, y - x_0\rangle \end{aligned} .$$

Da $\forall\ y \in \partial\Omega$ mit $|y - x_0| < \delta$ auch

$$|2\mu\langle \nu, y - x_0\rangle| < 2\mu\delta$$

ist, kann der Term $2\mu\langle \nu, y - x_0\rangle$ beim Grenzübergang $\delta \to 0$ vernachlässigt werden. Ebenso ist

$$\begin{aligned} \langle x-y, \nu_y\rangle &= \langle x - x_0, \nu_y\rangle + \langle x_0 - y, \nu_y\rangle \\ &= -\mu + \langle x_0 - y, \nu_y\rangle \end{aligned}$$

und $|\langle x_0 - y, \nu_y\rangle| < \delta$.
Wir approximieren daher

$$\frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x,y,\tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{m}{2}}} \frac{\langle x-y, \nu_y\rangle}{2\tau} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\tau}}$$

durch

$$\frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{m}{2}}} \frac{(-\mu)}{2\tau} e^{\frac{-|x-y|^2}{4\tau}} e^{\frac{-\mu^2}{4\tau}} .$$

Somit haben wir den folgenden Ausdruck zu berechnen

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \mu\to 0}} \int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)} \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{m}{2}}} \frac{\mu}{t^{\frac{m}{2}+1}} e^{\frac{-|x_0-y|^2}{4\tau}} e^{\frac{-\mu^2}{4\tau}} d\sigma(y) d\tau$$

Dazu führen wir Polarkoordinaten mit Zentrum x_0 ein.
Dann ist bis auf einen Fehlerterm niedriger Ordnung

$$\int\limits_0^{\tau_0} \int\limits_{\partial\Omega\cap B(x_0,\delta)} \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{\mu}{\tau^{\frac{m}{2}+1}} e^{\frac{-|x_0-y|^2}{4\tau}} e^{\frac{-\mu^2}{4\tau}} d\sigma(y) d\tau =$$

$$= \frac{\mu}{2(4\pi)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{vol}(S^{m-2}) \int\limits_0^{\tau_0} \frac{1}{\tau^{\frac{m}{2}+1}} e^{\frac{-\mu^2}{4\tau}} \int\limits_0^{\delta} e^{\frac{-r^2}{4\tau}} r^{m-2} dr d\tau ,$$

wobei S^{m-2} die Einheitssphäre des $\mathbb{R}^{m-1}$ ist.
Wir transformieren mit $s^2 = \frac{r^2}{4\tau}$ und es ergibt sich

$$= \frac{\mu \mathrm{vol}(S^{m-2})}{4\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_0^{\tau_0} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{-\mu^2}{4\tau}} \int\limits_0^{\frac{\delta}{2\sqrt{\tau}}} e^{-s^2} s^{m-2} ds d\tau$$

$$= \frac{\mathrm{vol}(S^{m-2})}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{\frac{\mu^2}{4\tau_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{-\sigma} \int\limits_{0}^{\frac{\delta\sqrt{\sigma}}{\mu}} e^{-s^2} s^{m-2} ds d\sigma$$

In diesem Integral lassen wir μ gegen Null streben und erhalten als Limes

$$\frac{\mathrm{vol}(S^{m-2})}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{0}^{\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\sigma} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s^2} s^{m-2} ds d\sigma.$$

Wir erinnern noch an die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad \text{für } x > 0.$$

Damit ist $\int\limits_0^\infty e^{-s^2} s^n = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \forall x > 0$$
$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\sigma} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s^2} s^{m-2} ds d\sigma = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}).$$

Da $\mathrm{vol}(S^{m-2}) = \frac{2\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m-1}{2})}$, folgt

$$\frac{\mathrm{vol}(S^{m-2})}{2\pi^{\frac{m}{2}}} \int\limits_{0}^{\infty} \sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\sigma} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-s^2} s^{m-2} ds d\sigma = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{m-1}{2})} = \frac{1}{2}$$

q.e.d.

Ähnlich kann auch folgendes Lemma bewiesen werden

Lemma 10.9: Unter den Voraussetzungen von Lemma 10.8 gilt für

$$w(x,t) := \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} K(x,y,\tau)\gamma(y,t-\tau) d\sigma(y) d\tau$$

a) $w \in C^\infty(\Omega \times [0,T])$
b) $w(x,0) = 0$ für $x \in \Omega$
c) w setzt sich stetig auf $\overline{\Omega} \times [0,T]$ fort und für $x_0 \in \partial\Omega$ ist

$$\lim_{x \to x_0} \langle \nabla w(x,t), \nu \rangle = \frac{\gamma(x_0,t)}{2} + \int\limits_{0}^{t} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial \nu}(x_0,y,\tau)\gamma(y,t-\tau) d\sigma(y) d\tau.$$

Wir wollen nun versuchen, eine Lösung u von

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in} \quad \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{für} \quad x \in \Omega \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{für} \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \tag{10.27}$$

zu konstruieren.
Sei hierzu $\gamma(x,t)$ eine noch zu bestimmende Funktion und wir machen den Ansatz

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x,y,t-\tau)\gamma(y,\tau)d\sigma(y)d\tau.$$

Da auf dem Rand $u(x_0,t) = g(x_0,t)$ gelten soll, folgt nach dem Lemma 10.8

$$g(x_0,t) = \frac{\gamma(x_0,t)}{2} - \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x_0,y,t-\tau)\gamma(y,\tau)d\sigma(y)d\tau.$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung für γ, d.h. wir setzen

$$\begin{aligned} &\gamma_0(x_0,t) := 2g(x_0,t) \\ &\gamma_n(x_0,t) := 2g(x_0,t) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial K}{\partial \nu_y}(x_0,y,t-\tau)\gamma_{n-1}(y,\tau)d\sigma(y)d\tau \\ &\forall\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

und hoffen, daß dies für $n \to \infty$ konvergiert. Rekursiv erhält man aus diesem Ansatz

$$\gamma_n(x_0,t) = 2g(x_0,t) + 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^n S_k(x_0,y,t-\tau)g(y,\tau)d\sigma(y)d\tau$$

mit

$$\begin{aligned} S_1(x_0,y,t) &= 2\tfrac{\partial K}{\partial \nu_y}(x_0,y,t) \\ S_{k+1}(x_0,y,t) &= 2\int_0^t \int_{\partial\Omega} S_k(x_0,z,t-\tau)\tfrac{\partial K}{\partial \nu_y}(z,y,\tau)d\sigma(z)d\tau\ . \end{aligned}$$

Wir müssen also nachweisen, daß die Reihe

$$S(x_0,y,t) = \sum_{k=1}^\infty S_k(x_0,y,t)$$

konvergiert. Der Beweis ist nicht weiter schwierig und sei dem Hörer als Übung überlassen, die Konvergenz ist sogar absolut und gleichmäßig auf $\partial\Omega \times \partial\Omega \times [0,T]$ für jedes $T > 0$.
Daraus folgt unmittelbar

Satz 10.10: Das Anfangs-Randwertproblem auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ der Klasse C^2

$$\begin{array}{lll} u_t = \Delta u & \text{in} & \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & \text{in} & \Omega \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{auf} & \partial\Omega \times (0,\infty) \end{array}$$

mit vorgegebenem stetigen g hat eine eindeutige Lösung.

Beweis: Wegen der Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ existiert

$$\gamma(y,\tau) = 2g(y,\tau) + 2\int\limits_0^\tau \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y,z,\tau-t) g(z,t) d\sigma(z) dt$$

und

$$u(x,t) := -\int\limits_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x,y,t-\tau)\gamma(y,\tau) d\sigma(y) d\tau$$

löst dann die Wärmeleitungsgleichung, da wir unter dem Integral wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ differenzieren dürfen. Die Randwerte werden nach Konstruktion angenommen und daß u für $t = 0$ verschwindet ist klar.

Definition 10.11: $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sei ein Gebiet. Eine Funktion $q(x,y,t)$ definiert $\forall\ x,y \in \overline{\Omega}$, $t > 0$ heißt Wärmeleitungskern von Ω, falls

a) $\frac{\partial}{\partial t} q(x,y,t) = \Delta_x q(x,y,t)$, $\forall\ x,y \in \Omega, t > 0$
b) $q(x,y,t) = 0\ \forall\ x \in \partial\Omega$
c) $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_\Omega q(x,y,t) f(x) = f(y)\ \forall\ y \in \Omega$ und alle stetigen $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Korollar 10.12: Jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ der Klasse C^2 besitzt einen Wärmeleitungskern $q(x,y,t)$, welcher bzgl. der Variablen x in $C^1(\overline{\Omega})$ liegt.

Beweis: Für $y \in \Omega$ lösen wir das Randwertproblem der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswerten 0 und Randwerten $g(x,t) = -K(x,y,t)$. Die Lösung heiße $u(x,y,t)$, also

$$\begin{cases} u_t(x,y,t) = \Delta_x u(x,y,t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,y,0) = 0 & \\ u(x,y,t) = -K(x,y,t) & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases}.$$

Wir setzen

$$q(x,y,t) := K(x,y,t) + u(x,y,t).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &q_t(x,y,t) = \Delta_x q(x,y,t) && x \in \Omega, t > 0 \\ &q(x,y,t) = 0 && x \in \partial\Omega, t > 0 \\ &\lim_{t\to 0} u(x,y,t) = 0 \end{aligned}$$

und aus letzterer Eigenschaft folgt dann auch

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\Omega} q(x,y,t) f(x) dx = f(y) \qquad \forall \text{ stetigen } f : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Prinzip von Duhamel. Es seien dazu $u, v : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen auf einem Gebiet für das der Divergenzsatz gelte. u, v seien bzgl. der räumlichen Variablen in $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und bzgl. der Zeit in $C^1([0,T])$ $\forall\ x \in \Omega$.
Es ist

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \tfrac{d}{dt}(v(x,t)u(x,T-t))dtdx \\ &= \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \left(\tfrac{d}{dt}v(x,t)u(x,T-t) + v(x,t)\tfrac{d}{dt}u(x,T-t)\right) dxdt \\ &+ \int\limits_{\Omega} (v(x,T-\varepsilon)u(x,\varepsilon) - v(x,\varepsilon)u(x,T-\varepsilon))dx \end{aligned}$$

und auch

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int\limits_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dxdt = \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u\right) d\sigma dt\,.$$

Dies ist die **Formel von Duhamel**:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int\limits_{\Omega} \big\{v(x,t)(\Delta u(x,T-t) + \tfrac{d}{dt}u(x,T-t)\big) \\ &\qquad -u(x,T-t)\left(\Delta v(x,t) - \tfrac{d}{dt}v(x,t)\right) dxdt \\ &= \int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int\limits_{\partial\Omega} \left\{\tfrac{\partial u}{\partial \nu}(y,T-t)v(y,t) - \tfrac{\partial v}{\partial \nu}(y,t)u(y,T-t)\right\} d\sigma(y)dt \\ &+ \int\limits_{\Omega} \{u(x,\varepsilon)v(x,T-\varepsilon) - u(x,T-\varepsilon)v(x,\varepsilon\}dx \end{aligned}$$

Korollar 10.13: Ist der Wärmeleitungskern $q(x,y,t)$ von Ω von der Klasse C^1 auf $\overline{\Omega}$, so ist er symmetrisch in x und y.

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned} u(x,t) &:= q(x,z,t) \\ v(x,t) &:= q(x,w,t) \end{aligned}$$

u und v lösen die Wärmeleitungsgleichung und $u(x,t) = v(x,t) = 0 \; \forall \; x \in \partial\Omega$, $t > 0$, so daß wegen $\frac{d}{dt}u(x,T-t) = -u_t(x,T-t)$ und der Formel von Duhamel für diese Funktionen

$$0 = \int_\Omega (u(x,\varepsilon)v(x,T-\varepsilon) - u(x,T-\varepsilon)v(x,\varepsilon))dx$$

folgt. Da u, v Wärmeleitungskerne sind, folgt dann

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u(x,\varepsilon)v(x,T-\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int q(x,z,\varepsilon)v(x,T-\varepsilon) \\ &= v(z,T) = q(z,w,T) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u(x,T-\varepsilon)v(x,\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u(x,T-\varepsilon)q(x,w,\varepsilon) \\ &= u(w,T) = q(w,z,T) \end{aligned}$$

$\forall \; w, z \in \Omega$.

q.e.d.

11. Kapitel: Parabolische Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, wobei in einigen Fällen $\partial M = \phi$ angenommen werden wird.
Hierbei sei der Einfachheit halber stets

$$\begin{aligned} \overline{M} &= M \cup \partial M \\ M &= \overline{M} \setminus \partial M, M \text{ offen}, \dim(M) = m\,. \end{aligned}$$

Ist $(0,T) \subset \mathbb{R}$ ein Zeitintervall, so setzen wir

$$\begin{aligned} M_T &:= M \times (0,T) \\ \partial_P M_T &:= (\overline{M} \times \{0\}) \cup (\partial M \times [0,T]) \end{aligned}$$

Ist $u : M_T \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $u \in C^2(M) \cap C^1((0,T)) =: C^{2;1}(M_T)$, so können wir parabolische Differentialgleichungen für u auf M betrachten, d.h. ist

$$F(x,t,u,\nabla u,\nabla^2 u)$$

ein elliptischer Operator $\forall \; t$, so ist

$$u_t = F(x,t,u,\nabla u,\nabla^2 u)$$

eine parabolische Differentialgleichung. Ähnlich wie im letzten Kapitel für die Wärmeleitungsgleichung im $\mathbb{R}^m$, betrachtet man auch hier die Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme. Dabei ist u eine Lösung des Dirichletproblems falls

$$u_t = F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) \qquad \text{in } M_T \tag{11.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \forall\, x \in M \tag{11.2}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \qquad \forall\, x \in \partial M, \forall\, t \in (0,T) \tag{11.3}$$

f und g sind dann die Start- bzw. Randwerte und oft ist es notwendig, daß man die Verträglichkeitsbedingung

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{t\to 0} g(x_0,t) \qquad \forall\, x_0 \in \partial M \tag{11.4}$$

fordert und daß $f \in C^0(\overline{M})$, $g \in C^0(\partial M \times [0,t))$.
Bei Neumann-Randbedingungen ersetzt man (11.3) durch

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t) \qquad \forall\, x \in \partial M,\ \forall\, t \in (0,t), \tag{11.5}$$

wobei ν hier der äußere Einheitsnormalenvektor an ∂M ist. Ferner ist hierfür offenbar $u \in C^1(\overline{M})$ $\forall\, t \in (0,T)$ sinnvoll. Oft betrachtet man quasilineare Gleichungen der Form

$$u_t = a^{ij}(x,t,u,\nabla u)\nabla_i\nabla_j u + b^i(x,t,u)\nabla_i u + c(x,t)u + d(x,t)$$

mit einem positiv definiten, symmetrischen Tensor $a^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$, der

$$a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \forall\, \xi \in TM$$

erfüllt ($\lambda > 0$).
Das wichtigste Beispiel für eine parabolische Differentialgleichung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist wieder die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u\,,$$

wobei hier $\Delta u = g^{ij}\nabla_i\nabla_j u$ der Laplace-Beltrami Operator ist. Auch auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten kann man Wärmeleitungskerne definieren und vielfach deren Existenz nachweisen. Ohne Beweis erwähnen wir folgende fundamentale Theoreme:

Satz 11.1: Es sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein Wärmeleitungskern

$$q(x,y,t) \in C^\infty(M \times M \times (0,\infty))$$

mit

a) $q_t(x,y,t) = \Delta_x q(x,y,t) \qquad \forall\, x,y \in M, \forall\, t \in (0,\infty)$
b) $q(x,y,t) = q(y,x,t) \qquad \forall\, x,y \in M, \forall\, t \in (0,\infty)$
c) $\lim\limits_{t\to 0} \int q(x,y,t)f(x)dx = f(y)$ $\forall$ stetigen $f : M \to \mathbb{R}$ mit supp $f \Subset M$ und $\forall\, y \in M$.

Satz 11.2: Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\{f_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ eine L^2-Orthonormalbasis bestehend aus Eigenfunktion des Δ-Operators, d.h.

$$\Delta f_i = -\lambda_i f_i \qquad \forall\, i\,,$$

mit $\lambda_i = i$-ter Eigenwert des Δ-Operators. Dann ist der Wärmeleitungskern $q(x,y,t)$ durch

$$q(x,y,t) = \sum_i e^{-\lambda_i t} f_i(x) f_i(y)$$

gegeben und es ist

$$\sum_i e^{-\lambda_i t} = \int_M q(x,x,t) d\mu(x).$$

Außerdem haben wir die folgende Version des Maximumprinzips

Satz 11.3: (M,g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und $\overline{M}$ sei kompakt. u sei eine Lösung von

$$u_t \leq a^{ij}(x,t,u,\nabla u)\nabla_i\nabla_j u + b^i(x,t,u)\nabla_i u + c(x,t)u \tag{11.6}$$

mit $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq \tilde{\lambda}|\xi|^2$, $\tilde{\lambda} > 0$, $\forall\ \xi \in TM$ und c sei stetig, d.h. $c \in C^0(\overline{M}_T)$. Ferner sei u stetig auf $\partial_P M_T$ und

$$u(x,t) < 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \partial_P M_T \tag{11.7}$$

Dann gilt

$$u(x,t) < 0 \qquad \forall\ (x,t) \in \overline{M}_T \tag{11.8}$$

Beweis: Es sei $0 < t_0 < T$. Wir wählen $\lambda > 0$ so, daß

$$\lambda + c(x,t) > 0 \qquad \forall\, (x,t) \in \overline{M_{t_0}} \tag{11.9}$$

Dies ist wegen der Stetigkeit von c und der Kompaktheit von $\overline{M_{t_0}}$ möglich. Dann wählen wir $\varepsilon > 0$, so daß

$$v(x,t) := u(x,t) + \varepsilon e^{-\lambda t} < 0 \quad \forall\ (x,t) \in \partial_P M_{t_0} \tag{11.10}$$

Dies ist wegen (11.7) und der Kompaktheit von $\overline{M_{t_0}}$ möglich.
v erfüllt dann in M_{t_0}

$$\begin{aligned} v_t &= u_t - \lambda\varepsilon e^{-\lambda t} \\ &\leq a^{ij}\nabla_i\nabla_j v + b^i\nabla_i v + cv - (\lambda + c)\varepsilon e^{-\lambda t}\,. \end{aligned}$$

Würde nun ein $(x,t) \in \overline{M_{t_0}}$ mit $v(x,t) = 0$ existieren, so müßte wegen (11.10) $(x,t) \in M_{t_0}$ gelten und wegen der Kompaktheit von $\overline{M_{t_0}}$ existiert dann auch ein erster Zeitpunkt $0 < s \leq t_0$ und ein $x_0 \in M$ mit $v(x_0,s) = 0$. In diesem Punkt liegt dann ein inneres Maximum und daher wäre dort auch $v_t \geq 0$, $\nabla v = 0$, $\nabla^2 v \leq 0$, so daß

$$0 \leq v_t(s,x_0) \leq -(\lambda + c)\varepsilon e^{-\lambda t} < 0$$

wegen (11.9) zu einem Widerspruch führt.
Daher gilt in $\overline{M_{t_0}}$

$$v(x,t) < 0$$

und dann auch

$$u(x,t) = v(x,t) - \varepsilon e^{-\lambda t} < 0.$$

Da $t_0 < T$ beliebig war folgt die Behauptung

q.e.d.

Wir wollen uns nun der Wärmeleitungsgleichung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit zuwenden.
Es sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $u : M \times [0,T)$, $T \leq \infty$, sei eine positive Lösung von

$$u_t = \Delta u \qquad \text{in} \quad M_T$$

Wir definieren

$$f := \log u$$

Dann ist $\nabla f = \frac{\nabla u}{u}$, $\Delta f = \frac{\Delta u}{u} - \frac{|\nabla u|^2}{u^2} = f_t - |\nabla f|^2$, also

$$f_t = \Delta f + |\nabla f|^2. \tag{11.11}$$

Wir definieren eine neue Funktion

$$p := t(|\nabla f|^2 - cf_t)$$

mit einer Konstanten $c \geq 1$.
Als erstes berechnen wir die Evolutionsgleichung für p. Es ist

$$p_t = \frac{p}{t} + 2t\langle \nabla f, \nabla f_t \rangle - ctf_{tt} \tag{11.12}$$

und

$$\Delta p = t\Delta |\nabla f|^2 - ct\Delta f_t\,,$$

somit

$$\Delta p = 2t\langle \nabla f, \Delta \nabla f \rangle + 2t|\nabla^2 f|^2 - ct(\Delta f)_t. \tag{11.13}$$

Zusätzlich gilt

$$(\Delta f)^2 \leq m|\nabla^2 f|^2 \tag{11.14}$$

und

$$\langle \nabla f, \Delta \nabla f \rangle = \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f). \tag{11.15}$$

(11.11) in (11.13) ergibt

$$\begin{aligned} \Delta p &= 2t(\langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)) \\ &\quad + 2t|\nabla^2 f|^2 - ct(f_t - |\nabla f|^2)_t \\ &= 2t|\nabla^2 f|^2 + 2t\langle \nabla f, \nabla(f_t - |\nabla f|^2)\rangle \\ &\quad + 2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) - ct(f_t - |\nabla f|^2)_t \end{aligned}$$

und mit (11.12)

$$\begin{array}{rcl} p_t - \Delta f & = & \frac{p}{t} + 2t\langle \nabla f, \nabla f_t \rangle - ctf_{tt} \\ & & -2t|\nabla^2 f|^2 - 2t\langle \nabla f, \nabla(f_t - |\nabla f|^2)\rangle \\ & & -2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + ct(f_t - |\nabla f|^2)_t \\ & = & \frac{p}{t} + (1-c)t|\nabla f|_t^2 - 2t|\nabla^2 f|^2 - 2t\langle \nabla f, \nabla(f_t - |\nabla f|^2)\rangle \\ & & -2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \\ & = & \frac{p}{t} - 2t|\nabla^2 f|^2 - 2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + 2t\langle \nabla f, \nabla(|\nabla f|^2 - cf_t)\rangle \\ & = & 2\langle \nabla f, \nabla p\rangle + \frac{p}{t} - 2t|\nabla^2 f|^2 - 2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \end{array}.$$

Mit (11.14) können wir dies abschätzen, nämlich

$$-2t|\nabla^2 f|^2 \le \frac{-2t}{m}(\Delta f)^2 = \frac{-2t}{m}(f_t - |\nabla f|^2)^2,$$

so daß

$$p_t \le \Delta p + 2\langle \nabla f, \nabla p\rangle + \frac{p}{t} - \frac{2t}{m}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 - 2t\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Damit haben wir folgendes Lemma bewiesen:

Lemma 11.4: (M, g) sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ric $\ge -K$. Dann gilt für positive Lösungen u von $u_t = \Delta u$ und $f := \log u$ für $p := t(|\nabla f|^2 - cf_t)$ die Ungleichung

$$p_t \le \Delta p + 2\langle \nabla f, \nabla p\rangle + \frac{p}{t} - \frac{2t}{m}(|\nabla f|^2 - f_t)^2 + 2tK|\nabla f|^2. \tag{11.16}$$

Das letzte Lemma werden wir nun benutzen, um Gradientenabschätzungen für positive Lösungen der Wärmeleitungsgleichung herzuleiten.

Satz 11.5: Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ric ≥ 0, u eine positive Lösung von

$$u_t = \Delta u \quad \text{in} \quad M \times (0, T).$$

Weiter sei entweder $\partial M = \phi$ oder ∂M konvex (d.h. die 2te Fundamentalform von ∂M ist positiv definit) und u erfülle die Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial M \times (0, T)\,.$$

Dann gilt die Gradientenabschätzung

$$|\nabla \log u|^2 - (\log u)_t \le \frac{m}{2t}.$$

Beweis: Wir wählen $c = 1$ in Lemma 11.4 und erhalten wegen $K = 0$ die Ungleichung

$$p_t \le \Delta p + 2\langle \nabla p, \nabla f\rangle + \frac{p}{t} - \frac{2t}{m}(\frac{p}{t})^2.$$

Außerdem ist $|\nabla \log u|^2 - (\log u)_t = |\nabla f|^2 - f_t = \frac{p}{t}$, so daß wir nur $p \leq \frac{m}{2}$ nachweisen müssen. Da p aber

$$p_t \leq \Delta p + 2\langle \nabla p, \nabla f\rangle + \frac{2p}{tm}(\frac{m}{2} - p)$$

erfüllt, können wir das Maximumprinzip anwenden. Wir unterscheiden dazu die Fälle $\partial M \neq \emptyset$ und $\partial M = \emptyset$. Ist $\partial M = \emptyset$, so sind wir fertig, falls $p \leq \frac{m}{2}$ $\forall\ (x,t) \in \overline{M}_T$. Andernfalls existiert ein $0 < t_0 \leq T$ mit $t_0 < \infty$ und $\max\limits_{\overline{M}_{t_0}} p > \frac{m}{2}$. Sei $(\tilde{x},\tilde{t}) \in \overline{M}_{t_0}$ ein Punkt mit $p(\tilde{x},\tilde{t}) = \max\limits_{\overline{M}_{t_0}} p$. Da $\partial M = \emptyset$ und $p(x,0) = 0$ muß $\tilde{t} > 0$ gelten und $(\tilde{x},\tilde{t})$ ein inneres Maximum sein. Dies ist ein Widerspruch, da dort $\frac{2p}{tm}(\frac{m}{2} - p) < 0$ gilt.
Sei jetzt $\partial M \neq \phi$ und ∂M konvex, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂M. Wie oben haben wir ein Maximum in einem $(\tilde{x},\tilde{t}) \in \overline{M} \times [0,t_0]$. Ist $\tilde{x} \in M$ so folgt wie oben ein Widerspruch. Sei also $\tilde{x} \in \partial M$. Da $p_t \leq \Delta p + 2\langle \nabla p, \nabla f\rangle - \frac{2p}{mt}(p - \frac{m}{2})$, gilt das Hopfsche Randlemma, d.h. $\frac{\partial p}{\partial \nu}(\tilde{x},\tilde{t}) > 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \nu} &= t\left(\frac{\partial |\nabla f|^2}{\partial \nu} - \frac{\partial f_t}{\partial \nu}\right) \\
&= t\left(\frac{\partial |\nabla f|^2}{\partial \nu} - \underbrace{\langle \frac{\nabla u}{u}, \nu\rangle}_{=0}\right) = t\langle \nabla |\nabla f|^2, \nu\rangle \\
&= 2t\nabla^2 f(\nabla f, \nu).
\end{aligned}$$

Weil $\langle \nabla f, \nu\rangle = 0$, folgt $\nabla f \in T\partial M$ und dann $\forall\ w \in T\partial M$

$$\begin{aligned}
0 = d_w\langle \nabla f, \nu\rangle &= \langle \nabla_w \nabla f, \nu\rangle + \langle \nabla f, \nabla_w \nu\rangle \\
&= \nabla^2 f\langle w, \nu\rangle + II(\nabla f, w)
\end{aligned}$$

mit der 2. Fundamentalform II des Randes ∂M. Insbesondere

$$\nabla^2 f(\nabla f, \nu) = -II(\nabla f, \nabla f)$$

also nach Voraussetzung

$$\frac{\partial p}{\partial \nu} = 2t\nabla^2(\nabla f, \nu) = -2t\, II(\nabla f, \nabla f) < 0,$$

denn ∂M ist konvex. Dies ist aber ein Widerspruch.

q.e.d.

Satz 11.6: (Harnackungleichung)
Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric} \geq 0$ und $u : M \times (0,T) \to \mathbb{R}$ eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u\,.$$

Entweder gelte $\partial M = \phi$ oder der Rand sei konvex und u erfülle die Neumann-Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial M \times (0,T)$. Dann gilt $\forall\ x_1, x_2 \in M$ und alle

$0 < t_1 < t_2 < T$ die Ungleichung

$$u(x_1,t_1) \le u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}}, \tag{11.17}$$

wobei $m = \dim(M)$ und $d(x_1,x_2)$ der intrinsische Abstand der Punkte x_1 und x_2 voneinander ist.

Beweis: Es sei $c:[0,1]\to M$ die kürzeste Geodäte, die x_1 mit x_2 verbindet mit $c(0)=x_1$, $c(1)=x_2$.
Wir definieren eine Kurve

$$\gamma:[0,1]\to M\times(0,\infty)$$

durch

$$\gamma(s) := (c(1-s),(1-s)t_2+st_1)\,.$$

Dann ist offenbar

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= (x_2,t_2)\\ \gamma(1) &= (x_1,t_1)\end{aligned}$$

Für $f(x,t) := \log u(x,t)$ berechnet man

$$\begin{aligned}f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &= \int_0^1 \tfrac{df(\gamma(s))}{ds}ds = \int_0^1 \tfrac{d}{ds}f(c(1-s),(1-s)t_2+st_1)ds\\ &= \int_0^1\{\langle\dot c(1-s),\nabla f\rangle-(t_2-t_1)f_t\}ds\\ &\le \int_0^1\{|\dot c||\nabla f|-(t_2-t_1)f_t\}ds.\end{aligned}$$

Es ist $|\dot c| = d(x_2,x_1)$ und nach Satz 11.5 gilt

$$-f_t \le \frac{m}{2t}-|\nabla f|^2\,,$$

so daß

$$f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) \le \int_0^1 \{d(x_1,x_2)|\nabla f|+(t_2-t_1)(\frac{m}{2t}-|\nabla f|^2)\}ds.$$

Der Integrand ist ein quadratisches Polynom in $|\nabla f|$ und wird an der Stelle $|\nabla f| = \frac{d(x_1,x_2)}{2(t_2-t_1)}$ maximal und nimmt dort den Wert

$$\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\frac{m(t_2-t_1)}{2t}$$

an. Außerdem ist t hier durch $t=(1-s)t_2+st_1$ gegeben, wonach

$$\begin{aligned}f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2) &\le \int_0^1\left\{\tfrac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\tfrac{m(t_2-t_1)}{2((1-s)t_2+st_1)}\right\}ds\\ &= \tfrac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\tfrac{m}{2}\log\tfrac{t_2}{t_1}.\end{aligned}$$

Da $u(x,t)=e^{f(x,t)}$, folgt dann

$$\begin{aligned} u(x_1,t_1) &\leq e^{\left(f(x_2,t_2)+\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}+\frac{m}{2}\log\frac{t_2}{t_1}\right)} \\ &= u(x_2,t_2)\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{d^2(x_1,x_2)}{4(t_2-t_1)}} \end{aligned}$$

q.e.d.

Bemerkung 11.7:
Die Harnackungleichung ist auch für nichtnegative Lösungen u der Wärmeleitungsgleichung unter den Voraussetzungen von Satz 11.6 richtig. Man betrachte einfach $v_\varepsilon(x,t):=u(x,t)+\varepsilon$ für $\varepsilon>0$, wende (11.17) auf v_ε an und lasse dann $\varepsilon\to 0$ streben.
Wir werden nun die Harnackungleichung benutzen um das Verhalten einer Lösung von $u_t=\Delta u$ näher zu studieren. (M,g) sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Ric}\geq 0$. Indem wir in Satz 11.6 die Punkte x_1 und x_2 so legen, daß

$$\begin{aligned} u(x_1,t_1) &= \sup_{M\times\{t_1\}} u \\ u(x_2,t_2) &= \inf_{M\times\{t_2\}} u\,, \end{aligned}$$

bekommen wir zunächst mit $d:=\mathrm{diam}(M)$ die Ungleichung

$$\sup_{M\times\{t_1\}} u \leq \inf_{M\times\{t_2\}} u\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{d^2}{4(t_2-t_1)}} \tag{11.18}$$

für $0<t_1<t_2<T$.
Jetzt definieren wir Hilfsfunktionen: $\forall\ n\geq 1$ sei

$$\begin{aligned} \phi_n(x,t) &:= \sup_{M\times\{n-1\}} u-u(x,n-1+t) \\ \psi_n(x,t) &:= u(x,n-1+t)-\inf_{M\times\{n-1\}} u \\ w(t) &:= \sup_{M\times\{t\}} u-\inf_{M\times\{t\}} u=(\mathrm{osc}u)(t). \end{aligned}$$

ϕ_n und ψ_n lösen die Wärmeleitungsgleichung und wegen des Maximumprinzips, $\frac{\partial u}{\partial\nu}=0$ auf $\partial M\times(0,T)$ und dem Hopflemma im Fall $\partial M\neq\emptyset$, sind diese sogar für $t>0$ nichtnegativ, denn $\forall\ 0<t_1<t_2<T$ gilt

$$\begin{aligned} \sup_{M\times\{t_2\}} u &\leq \sup_{M\times\{t_1\}} u\leq \sup_{M\times\{0\}} u \\ \inf_{M\times\{t_2\}} u &\geq \inf_{M\times\{t_1\}} u\geq \inf_{M\times\{0\}} u. \end{aligned}$$

Wir können daher nach Bemerkung 11.7 die Harnackungleichung auf ϕ_n und ψ_n anwenden. Dazu setzen wir $t_2=1$, $t_1=\frac{1}{2}$ und

$$\gamma:=2^{\frac{m}{2}}e^{\frac{d^2}{2}}=\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^{\frac{m}{2}} e^{\frac{d^2}{4(t_2-t_1)}}>1.$$

Dann ist somit

$$\sup_{M\times\{\frac12\}} \phi_n \le \gamma \inf_{M\times\{1\}} \phi_n \qquad \text{und} \qquad \sup_{M\times\{\frac12\}} \psi_n \le \gamma \inf_{M\times\{1\}} \psi_n.$$

Als nächstes berechnen wir

$$\begin{aligned} \sup_{M\times\{\frac12\}} \phi_n &= \sup_{M\times\{n-1\}} u - \inf_{M\times\{n-\frac12\}} u \\ \inf_{M\times\{1\}} \phi_n &= \sup_{M\times\{n-1\}} u - \sup_{M\times\{n\}} u \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sup_{M\times\{\frac12\}} \psi_n &= \sup_{M\times\{n-\frac12\}} u - \inf_{M\times\{n-1\}} u \\ \inf_{M\times\{1\}} \psi_n &= \inf_{M\times\{n\}} u - \inf_{M\times\{n-1\}} u\,, \end{aligned}$$

so daß wir die beiden Ungleichungen

$$\sup_{M\times\{n-1\}} u - \inf_{M\times\{n-\frac12\}} u \le \gamma \left(\sup_{M\times\{n-1\}} u - \sup_{M\times\{n\}} u \right) \tag{11.19}$$

$$\sup_{M\times\{n-\frac12\}} u - \inf_{M\times\{n-1\}} u \le \gamma \left(\inf_{M\times\{n\}} u - \inf_{M\times\{n-1\}} u \right) \tag{11.20}$$

bewiesen haben. Addiert man beide Ungleichungen, so ergibt sich

$$\omega(n-1) + \omega(n-\frac{1}{2}) \le \gamma(\omega(n-1) - \omega(n))$$

und daraus dann

$$\omega(n) \le \delta\omega(n-1) \quad \text{mit} \quad 0 < \delta := \frac{\gamma - 1}{\gamma} < 1.$$

Iterativ schließlich $\forall\ n$

$$\omega(n) \le \delta^n \omega_0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \sup_{M\times\{0\}} u - \inf_{M\times\{0\}} u\,. \tag{11.21}$$

Da $\omega(n)$ eine monoton fallende Funktion ist, existiert daher eine Konstante $A > 0$, so daß

$$\omega(t) \le Ae^{-at} \quad \text{mit} \quad \delta =: e^{-a} \quad (\text{also } a > 0, \text{wegen}\, \delta < 1).$$

Daraus folgt unmittelbar

Lemma 11.8: (M, g) sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (mit Rand oder ohne) mit $\mathrm{Ric} \ge 0$. Ist $\partial M \ne \emptyset$, so sei ∂M konvex. $u : M \times (0, T) \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und es gelte $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial M \times (0, T)$ falls $\partial M \ne \emptyset$. Dann existieren positive Konstanten a, A mit

$$\operatorname*{osc}_{M\times\{t\}} u \le Ae^{-at}$$

$\forall\ t \in (0, T)$. Ferner hängen A und a nur von (M, g) nicht aber von u oder T ab.

Beweis: Dies folgt aus den vorstehenden Überlegungen, da

$$\tilde{u} := u - \inf_{M \times \{0\}} u + \varepsilon$$

nach dem Maximumprinzip eine positive Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist und auch

$$\operatorname{osc} \tilde{u} = \operatorname{osc} u$$

gilt.

Korollar 11.9: Unter den Voraussetzungen von Lemma 11.8 gelte im Fall $\partial M \neq \phi$ zusätzlich, daß $\forall\ k \in \mathbb{N},\ k \geq 1$

$$\sup_{\partial M \times (0,T)} |\nabla^k u| \leq c_k\,,$$

für positive Konstanten c_k. Ist dann $T = \infty$, so konvergiert u in der C^∞-Topologie gegen eine Konstante.

Beweis: Da $\sup\limits_{M \times \{t\}} u$ eine monoton fallende und $\inf\limits_{M \times \{t\}} u$ eine monoton wachsende Folge ist, folgt aus Lemma 11.8, daß u in der C^0-Topologie gegen eine Konstante λ konvergiert. Wir werden zeigen, daß für $k \geq 0$ $|\nabla^k u|^2 \leq c_k$ in $\overline{M_T}$ erfüllt ist. Für $k = 0$ folgt dies direkt aus $u_t = \Delta u$ und dem Maximumprinzip. Für $k = 1$ benutzen wir den Bochner-Trick

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_i u = \nabla_i u_t = \nabla_i \Delta u = \Delta \nabla_i u - R_i^l \nabla_l u\,,$$

so daß

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 &= 2\nabla^i u \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_i u \\
&= 2\nabla^i u (\Delta \nabla_i u - R_i^l \nabla_l u) \\
&= \Delta |\nabla u|^2 - 2|\nabla^2 u|^2 - 2\mathrm{Ric}(\nabla u, \nabla u) \\
&\leq \Delta |\nabla u|^2,
\end{aligned}$$

denn $\mathrm{Ric} \geq 0$, und auch hier beweist das Maximumprinzip das Gewünschte. Für $k > 1$ wollen wir ähnlich vorgehen. Sei

$$\nabla^l R * \nabla^j T$$

ein beliebiger Tensor, der aus Kontraktion der l-fachen kovarianten Ableitung des Krümmungstensors R (nicht zu verwechseln mit der Skalarkrümmung) und der j-fachen kovarianten Ableitung eines gegebenen Tensors T gebildet ist, z.B. ist $\nabla_i R_{jklm} \nabla^i \nabla^j T^{km}$ ein Ausdruck der Form $\nabla R * \nabla^2 T$. Wir behaupten, daß $\forall\ k \geq 1$

$$\nabla^k \Delta T = \Delta \nabla^k T + \sum_{j+l=k} \nabla^l R * \nabla^j T \tag{11.22}$$

gilt. Hierbei steht $\nabla^k T$ für $\underbrace{\nabla \cdot \ldots \cdot \nabla}_{k-\text{mal}} T$. Wir beweisen dies per Induktion.

Für $k = 1$ ist

$$\begin{aligned}
\nabla_i \Delta T &= \nabla_i \nabla^j \nabla_j T \quad \text{(hier sind } i \text{ und } j \text{ Indices)} \\
&= \nabla^j \nabla_i \nabla_j T + R * \nabla T \\
&= \nabla^j (\nabla_j \nabla_i T + R * T) + R * \nabla T \\
&= \Delta \nabla_i T + \nabla R * T + R * \nabla T
\end{aligned}$$

Dies ist der Induktionsanfang.
Gilt dann (11.22) für ein k, so ist für $k+1$

$$\begin{aligned}
\nabla^{k+1} \Delta T &= \nabla(\nabla^k \Delta T) \overset{\text{Ind.Anf.}}{=} \nabla(\Delta \nabla^k T + \sum_{j+l=k} \nabla^l R * \nabla^j T) \\
&= \nabla \Delta(\nabla^k T) + \sum_{j+l=k} (\nabla^{l+1} R * \nabla^j T + \nabla^l R * \nabla^{j+1} T) \\
&\overset{\text{Ind.Anf.}}{=} \Delta \nabla^{k+1} T + \nabla R * \nabla^k T + R * \nabla^{k+1} T \\
&\quad + \sum_{j+l=k} (\nabla^{l+1} R * \nabla^j T + \nabla^l R * \nabla^{j+1} T) \\
&= \Delta \nabla^{k+1} T + \sum_{j+l=k+1} \nabla^l R * \nabla^j T.
\end{aligned}$$

Dies beweist (11.22). Dann berechnen wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t} |\nabla^k u|^2 &= 2\langle \nabla^k u, \nabla^k u_t \rangle \\
&= 2\langle \nabla^k u, \nabla^k \Delta u \rangle \\
&= 2\langle \nabla^k u, \Delta \nabla^k u + \sum_{l+j=k} \nabla^l R * \nabla^j u \rangle \\
&= \Delta |\nabla^k u|^2 - 2|\nabla^{k+1} u|^2 + \sum_{l+j=k} \nabla^k u * \nabla^j u * \nabla^l R\,.
\end{aligned}$$

Für $k \geq 1$ zeigen wir jetzt: Sind sämtliche Normen $|\nabla^j u|^2$ für $1 \leq j \leq k$ bechränkt auf $\overline{M_T}$, so gilt dies auch für $|\nabla^{k+1} u|^2$.
Dazu überlegen wir uns, daß dies und die wegen der Kompaktheit von M gegebene Beschränktheit der Krümmungstensoren $\|\nabla^l R\|^2$ impliziert, daß es für k und $k+1$ positive Konstanten b_{k+1}, a_{k+1} und a_k gibt mit

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^{k+1} u|^2 \leq \Delta |\nabla^{k+1} u|^2 + a_{k+1} |\nabla^{k+1} u|^2 + b_{k+1} \tag{11.23}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\nabla^k u|^2 \leq \Delta |\nabla^k u|^2 - 2|\nabla^{k+1} u|^2 + a_k. \tag{11.24}$$

Sei

$$f := |\nabla^{k+1} u|^2 + a_{k+1} |\nabla^k u|^2 - B$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten B. Dann ist

$$\begin{aligned}
f_t &\leq \Delta f - a_{k+1} |\nabla^{k+1} u|^2 + a_{k+1} a_k + b_{k+1} \\
&= \Delta f - a_{k+1} f + a_{k+1}^2 |\nabla^k u|^2 + a_{k+1}(a_k - B) + b_{k+1}
\end{aligned}$$

Nach unserer Annahme ist $|\nabla^k u|$ schon gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$|\nabla^k u| \leq c_k$$

. Somit

$$f_t \leq \Delta f - a_{k+1} f + a_{k+1}(c_k + a_k - B) + b_{k+1}.$$

Wir wählen $B := a_k + c_k + \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}$ und dann folgt mit $f_t \leq \Delta f - a_{k+1} f$ aus dem Maximumprinzip, daß f nach oben und somit auch $|\nabla^{k+1} u|^2$ beschränkt ist. Da somit u in $C^\infty(M)$ gleichmäßig beschränkt ist, existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (nach Arzela-Ascoli), also existiert ein $u_\infty \in C^\infty(M)$ und eine Folge $t_1 \leq t_2 \leq \ldots$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|u(\cdot, t_n) - u_\infty(\cdot)\|_{C^\infty(M)} = 0$. Da aber $\lim\limits_{n\to\infty} \|u(\cdot, t_n) - \lambda\|_{C^0(M)} = 0$, muß $\lambda = u_\infty$ gelten.

q.e.d.

Wir wollen uns nun noch ein wenig mit parabolischen Differentialgleichungen beschäftigen, die geometrisch motiviert sind. Hierbei sei M eine m-dimensionale kompakte, glatte, orientierte Mannigfaltigkeit und für $t \in (0, T)$ betrachten wir glatte Immersionen

$$F : M \to \mathbb{R}^{m+1} \,,$$

also eine glatte Familie von immersierten Hyperflächen. Wir wollen Familien F betrachten, die

$$\frac{dF}{dt} = -f\nu$$

erfüllen, wobei f eine von der Geometrie der Hyperfläche abhängende Funktion und ν die äußere Einheitsnormale ist. Z.B. könnten wir $f = H$ wählen. Die Frage ist nun zunächst, für welches f die Gleichung parabolisch wird. Zu diesem Zweck lokalisieren wir das Problem, d.h. wir wählen einen festen Punkt $x_0 \in M$ und eine offene Umgebung $U(x_0) \subset M$, so daß für ein $\varepsilon > 0$ und alle $t \in (0, \varepsilon)$ das Hyperflächenstück $F(U(x_0), t)$ ein Graph über der Tangentialebene von $F(M, 0)$ in $F(x_0)$ ist, d.h. lokal ist eine Familie von glatten Graphen

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^{m+1}$$

$$F(x, t) = (x(t), u(x(t), t))$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und einer glatten Familie von Funktionen $u : \Omega \times (0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir müssen dann die Ausgangsgleichung in Abhängigkeit von u umschreiben und f durch u ausdrücken.

Sei also u eine Familie mit

$$\frac{dF}{dt} = -f\nu \quad \text{für} \quad F(x, t) = (x(t), u(x(t), t))$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tfrac{dF}{dt} &= \left(\tfrac{dx}{dt}, u_i \tfrac{dx^i}{dt} + \tfrac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &= -f\nu \end{aligned}$$

Um dies weiter umzuformen, müssen wir noch ν berechnen. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \tfrac{\partial F}{\partial x^i}, \tfrac{\partial F}{\partial x^j} \right\rangle = \delta_{ij} + u_i u_j, \\ g^{ij} &= \delta^{ij} - \tfrac{1}{w^2}\delta^{ik}\delta^{jl}u_k u_l \end{aligned}$$

mit $w^2 = 1 + \delta^{kl}u_k u_l = 1 + |Du|^2$ und dann

$$\nu = \frac{1}{w}\left(-\delta^{kl}u_k \frac{\partial}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Damit folgt

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, u_i \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{-f}{w}(-Du, 1)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{f}{w}\delta^{il}u_l$$

und

$$u_i \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-f}{w}.$$

Fügt man diese beiden Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial t} &= -\tfrac{f}{w} - u_i \tfrac{f}{w}\delta^{il}u_l \\ &= -\tfrac{f}{w}(1 + |Du|^2) = -fw\,, \end{aligned}$$

d.h. die lokale Version von $\frac{dF}{dt} = -f\nu$ ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -fw$$

Wichtig ist, daß diese Gleichung nur lokal im Raum und im Allgemeinen auch nur lokal in der Zeit gilt, da sich die Hyperflächen nicht global als Graphen darstellen lassen müssen und diese Eigenschaft für große Zeiten auch verletzt sein kann. In der vorstehenden Rechnung wird deutlich, daß $F(U,t)$ genau dann noch ein Graph über der Tangentialebene ist, wenn $|Du| < \infty$ zum Zeitpunkt t ist.

Als nächstes berechnen wir die 2-te Fundamentalform. Die Gaußformel

$$-h_{ij}\nu = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial x^k}$$

impliziert

$$h_{ij} = -\left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}, \nu \right\rangle$$

und da

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} = u_{ij}\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

folgt

$$h_{ij} = -\frac{u_{ij}}{w}.$$

Die Formel für die mittlere Krümmung H ist

$$H = g^{ij}h_{ij} = -\frac{1}{w}g^{ij}u_{ij}\,.$$

Im Fall $f = H$ erhalten wir darum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g^{ij} u_{ij} = (\delta^{ij} - \frac{1}{w^2} \delta^{ik} \delta^{jl} u_k u_l) u_{ij} \, .$$

Da $g^{ij} \xi_i \xi_j > 0 \ \forall \, \xi \neq 0$ solange $|Du| < \infty$, ist diese Gleichung für jede Ausgangs-Hyperfläche $M_0 = F(M, 0)$ parabolisch. Als zweites Beispiel betrachten wir die Gaußkrümmung

$$f = K = \frac{\det \, h_{ij}}{\det \, g_{ij}}$$

Also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -w \frac{\det \, \left(-\frac{u_{ij}}{w}\right)}{\det \, g_{ij}} = \frac{(-1)^{m+1}}{w^{m-1} \det \, g_{ij}} \det \, (u_{ij})$$

und diese Gleichung ist parabolisch, wenn $u_{ij} < 0$, d.h. wenn die Hyperflächen konvex sind

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_{kl}} \det \, (u_{ij}) = u^{mn} \frac{\partial u_{mn}}{\partial u_{kl}} \det \, (u_{ij}) \right)$$

Das der mittlere Krümmungsfluß parabolisch ist, sieht man auch durch

$$\frac{dF}{dt} = \vec{H} = \Delta F,$$

denn $\Delta F = g^{ij} \nabla_i \nabla_j F$, $\nabla_i \nabla_j F = -h_{ij} \nu$ und $\frac{\partial \Delta F}{\partial \nabla_i \nabla_j F} = g^{ij}$ ist ein elliptischer Operator, d.h. $\frac{dF}{dt} = \vec{H}$ ist ein System parabolischer Differentialgleichungen. Ein weiteres Beispiel ist der Fluß

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{H} \nu$$

welchen man inversen mittleren Krümmungsfluß nennt. Hier gilt $f = -\frac{1}{H}$ und daher ist

$$u_t = \frac{1}{H} w$$

Da

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \left(\frac{w}{H}\right) &= -\frac{w}{H^2} \frac{\partial H}{\partial u_{ij}} \\ &= \frac{1}{H^2} g^{ij} \end{aligned}$$

ist dieser Fluß für $H > 0$ parabolisch (und für $H = 0$ nicht definiert).
Im Gegensatz zu den ersten beiden Beispielen ist dieser Fluß nicht kontrahierend sondern expandierend. Er ist wichtig beim Studium asymptotisch flacher Mannigfaltigkeiten und deren ADM-Masse.
Wir wenden uns jetzt speziellen Lösungen von

$$\frac{\partial F}{dt} = -f \nu$$

zu. Dazu nehmen wir wie oben zunächst an, daß M eine geschlossene, orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^{m+1}$ ist. Wir setzen $M_t := F(M, t)$. Man kann nun den Fluß so reskalieren, daß das Volumen der reskalierten Hyperflächen konstant bleibt, genauer betrachten wir einen zeitabhängigen Streckfaktor $\psi = \psi(t) > 0$ mit der Eigenschaft, daß die durch

$$\tilde{F}(x,t) := \psi(t)F(x,t)$$

gegebenen Immersionen $\tilde{M}_t := \tilde{F}(M,t)$ konstantes Volumen haben.
Es ist dann offenbar

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_i^\alpha &= \psi F_i^\alpha \\
\tilde{\nu}_i^\alpha &= \nu_i^\alpha \\
\tilde{g}_{ij} &= \langle \tilde{F}_i, \tilde{F}_j \rangle = \psi^2 g_{ij} \\
\tilde{g}^{ij} &= \psi^{-2} g^{ij} \\
\tilde{h}_{ij} &= -\left\langle \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^i \partial x^j}, \tilde{\nu} \right\rangle = \psi h_{ij} \\
\tilde{H} &= \tilde{g}^{ij}\tilde{h}_{ij} = \psi^{-1} H \\
d\tilde{\mu} &= \sqrt{\det \tilde{g}_{ij}}dx = \psi^m d\mu.
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{F}}{dt} &= \frac{d\psi}{dt}F + \psi\frac{dF}{dt} \\
&= \frac{d\psi}{dt}F - \psi f \nu.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist ψ so gewählt, daß

$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}\int_M d\tilde{\mu} &= \frac{d}{dt}\int_M \psi^m d\mu \\
&= m\psi^{m-1}\frac{d\psi}{dt}\int_M d\mu - \psi^m \int_M fH d\mu
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{\frac{d\psi}{dt}}{\psi} = \frac{1}{m}\fint_M fHd\mu \;, \fint fHd\mu = \frac{\int fHd\mu}{\int d\mu}$$

und es ist somit

$$\psi(t) = e^{\frac{1}{m}\int_0^t \fint_M fHd\mu d\tilde{t}}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{F}}{dt} &= \frac{d\psi}{dt}F - f\psi\nu \\
&= \frac{d\psi}{dt}(\langle F, \nu\rangle \nu + F^T) - f\psi\nu
\end{aligned}$$

mit $F^T := F - \langle F, \nu \rangle \nu$, ist der normale Anteil von $\frac{d\tilde{F}}{dt}$ durch

$$\frac{d\psi}{dt}\langle F, \nu\rangle - f\psi$$

gegeben.

Definition 11.10: Eine Lösung F von $\frac{dF}{dt} = -f\nu$ heißt selbstähnlich, wenn

$$\frac{d\psi}{dt}\langle F, \nu\rangle - f\psi = 0 \qquad \text{für}$$

$$\psi(t) := e^{\frac{1}{m}\int\limits_0^t \fint\limits_M fH d\mu d\tilde{t}}$$

Die Bilder M_t einer selbstähnlichen Lösung gehen folglich durch Streckungen um den Faktor ψ aus M_0 hervor. Der tangentiale Anteil der reskalierten Geschwindigkeit führt dabei nur zu einer Umparametrisierung der Hyperflächen.

Beispiel: Wir betrachten wieder den inversen mittleren Krümmungsfluß, also $f = -\frac{1}{H}$. Dann ist zunächst wegen

$$\frac{d}{dt}\int d\mu = -\int fH d\mu = \int d\mu$$

das Volumen von M_t durch

$$|M_t| = |M_0| e^t$$

gegeben und dann

$$\begin{aligned} \psi(t) &= e^{\frac{1}{m}\int\limits_0^t \fint\limits_M fH d\mu d\tilde{t}} \\ &= e^{-\frac{1}{m}\int\limits_0^t d\tilde{t}} \\ &= e^{-\frac{1}{m}} \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \Delta|F|^2 &= g^{ij}\nabla_i\nabla_j|F|^2 \\ &= g^{ij}2\nabla_i\langle F, F_j\rangle \\ &= 2g^{ij}(g_{ij} - h_{ij}, \langle F, \nu\rangle) \\ &= 2(m - H\langle F, \nu\rangle) \end{aligned}$$

und wenn F eine selbstähnliche Lösung ist, so haben wir

$$\frac{d\psi}{dt}\langle F, \nu\rangle = -\frac{1}{H}\psi$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{m}\langle F, \nu\rangle = \frac{1}{H}$$

Somit gilt für jede selbstähnliche Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses

$$\Delta|F|^2 = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar

Satz 11.11: Die einzige kompakte, orientierte selbstähnliche Lösung des inversen mittleren Krümmungsflusses

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{H}\nu$$

ist durch die Standardsphäre gegeben.

Beweis: Da $\Delta|F|^2 = 0 \Rightarrow |F|^2 = \mathrm{const}$

q.e.d.

Selbstähnliche Lösungen treten vielfach in der Singularitätentheorie parabolischer Flüsse auf. Um dies näher zu erläutern, betrachten wir nun den mittleren Krümmungsfluß

$$\frac{dF}{dt} = -H\nu$$

Die Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt}|A|^2 = \Delta|A|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|A|^4$$

für die Norm der 2. Fundamentalform impliziert, daß

$$|A|^2 \geq \frac{1}{c-2t} \quad \text{mit} \quad c := \frac{1}{\min\limits_{M_0} |A|^2}$$

vorausgesetzt $\min\limits_{M_0} |A|^2 > 0$. Insbesondere folgt, daß die maximale Zeit T, bis zu der eine glatte Lösung von $\frac{dF}{dt} = -H\nu$ existiert, endlich sein muß und aus

$$\sup_{M_t} |A|^2 \geq \frac{1}{c-2t}$$

folgt $T \leq \frac{c}{2}$.

Man führt nun folgende Definition ein:

Definition 11.12: Wir sagen, $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ ist ein blow-up Punkt für den mittleren Krümmungsfluß, falls ein $x \in M$ existiert, so daß

$$\lim_{t\to T} F(x,t) = y$$

und

$$\limsup_{t\to T} |A|(x,t) = \infty.$$

Gilt dann zusätzlich in x

$$\sup |A|^2 \leq \frac{c}{T-t}$$

mit einer positiven Konstanten c, so heißt x eine Typ-I Singularität, andernfalls eine Typ-II Singularität.

Es stellt sich nun heraus, daß Typ-I-Singularitäten nach Reskalierung zu selbstähnlichen Lösungen konvergieren und daher eine Klassifikation der Typ-I-Singularitäten mit der Klassifikation der selbstähnlichen Lösungen gleichzusetzen ist. Diese Tatsache folgt aus einer sogenannten Monotonieformel. Sei

$$f(y,t) := \frac{1}{(4\pi(t_0-t))^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(t_0-t)}} \quad t < t_0$$

der rückwertige Wärmeleitungskern des $\mathbb{R}^m$ im Punkt $(0, t_0)$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\Delta_e f$$

wobei Δ_e der euklidische Laplaceoperator ist.
Wir betrachten nun die Evolutionsgleichung von

$$f(F,t) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{\frac{m}{2}}} e^{\frac{-|F|^2}{4\tau}},$$

wobei wir $\tau := t_0 - t$ gesetzt haben. Da $\frac{dF}{dt} = -H\nu$, folgt

$$\frac{df}{dt} = \frac{-|F|^2}{4\tau^2} f + \frac{m}{2\tau} f + \frac{\langle F,\nu\rangle H}{2\tau} f. \tag{11.25}$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \nabla_i f &= -\tfrac{1}{2\tau}\langle F, F_i\rangle f \\ \nabla_j\nabla_i f &= \tfrac{1}{4\tau^2}\langle F,F_i\rangle\langle F,F_j\rangle f - \tfrac{1}{2\tau} f(g_{ij} - h_{ij}\langle F,\nu\rangle) \end{aligned}$$

$$\Delta f = \frac{1}{4\tau^2}(|F|^2 - \langle F,\nu\rangle^2) f - \frac{1}{2\tau} f(m - H\langle F,\nu\rangle) \tag{11.26}$$

so daß

$$\frac{df}{dt} + \Delta f = -\frac{1}{4\tau^2}\langle F,\nu\rangle^2 f + \frac{1}{\tau} H\langle F,\nu\rangle f. \tag{11.27}$$

Setzen wir nun

$$p(t) := \int_M f\, d\mu\,,$$

so erhalten wir wegen $\frac{d}{dt} d\mu = -H^2 d\mu$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \int_M \left(\frac{df}{dt} - fH^2\right) d\mu \\ &= \int_M \left(-\Delta f - \tfrac{1}{4\tau^2}\langle F,\nu\rangle^2 f + \tfrac{1}{\tau} H\langle F,\nu\rangle f - fH^2\right) d\mu \\ &= -\int_M f\left|H - \tfrac{\langle F,\nu\rangle}{2\tau}\right|^2 d\mu \end{aligned}$$

Dies ist die Monotonieformel.

Lemma 11.13: Es sei M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension m und $F : M \times [0,T) \to \mathbb{R}^{m+1}$ eine Lösung von

$$\frac{dF}{dt} = -H\nu\,.$$

Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\int f\,d\mu\right) = -\int_M f\left|H - \frac{\langle F,\nu\rangle}{\tau}\right|^2 d\mu$$

mit f, τ wie oben.
Wir wollen nun annehmen, daß $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ ein blow-up Punkt ist (dies ist keine Einschränkung, da der mittlere Krümmungsfluß translationsinvariant ist und wir daher den blow-up Punkt in den Ursprung verschieben können, d.h. ist F eine Lösung, so auch $\overline{F}(x,t) := F(x,t) - P$, für einen Punkt $P \in \mathbb{R}^{m+1}$).

Wir reskalieren die Immersionen F mittels

$$\tilde{F}(x,s) := (2(T-t))^{-\frac{1}{2}} F(x,t), s(t) := -\frac{1}{2}\log(T-t)$$

Die Hyperflächen $\tilde{M}_s = \tilde{F}(M,s)$ sind daher für

$$-\frac{1}{2}\log T \le s < \infty$$

definiert und sie erfüllen die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}\tilde{F} = -\tilde{H}\tilde{\nu} + \tilde{F}.$$

Ähnlich wie oben erhält man für $\tilde{f}(y) = e^{\frac{-|y|^2}{2}}$ die Monotonieformel

$$\frac{d}{ds}\int_M \tilde{f}d\tilde{\mu} = -\int \tilde{f}|\tilde{H} - \langle \tilde{F}, \tilde{\nu}\rangle|^2 d\tilde{\mu} \tag{11.28}$$

Wir wollen die Monotonieformel benutzen um die reskalierten Typ-I Singularitäten zu studieren. Zunächst bemerken wir, daß unter der Reskalierung nicht jeder Punkt gegen ∞ konvergiert, denn

Lemma 11.14: Sei $0 \in \mathbb{R}^{m+1}$ ein blow-up Punkt von M und es liege dort eine Typ-I-Singularität. Dann existiert ein $x \in M$, so daß

$$\tilde{F}(x,s)$$

beschränkt bleibt, wenn $s \to \infty$.

Beweis: Es ist für die Singularität x

$$|F(x,t)| \le \int_t^T |H(x,\tau)| d\tau \text{ , da}$$

$$\frac{dF}{dt} = -H\nu \quad \text{und} \quad \lim_{t\to T} F(x,T) = 0$$

Aber nach Voraussetzung gilt in x: $|A|^2 \le \frac{c}{T-t}$ und weil $H^2 \le m|A|^2$, folgt

$$|F(x,t)| \le \int_t^T \sqrt{\frac{mc}{T-\tau}} d\tau \le \text{const}\sqrt{T-t},$$

also $|\tilde{F}(x,s)| \le \text{const}$

q.e.d.

Gilt $|A|^2 \le \frac{c}{T-t}$ für eine Konstante $c > 0$, so folgt, daß $|\tilde{A}|^2 \le \tilde{c}$ für die reskalierten Hyperflächen erfüllt ist und man kann ähnlich wie bei den Abschätzungen von $\|u\|_{C^k(M)}$ für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auch hier $\|F\|_{C^k(M)}$ für beliebiges $k \ge 2$ abschätzen (allerdings gilt nicht unbedingt $\|\tilde{F}\|_{C^0} \le$ const, da die reskalierten Hyperflächen meist gegen nichtkompakte und nicht beschränkte Hyperflächen streben). Aus der Monotonieformel folgt auch noch

$$\int_{s_0}^{\infty} \int_{\tilde{M}} \tilde{f} |\tilde{H} - \langle \tilde{F}, \tilde{\nu} \rangle| d\tilde{\mu} ds < \infty$$

falls $|A|^2 \leq \frac{c}{T-t}$, also $|\tilde{A}|^2 \leq$ const und hieraus und aus den gleichmäßigen C^k-Schranken für $\tilde{F}$ folgt dann, daß jede konvergente (in der C^∞-Topologie) Teilfolge von $\tilde{F}$ einen Limes $\tilde{F}_\infty$ besitzen muß, der $\tilde{H} = \langle \tilde{F}_\infty, \tilde{\nu} \rangle$ erfüllt und jede Hyperfläche, die diese Gleichung erfüllt, fließt unter dem mittleren Krümmungsfluß durch Homothetien. (siehe Huisken, G:: Asymptotic behavior of singularities of the mean curvature flow. JDG 1990 (31) 285-299).

Literatur

[1] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press (1975)

[2] Cao, H.-D.: Deformation of Kähler metrics to Kähler-Einstein metrics on compact Kähler manifolds. Invent. Math. (81) 359–372 (1985)

[3] Ebay, H.: Sobolev Spaces on Riemannian manifolds. Lecture Notes in Mathematics, no. 1635, Springer Verlag (1996)

[4] Gilbarg, D. & Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (224), Springer Verlag (1983)

[5] Huisken, G.: Asymptotic behavior of singularities of the mean curvature flow. JDG 1990 (31) 285-299

[6] Jost, J.: Partielle Differentialgleichungen. Springer Verlag (1998)

[7] Schoen, R.; Simon, L.; Yau, S.-T.: Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math. (134), 275–288 (1975)

[8] Schoen, R. & Yau, S.-T.: Lectures on Differential Geometry. Academic Press