

**Max-Planck-Institut  
für Mathematik  
in den Naturwissenschaften  
Leipzig**

**Partielle Differentialgleichungen aus der  
Geometrie und Physik II -  
Hyperbolische Probleme**

(Universität Regensburg, SS 2002)

by

*Felix Finster*

Lecture note no.: 15

2002





# Partielle Differentialgleichungen aus der Geometrie und Physik II: Hyperbolische Probleme

Vorlesung Sommersemester 2002

Felix Finster  
Fakultät für Mathematik  
Universität Regensburg

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$	4
1.1. Die eindimensionale Wellengleichung	4
1.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung	7
1.3. Die Wellengleichung bei ungerader Raumdimension, das Huygenssche Prinzip	13
1.4. Die Wellengleichung bei gerader Raumdimension	15
1.5. Integration längs Charakteristiken, ein charakteristisches Anfangswertproblem	17
1.6. Einige einfache Abschätzungen	28
1.7. Die Strichartz-Abschätzungen in drei Raumdimensionen	30
2. Symmetrisch Hyperbolische Systeme, die Energie-Methode	39
2.1. Kausale Struktur, Eindeutigkeit	42
2.2. Existenz für lineare Systeme	46
2.3. Lokale Existenz für Quasilineare Systeme, die Moser-Abschätzungen	51
2.4. Globale Methoden	58
3. Hyperbolische Erhaltungsgleichungen	63
3.1. Schwache Lösungen von Erhaltungsgleichungen, Sprungbedingungen	66
3.2. Verlust der Eindeutigkeit, die Entropiebedingungen von Lax	69
3.3. Die skalare Erhaltungsgleichung	72
3.4. Das Riemann-Problem für $p$ -Systeme	88
3.5. Riemann-Koordinaten	92
Literatur	97

In Teil I der Vorlesung wurden nach einer allgemeinen Einführung hauptsächlich elliptische Probleme behandelt. Im folgenden werden wir uns auf hyperbolische Gleichungen konzentrieren. Im Gegensatz zu “elliptisch” gibt es keine einfache Definition, wann ein System partieller Differentialgleichungen hyperbolisch ist. Darum beschränken wir uns zunächst auf **skalare** Gleichungen, Systeme werden später behandelt. Außerdem beginnen wir zur Einfachheit mit einer reellen Gleichung.

**Definition 0.1.** *Eine Differentialgleichung auf  $\mathbb{R}^n$*

$$a^{ij}(x, u, Du) \partial_{ij} u + b(x, u, Du) = 0$$

mit reellen Koeffizienten  $a^{ij}(x, u, p), b(x, u, p) \in \mathbb{R}$  ( $u \in \mathbb{R}, x, p \in \mathbb{R}^n$ ) heißt **hyperbolisch** falls die Matrix  $a^{ij}$  für alle  $x, u, p$  einen positiven und  $(n - 1)$  negative Eigenwerte besitzt.

Beachte, dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass  $a^{ij}$  symmetrisch und damit diagonalisierbar ist.

**Beispiele 0.2.** (i) *Die Wellengleichung im  $\mathbb{R}^{m+1}$*

$$(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^n}) \phi = \rho(t, x) .$$

*Die Wellengleichung beschreibt beispielsweise die Ausbreitung von Schallwellen. Der Differentialoperator*

$$\square \equiv \partial_t^2 - \Delta$$

*heißt auch **Wellenoperator** oder *D'Alembert-Operator*. Die Funktion  $\rho(t, x)$  heißt **Inhomogenität**; für  $\rho \equiv 0$  hat man die homogene Wellengleichung.*

(ii) *Die Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\square + m^2)\phi = 0 .$$

*Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine quantenmechanische Gleichung und beschreibt ein skalares Teilchen der Masse  $m$ .*

(iii) *Die Sine-Gordon-Gleichung*

$$\square\phi + \sin \phi = 0$$

*ist ein einfaches Beispiel einer nichtlinearen Wellengleichung. Der Name ist ein Wortspiel und bezieht sich auf die formale Ähnlichkeit zur Klein-Gordon-Gleichung. Die Sine-Gordon-Gleichung besitzt interessante Solitonen- und “atmende” Lösungen.*

Andere wichtige Beispiele hyperbolischer Gleichungen in der Physik sind die Euler-Gleichungen (Gasdynamik), die Diracgleichung (relativistische Quantenmechanik), die Maxwell-Gleichungen (Elektrodynamik) und die Einstein-Gleichungen (Allgemeine Relativitätstheorie).

Diese Gleichungen sind jedoch Systeme, und wir werden sie später kennenlernen.

Bevor wir hyperbolische Gleichungen genauer untersuchen, ist es wichtig, sich einige grundlegende Unterschiede zwischen elliptischen und hyperbolischen Gleichungen bewußt zu machen. Für elliptische Gleichungen haben wir im letzten Semester das Maximumprinzip kennengelernt und außerdem Randwertprobleme wie das Dirichletproblem behandelt. Betrachten wir im Vergleich dazu das einfache Beispiel der 2-dimensionalen homogenen Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = 0. \quad (1)$$

Der Wellenoperator kann (im Gegensatz zum Laplaceoperator  $\partial_t^2 + \partial_x^2$ ) als Produkt zweier Richtungsableitungen geschrieben werden,

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 = (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x).$$

Es ist günstig, neue Koordinaten  $(u, v)$  so einzuführen, dass diese Richtungsableitungen mit den partiellen Ableitungen übereinstimmen,

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(t + x) & , & & v &= \frac{1}{2}(t - x) \\ \frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} & , & & \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Wellengleichung transformiert sich in

$$\partial_u \partial_v \phi = 0. \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann leicht angegeben werden: Zunächst ist (2) genau dann erfüllt, wenn

$$\partial_v \phi = a(v)$$

mit einer geeigneten Funktion  $a$ . Integration liefert

$$\phi = A(v) + b(u)$$

mit geeigneten Funktionen  $A$  und  $b$  ( $A$  ist eine Stammfunktion von  $a$ ). Transformiert man zurück in die Koordinaten  $(t, x)$ , so kommt man zum Ergebnis, dass die Wellengleichung (1) genau dann erfüllt ist, wenn  $\phi$  für geeignete Funktionen  $F$  und  $G$  die Darstellung

$$\phi(t, x) = F(x + t) + G(x - t) \quad (3)$$

besitzt.

An der Darstellung (3) sieht man sofort, dass es für Lösungen der Wellengleichung kein Maximumprinzip gibt (setze z.B.  $F \equiv 0$  und  $G(\tau) = \exp(-\tau^2)$ ). Außerdem sind Randwertprobleme i.a. nicht wohlgestellt, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 0.3.** *Betrachte das Dirichlet-Problem*

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi = 0 \quad \text{auf } D = \{(t, x), 0 \leq t \leq 1, |x| \leq 1 - t\}$$

$$\phi|_{t=0, -1 \leq x \leq 1} = 0 = \phi|_{0 \leq t \leq 1, x = -1+t} \quad (4)$$

$$\phi|_{0 \leq t \leq 1, x = 1-t} = f(t) . \quad (5)$$

Wir schreiben  $\phi$  in der Form (3). Die Randwerte (4) implizieren, dass

$$F(x) + G(x) = 0 \quad \text{und} \quad F(x) + G(-1) = 0, \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

Durch diese Bedingungen ist  $\phi$  auf der Strecke  $x = 1 - t$  aber bereits vollständig bestimmt, denn

$$\phi(t, 1 - t) = F(1) + G(1 - 2t) = -G(-1) - F(1 - 2t) = 0 .$$

Das Dirichlet-Problem ist also nur lösbar, wenn  $f \equiv 0!$

Wir sehen also, dass die Theorie der elliptischen Gleichungen nicht auf hyperbolische Gleichungen übertragen werden kann. Dies ist deswegen nicht schlimm, weil man sich bei hyperbolischen Gleichungen für ganz andere Problemstellungen interessiert. In allen Anwendungen ist  $t$  nämlich der Zeitparameter, und es scheint nicht sinnvoll, Randwerte zu verschiedenen Zeiten vorzugeben. Vielmehr interessiert man sich dafür, wie sich die Lösung zu vorgegebenen Anfangswerten in der Zeit entwickelt. Deswegen betrachtet man bei hyperbolischen Gleichungen anstelle eines Randwertproblems das **Cauchy-Problem**

$$\phi(t = 0, x) = f(x) , \quad \partial_t \phi(t = 0, x) = g(x) .$$

Das Fehlen des Maximumprinzips bedeutet insbesondere, dass man keine Regularitätstheorie hat. Bei Lösungen des Cauchy-Problems können sich also selbst bei glatten Anfangswerten nach endlicher Zeit Singularitäten bilden.

## 1. DIE WELLENGLEICHUNG IM $\mathbb{R}^n$

**1.1. Die eindimensionale Wellengleichung.** Wir betrachten das Cauchy-Problem für die eindimensionale Wellengleichung,

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(t, x) &= \rho(t, x) \\ \phi|_{t=0} &= f , \quad \partial_t \phi|_{t=0} = g \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dieses einfache Beispiel kann explizit gelöst werden; die Ideen dabei werden uns später in allgemeinerem Rahmen wieder begegnen.

Betrachte zunächst den homogenen Fall  $\rho \equiv 0$ . Die allgemeine Lösung ist (3), und die Randwerte liefern die Bedingungen

$$f(x) = F(x) + G(x) , \quad g(x) = F'(x) - G'(x) ,$$

die sich sofort integrieren lassen,

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x g(s) ds + C \\ G(x) &= \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x g(s) ds - C \end{aligned} \right\}$$

mit  $C \in \mathbb{R}$  beliebig. Einsetzen in (3) liefert

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds. \quad (7)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der Wellengleichung. Man sieht sofort, dass

1. Die Lösung ist eindeutig.
2. Die Lösung hängt stetig von den Anfangswerten ab: Seien  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  Lösungen des Cauchy-Problems zu den Anfangswerten  $(f, g)$  bzw.  $(\tilde{f}, \tilde{g})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} &|\phi(t, x) - \tilde{\phi}(t, x)| \\ &\leq \frac{1}{2}(|f - \tilde{f}|(x+t) + |f - \tilde{f}|(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} |g - \tilde{g}|(s) ds \end{aligned}$$

und folglich

$$\|\phi(t) - \tilde{\phi}(t)\|_\infty \leq \|f - \tilde{f}\|_\infty + t\|g - \tilde{g}\|_\infty$$

( $\|\cdot\|_\infty$  ist die sup-Norm). Betrachtet man die Lösung in einem endlichen Zeitintervall,  $t \in [0, T]$ , so hängt die Lösung in der sup-Norm stetig von  $f$  und  $g$  ab.

Zu 1. und 2. sagt man, dass das **Cauchy-Problem wohlgestellt** ist. Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung (6). Um die Lösung an der Stelle  $(t_0, x_0)$  zu konstruieren, integrieren wir die Gleichung über das Dreiecksgebiet

$$D = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

(siehe Abb.1). Partielle Integration liefert

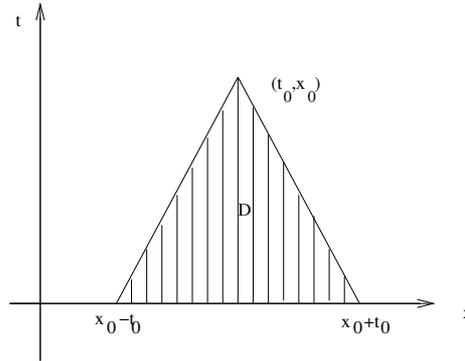


ABBILDUNG 1

$$\begin{aligned}
\iint_D \rho \, dx dt &= \iint_D (\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi \, dx dt \\
&= \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} dx \int_0^{t_0 - |x - x_0|} dt \partial_t^2 \phi - \int_0^{t_0} dt \int_{x_0 - (t_0 - t)}^{x_0 + (t_0 - t)} dx \partial_x^2 \phi \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} (\partial_t \phi(t_0 - |x - x_0|, x) - \partial_t \phi(t = 0, x)) dx \\
&\quad - \int_0^{t_0} (\partial_x \phi(t, x_0 + (t_0 - t)) - \partial_x \phi(t, x_0 - (t_0 - t))) dx \\
&= \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \phi(t, x_0 + (t_0 - t)) dt + \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \phi(t, x_0 - (t_0 - t)) dt \\
&\quad - \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \partial_t \phi(t = 0, x) dx \\
&= \phi(t_0, x_0) - \phi(t = 0, x_0 + t_0) + \phi(t_0, x_0) - \phi(t = 0, x_0 - t_0) \\
&\quad - \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} \partial_t \phi(t = 0, x) dx .
\end{aligned}$$

Die partielle Integration in (\*) kann etwas eleganter auch über den Satz von Gauß verstanden werden. Setzt man nun die Anfangswerte ein und

löst nach  $\phi(t_0, x_0)$  auf, so erhält man

$$\phi(t, x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_D \rho \quad (8)$$

Im Fall  $\rho \equiv 0$  reduziert sich dies auf (7). An der Lösungsformel (8) kann man folgende allgemeine Eigenschaften der Lösung erkennen:

- $\phi(t_0, x_0)$  hängt nur von den Anfangswerten im Intervall  $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$  und  $\rho$  im kompakten Gebiet  $D$  ab. Sind also  $f, g$  und  $\rho$  in  $D$  bekannt, so ist  $\phi(t_0, x_0)$  daraus eindeutig bestimmt. Wir nennen  $D$  das **Abhängigkeitsgebiet** von  $(t_0, x_0)$
- Für ein Intervall  $I = [a, b]$  beeinflussen die Anfangswerte auf  $I$  die Lösung nur im Gebiet

$$E = \{(t, x) \mid a - t \leq x \leq b + t\},$$

dem **Einflussgebiet** von  $I$

Diese beiden Punkte sind Ausdruck der **Kausalität**, dass sich also Information bei Lösungen der Wellengleichungen höchstens mit der Geschwindigkeit  $c = 1$  ausbreiten. Im Hinblick auf Lichtwellen nennt man

$$K^\pm = \{(t, x) \mid |x - x_0| < \pm(t - t_0)\}$$

den vorwärts bzw. rückwärts gerichteten Lichtkegel. Die Geraden

$$\{(t, x) \mid x - x_0 = \pm(t - t_0)\}$$

heißen **Charakteristiken**.

**1.2. Allgemeine Lösung der Wellengleichung.** Wir kommen nun zum Cauchy-Problem in allgemeiner Dimension  $m = n - 1$ ,

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m})\phi(t, x) &= \rho(t, x) \\ \phi|_{t=0} &= \phi_0, \quad \partial_t \phi|_{t=0} = \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei stets  $t \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}^m$ . Dieses Problem wurde schon im 19. Jahrhundert mit der Methode der sphärischen Mittel gelöst. Diese klassische Methode hat den Nachteil, dass sie nicht auf andere hyperbolische Gleichungen übertragbar und nur für reguläre Anfangswerte anwendbar ist. Deswegen werden wir an dieser Stelle lieber gleich allgemeinere Fouriermethoden einführen.

Wir wollen möglichst wenige Voraussetzungen an die Regularität und das Abfallverhalten im Unendlichen stellen. Eine hinreichend allgemeine Klasse von Lösungen sind **Lösungen endlicher Energie**, d.h.

$$\phi_0 \in H^{1,2}(\mathbb{R}^m), \quad \phi_1 \in L^2(\mathbb{R}^m), \quad \rho \in L^1_{\text{loc}}(L^2(\mathbb{R}^m), dt). \quad (10)$$

Der Name “endliche Energie” kommt daher, dass die (physikalische) Energie von  $\phi$  gegeben ist durch das Integral

$$E(t) = \frac{1}{2} \int (|\partial_t \phi|^2 + |\partial_x \phi|^2) dx, \quad (11)$$

und (10) garantiert, dass dieses **Energieintegral** für  $t = 0$  endlich ist. Die zeitliche Änderung der Energie kann leicht durch partielle Integration berechnet werden,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= \int (\partial_t \phi \partial_t^2 \phi + \partial_{xt} \phi \partial_x \phi) dx \\ &= \int \partial_t \phi (\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi) dx \\ &= \int \partial_t \phi \cdot \rho(t, x) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

und auch dies ist wegen (10) endlich (für f.a.  $t$ ). Im Falle  $\rho \equiv 0$  ist  $E$  konstant, dies nennt man Energieerhaltung.

Die Energieerhaltung liefert sofort Eindeutigkeit:

**Satz 1.2.1.** *Das Cauchy-Problem (9) besitzt höchstens eine Lösung.*

**Beweis.** Seien  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  zwei Lösungen. Dann ist aufgrund der Linearität die Funktion  $u = \phi - \tilde{\phi}$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\square u = 0, \quad u|_{t=0} = 0 = \partial_t u|_{t=0}.$$

Die zugehörige Energie verschwindet nach (11) für  $t = 0$  und wegen (12) sogar für alle Zeiten. Folglich sind  $\partial_t u(t, \cdot), \partial_x u(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^m)$  und verschwinden. Integration liefert  $u \equiv 0$ .  $\square$

Setzt man eine Fundamentallösung voraus, so kann man damit die allgemeine Lösung des Cauchy-Problems explizit angeben.

**Definition 1.2.2.** *Eine Distribution  $R(t, x)$  heißt **Fundamentallösung** der Wellengleichung, falls*

$$\square R(t, x) = 0 \quad \text{für } t > 0 \quad (13)$$

$$R(t, x) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (14)$$

$$R(t = 0, x) = 0, \quad \partial_t R(t = 0, x) = \delta^m(x). \quad (15)$$

*Hier bezeichnet  $\delta^m$  die Diracsche Delta-Distribution im  $\mathbb{R}^m$ .*\*

---

\*Im folgenden rechnen wir mit den Distributionen zunächst formal (kümmern uns also nicht darum, ob die Integrale konvergieren und mit Ableitungen vertauschen). Die analytischen Einzelheiten können aber leicht gerechtfertigt werden, sobald man die Fundamentallösung genauer kennt (siehe (26) und (31)).

**Theorem 1.2.3. (Duhamel-Darstellung)** *Eine Lösung des Cauchy-Problems ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} \phi(t, x) = & \int \partial_t R(t, x - y) \phi_0(y) dy + \int R(t, x - y) \phi_1(y) dy \\ & + \int_0^t d\tau \int dy R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \quad (16) \end{aligned}$$

**Beweis.** Die richtigen Anfangswerte verifiziert man unmittelbar. Um zu überprüfen, dass  $\phi$  tatsächlich die Wellengleichung erfüllt, wenden wir auf (16) den Wellenoperator an. Bei den ersten beiden Integralen kann man den Differentialoperator einfach durchziehen,

$$\begin{aligned} \square \int R(t, x - y) \phi_1(y) dy &= \int (\square R)(t, x - y) \phi_1(y) dy = 0 \\ \square \int \partial_t R(t, x - y) \phi_0(y) dy &= \int \partial_t (\square R)(t, x - y) \phi_0(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Beim letzten Integral berechnet man zunächst die Zeitableitungen,

$$\begin{aligned} & \partial_t \int_0^t d\tau \int dy R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \\ &= \int dy R(0, x - y) \rho(t, y) + \int_0^t d\tau \int dy \partial_t R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \\ &= \int_0^t d\tau \int dy \partial_t R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \\ & \partial_t^2 \int_0^t d\tau \int dy R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \\ &= \int dy \partial_t R(0, x - y) \rho(t, y) + \int_0^t d\tau \int dy \partial_t^2 R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) \\ &= \rho(t, x) + \int_0^t d\tau \int dy \partial_t^2 R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y), \end{aligned}$$

und da der Laplace-Operator in die Integrale hineingezogen werden kann, folgt

$$(\partial_t^2 - \Delta) \int_0^t d\tau \int dx R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) = \rho(t, x)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Wir wenden uns nun der Bestimmung der Fundamentallösungen zu. Um die Methode in einen allgemeineren Rahmen einordnen zu können, wollen wir eine Verbindung zur in der Physik gebräuchlichen Propagator-Theorie herstellen. Die Propagatoren sind dabei "kovariant" in der Raumzeit formuliert; man fasst also  $t$  und  $x$  zu Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  zusammen, welcher mit einem indefiniten Skalarprodukt versehen ist (Minkowski-Raum). Um nicht unnötig viele Begriffe aus der Physik einführen zu müssen, schreiben wir hier die Raum- und Zeitkoordinaten getrennt, aber nach Möglichkeit so, dass die Kovarianz unmittelbar ersichtlich ist. Unser Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass sich die Duhamel-Darstellung für triviale Anfangswerte ( $\phi_0 \equiv 0 \equiv \phi_1$ ) reduziert auf

$$\phi(t, x) = \int_0^t d\tau \int dy R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y). \quad (17)$$

Setzt man  $\rho$  für negative Zeiten durch null fort,

$$\rho(t, x) = 0 \quad \text{für } t < 0,$$

so kann man (unter Verwendung von (14)) in (17) auch über die gesamte Raumzeit integrieren,

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} dy R(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y).$$

Wir wenden nun den Wellenoperator an und setzen die Wellengleichung ein,

$$\rho(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbb{R}^3} dy (\square R)(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y).$$

Da diese Gleichung für beliebiges  $\rho$  gilt, folgt

$$\square R(t, x) = \delta(t) \delta^m(x). \quad (18)$$

Wir wollen Lösungen dieser Gleichung allgemeiner untersuchen und führen deswegen den folgenden Begriff ein.

**Definition 1.2.4.** *Eine Lösung der Distributionsgleichung*

$$-\square S(t, x) = \delta(t)\delta^m(x) \quad (19)$$

heißt **Greensche Funktion**.

Es ist günstig, in  $t$  und  $x$  die Fouriertransformation zu bilden,

$$\hat{S}(\omega, k) = \int dt \int dx S(t, x) e^{i\omega t - ikx} \quad (20)$$

$$S(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \hat{S}(\omega, k) e^{-i\omega t + ikx}. \quad (21)$$

Die Definitionsgleichung der Greenschen Funktion wird nämlich zu einer algebraischen Gleichung für  $\hat{S}$ ,

$$(\omega^2 - |k|^2)\hat{S}(\omega, k) = 1,$$

die unmittelbar aufgelöst werden kann. Einsetzen in (21) liefert eine Integraldarstellung für die Greensche Funktion,

$$S(t, x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{1}{\omega^2 - |k|^2} e^{-i\omega t + ikx}. \quad (22)$$

Wir wollen nun zunächst für festes  $k$  die  $\omega$ -Integration ausführen, also das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - |k|^2} d\omega$$

berechnen. In den Fällen  $t > 0$  und  $t < 0$  fällt der Integrand exponentiell ab falls  $\text{Im } \omega$  nach  $-\infty$  bzw.  $+\infty$  strebt. Wir können das  $\omega$ -Integral also in der unteren bzw. oberen komplexen Halbebene schließen. Wir erhalten dann ein geschlossenes Kontourintegral, welches mit Hilfe des Residuensatzes ausgewertet werden kann. Leider sind die Pole des Integranden  $\omega = \pm|k|$  reell und liegen somit genau auf dem Kontour. Diese Schwierigkeit kann folgendermaßen verstanden werden: Wählt man unterschiedliche Integrationswege um die Pole herum, so ändert sich der Wert des Integrals um ein Vielfaches der Residuen bei  $\omega = \pm|k|$ . Das Integral (22) wird also um einen Beitrag

$$c_1 e^{-i|k|t + ikx} + c_2 e^{i|k|t + ikx}$$

(mit komplexen Koeffizienten  $c_{1/2}$ ) abgeändert. Wie man sofort verifiziert, sind diese ebenen Wellen Lösungen der homogenen Wellengleichung und fallen in (19) heraus. Somit spiegelt die Schwierigkeit, das Kontourintegral auszuwerten, also genau die Uneindeutigkeit der Greenschen Funktion wieder. Sind wir nur an speziellen Greenschen Funktionen interessiert, können wir das Kontour nach Belieben um die

Pole herumlegen. Um anzuzeigen, wie man dies tut, ist es bequem, die Pole um ein kleines  $\varepsilon$  in der komplexen Ebene zu verschieben. Dies liefert ein eindeutiges Kontour, und wir lassen anschließend  $\varepsilon$  nach null streben. Je nachdem, wie man die Pole auf diese Weise “infinitesimal verschiebt”, erhält man unterschiedliche Greensche Funktionen, die hier nicht im einzelnen diskutiert werden sollen. Besonders interessant sind die folgenden Fälle:

**Definition 1.2.5.** *Die Distributionen*

$$S^\vee(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{e^{-i\omega t + ikx}}{(\omega - |k| - i\varepsilon)(\omega + |k| - i\varepsilon)}$$

$$S^\wedge(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{e^{-i\omega t + ikx}}{(\omega - |k| + i\varepsilon)(\omega + |k| + i\varepsilon)}$$

heißen **avancierte** bzw. **retardierte Greensche Funktion**.

Führen wir die  $\omega$ -Integration mit dem Residuensatz aus, ergibt sich

$$S^\vee(t, x) = \frac{i}{2} \theta(-t) \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{1}{|k|} (e^{-i|k|t} - e^{i|k|t}) e^{ikx} \quad (23)$$

$$S^\wedge(t, x) = -\frac{i}{2} \theta(t) \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{1}{|k|} (e^{-i|k|t} - e^{i|k|t}) e^{ikx} \quad (24)$$

( $\theta$  ist die Heaviside-Funktion  $\theta(\tau) = 1$  für  $\tau \geq 0$  und  $\theta(t) = 0$  sonst). Man sieht also, dass  $S^\vee$  und  $S^\wedge$  für positives bzw. negatives  $t$  verschwinden! Dies ist der Grund für die Namen “avanciert” und “retardiert”.

**Bemerkung 1.2.6.** (i) *Verwendet man, dass die Greenschen Funktionen gemäß Def. 1.2.5 invariant unter Lorentztransformationen sind, folgt unmittelbar, dass der Träger von  $S^\vee$  und  $S^\wedge$  im unteren bzw. oberen Lichtkegel liegt, also*

$$\begin{aligned} \text{supp } S^\vee &\subset \{(t, x) \mid t \leq |x|\}, \\ \text{supp } S^\wedge &\subset \{(t, x) \mid t \geq |x|\}. \end{aligned}$$

*Dies werden wir später auch durch direkte Rechnung erhalten.*

(ii) *Die Greenschen Funktionen werden in der Physik auch **Propagatoren** genannt. Allerdings ist die Sprechweise nicht eindeutig; manche Autoren verwenden den Begriff Propagator auch (oder sogar ausschließlich) für Lösungen der homogenen Gleichung. Insbesondere wird die kausale Distributionslösung*

$$\frac{1}{2\pi i} (S^\vee - S^\wedge)$$

**Feynman-Propagator** genannt.

Der folgende Satz stellt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Fundamentallösung und der Greenschen Funktion her.

**Satz 1.2.7.**

$$R = -S^\vee$$

**Beweis.** Wegen (18) und (19) ist  $u := R + S^\vee$  eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Da  $R$  und  $S^\vee$  beide für  $t < 0$  verschwinden (siehe (14) und (24)), ist außerdem  $u|_{t=-1} \equiv 0 \equiv \partial_t u|_{t=-1}$ . Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Cauchy-Problems, Satz 1.2.1, ist  $u$  identisch null.  $\square$

Nach diesem Satz können die Begriffe “Fundamentallösung” und “retardierte Greenfunktion” miteinander identifiziert werden.

**1.3. Die Wellengleichung bei ungerader Raumdimension, das Huygenssche Prinzip.** Wir wollen nun die Fundamentallösung genauer berechnen; wir beginnen mit dem Fall  $m$  ungerade. Da die eindimensionale Wellengleichung bereits in Abschnitt 1.1 behandelt wurde, können wir  $m \geq 2$  annehmen. Unsere Aufgabe besteht darin, die Integrale in (24) zu berechnen. Wir wählen als  $k$ -Koordinaten  $(K, \vartheta, \Omega)$ , wobei  $K = |k|$ ,  $\vartheta$  ist der Winkel zwischen  $k$  und  $x$ , und  $\Omega$  sind Koordinaten auf  $S^{m-2} = S^{m-1} \cap \{k \mid k \cdot x = 0\}$ . Dann können wir die Fundamentallösung nach Satz 1.2.7 und (24) in der Form

$$\begin{aligned} R(t, x) &= \frac{i}{2} \theta(t) \frac{\Omega_{m-2}}{(2\pi)^m} \int_0^\infty K^{m-1} dK \frac{1}{K} (e^{-iKt} - e^{iKt}) \\ &\quad \times \int_0^\pi (\sin \vartheta)^{m-2} e^{iKr \cos \vartheta} d\vartheta \end{aligned} \quad (25)$$

schreiben, wobei  $r = |x|$  und  $\Omega_{m-2}$  das Volumen von  $S^{m-2}$  bezeichnet. Dieser Ausdruck sieht zwar kompliziert aus, die Integrale lassen sich aber recht elegant berechnen. Zunächst führen wir die Integrationsvariable  $u = \cos \vartheta$  ein; es ist dann  $du = -\sin \vartheta$  und  $(\sin \vartheta)^{m-3} = (1 - u^2)^{(m-3)/2}$ . Verwendet man, dass  $m$  ungerade ist, so lassen sich die beiden Terme  $e^{\pm iKt}$  zu einem Integral über  $K \in \mathbb{R}$  zusammenfassen,

$$R(t, x) = \theta(t) \frac{i\Omega_{m-2}}{2(2\pi)^m} \int_{-\infty}^\infty dK K^{m-2} e^{-iKt} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{iKru} du.$$

Der Faktor  $K^{m-2}$  kann mit  $t$ -Ableitungen umgeschrieben werden,

$$R(t, x) = \theta(t) \frac{i\Omega_{m-2}}{2(2\pi)^m} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-2} \int_{-\infty}^{\infty} dK e^{-iKt} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{iKru} du.$$

Nun können nacheinander die  $K$ - und  $u$ -Integrationen ausgeführt werden,

$$\begin{aligned} R(t, x) &= \theta(t) \frac{i\Omega_{m-2}}{2(2\pi)^{m-1}} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-2} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} \delta(t - ru) du \\ &= \theta(t) \frac{i\Omega_{m-2}}{2(2\pi)^{m-1}} \left( i \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-2} \left( 1 - \frac{t^2}{r^2} \right)^{\frac{m-3}{2}} \frac{1}{r} \theta(r - |t|). \end{aligned}$$

Schließlich fassen wir die Faktoren  $i$  zusammen und erhalten den reellen Ausdruck

$$R(t, x) = -\theta(t) \frac{\Omega_{m-2}}{2(2\pi)^{m-1}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m-2} \left( \frac{t^2}{r^2} - 1 \right)^{\frac{m-3}{2}} \frac{1}{r} \theta(r - |t|). \quad (26)$$

Im physikalisch interessanten Fall  $m = 3$  vereinfacht sich dies zu

$$R(t, x) = \theta(t) \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \theta(|t| - r) \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - r)}{r}. \quad (27)$$

Diese Greensche Funktion ist aus der Elektrodynamik wohlbekannt. Es ist bemerkenswert, dass die Fundamentallösung (27) nur einen Beitrag für  $t = r$  (also auf dem Lichtkegel) hat. Dies ist tatsächlich auch in (26) der Fall. Denn  $\left( \frac{t^2}{r} - 1 \right)^{\frac{m-3}{2}}$  ist in  $t$  ein Polynom vom Grade  $m - 3$ , und da (26)  $m - 2$   $t$ -Ableitungen enthält, muß wenigstens eine dieser Ableitungen auf den Term  $\theta(|t| - r)$  wirken, was einen Faktor  $\delta^{(k)}(|t| - r)$ ,  $k \geq 0$ , liefert. Wir sehen also, dass

$$R(t, x) = 0 \quad \text{für } t \neq |x| \quad (m \text{ ungerade und } \geq 3). \quad (28)$$

Verwendet man diese Tatsache in der Duhamel-Darstellung, so erhält man eine sehr starke Aussage für das Abhängigkeitsgebiet:

**Satz 1.3.1.** (*Huygensches Prinzip*)

*Ist die Raumdimension  $m$  ungerade und  $\geq 3$ , so hängt die Lösung  $\phi$  des Cauchy-Problems (9) an der Stelle  $(t, x)$  nur ab von*

$$\begin{aligned} \phi_0(y), \nabla \phi_0(y), \dots, \nabla^{\frac{m-1}{2}} \phi_0(y) & \quad \text{mit } |y - x| = t \\ \phi_1(y), \nabla \phi_1(y), \dots, \nabla^{\frac{m-3}{2}} \phi_0(y) & \quad \text{mit } |y - x| = t \\ \rho(\tau, y), \nabla \rho(\tau, y), \dots, \nabla^{\frac{m-3}{2}} \rho(\tau, y) & \quad \text{mit } |y - x| = t - \tau \end{aligned}$$

**Beweis.** Wegen (28) und der Duhamel-Darstellung (16) ist klar, dass  $\phi(t, x)$  nur vom Verhalten von  $\phi_0, \phi_1$  und  $\rho$  in einer Umgebung der Punkte  $(\tau, y)$  mit  $|y - x| = t - \tau$  abhängen. Die Ordnung der Ableitungen erhält man, wenn man die Singularität von (26) auf dem Lichtkegel untersucht. Der Faktor  $\left(1 - \frac{t^2}{r^2}\right)^{\frac{m-3}{2}}$  verschwindet auf dem Lichtkegel mit der Ordnung  $\frac{m-3}{2}$ . Damit liefern die  $t$ -Ableitungen eine Singularität  $\sim \delta^{(k)}(t - r)$  mit  $k \leq (m - 2) - 1 - \frac{m-3}{2} = \frac{m-3}{2}$ . Bei schwacher Auswertung (16) werden die Ableitungen der  $\delta$ -Distribution zu Ableitungen der Testfunktionen, die dann auf dem Lichtkegel ausgewertet werden.  $\square$

Anschaulich ausgedrückt bedeutet dieses Ergebnis, dass sich die Anfangswerte und die Inhomogenität mit Lichtgeschwindigkeit (und nicht etwa langsamer) ausbreiten. Diese Beobachtung geht (für  $m = 3$ ) auf Huygens zurück; wir haben hier zusätzlich die Ordnung der relevanten Ableitungen bestimmt. Es ist interessant, dass man für eine stetige Lösung in höherer Dimension eine höhere Regularität voraussetzen muß. Dies kann man als einen ‐Fokussierungseffekt‐ verstehen, also dass in höherer Dimension Singularitäten aus verschiedenen Richtungen aufeinander treffen können.

**1.4. Die Wellengleichung bei gerader Raumdimension.** Die Integraldarstellung für die Fundamentallösung (25) ist auch in gerader Dimension gültig und kann auch dann genau berechnet werden. Dies ist allerdings weniger elegant als in Fall  $m$  ungerade. Deshalb greifen wir auf die klassische sogenannte **Abstiegsmethode** zurück, mit der sich die Raumdimension verkleinern und sich somit die Fälle  $m$  gerade und  $m$  ungerade aufeinander zurückführen lassen.

Wir bezeichnen Punkte im  $\mathbb{R}^{m+1}$  mit einer Tilde und fassen die ersten  $m$  Komponenten als Vektor im  $\mathbb{R}^m$  auf, also z.B.  $\mathbb{R}^{m+1} \ni \tilde{x} = (x, x_{m+1})$  mit  $x \in \mathbb{R}^m, x_{m+1} \in \mathbb{R}$ . Zu einer Lösung des Cauchy-Problems (9) können wir eine Lösung des  $(m + 1)$ -dimensionalen Cauchy-Problems konstruieren, indem wir die Lösung sowie die Anfangswerte und die Inhomogenität in Raumrichtung konstant fortsetzen, also

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^{m+1}}) \tilde{\phi}(t, \tilde{x}) &= \tilde{\rho}(t, \tilde{x}) \\ \tilde{\phi}|_{t=0} &= \tilde{\phi}_0, \quad \partial_t \tilde{\phi}|_{t=0} = \tilde{\phi}_1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

mit  $\tilde{\phi}(t, \tilde{x}) = \phi(t, x)$ ,  $\tilde{\rho}(t, \tilde{x}) = \rho(t, x)$  und  $\tilde{\phi}_{0/1}(\tilde{x}) = \phi_{0/1}(x)$ . Die Lösung des Cauchy-Problems (29) kann nun aber mit der Duhamel-Darstellung und der Fundamentallösung (27), die wir im folgenden zur

Deutlichkeit mit  $R_{m+1}$  bezeichnen, gelöst werden,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(t, \tilde{x}) &= \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \partial_t R_{m+1}(t, \tilde{x} - \tilde{y}) \tilde{\phi}_0(t, \tilde{y}) d\tilde{y} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{m+1}} R_{m+1}(t, \tilde{x} - \tilde{y}) \tilde{\phi}_1(\tilde{y}) d\tilde{y} \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^{m+1}} d\tilde{y} R_{m+1}(t - \tau, \tilde{x} - \tilde{y}) \tilde{\rho}(\tau, \tilde{y}) d\tilde{y}.\end{aligned}$$

Da  $\tilde{\phi}_0$ ,  $\tilde{\phi}_1$  und  $\tilde{\rho}$  nicht von  $y_{m+1}$  abhängen, können wir die zugehörige Integration ausführen und erhalten

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(t, \tilde{x}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \partial_t R_m(t, x - y) \phi_0(y) dy + \int_{\mathbb{R}^m} R_m(t, x - y) \phi_1(y) dy \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int dy R_m(t - \tau, x - y) \rho(\tau, y) dy\end{aligned}\quad (30)$$

mit

$$R_m(t, x) := \int dx_{m+1} R_{m+1}(t, \tilde{x}).$$

An (30) sieht man, dass  $\tilde{\phi}$  von  $x_{m+1}$  unabhängig ist. Setzen wir

$$\phi(t, x) = \tilde{\phi}(t, \tilde{x})$$

mit z.B.  $x_{m+1} = 0$ , so ist  $\phi$  Lösung des ursprünglichen Cauchy-Problems (9), und (30) liefert die Duhamel-Darstellung für  $\phi$  mit  $R = R_m$ .

**Lemma 1.4.1.** (*Absteigemethode*)

*Die Fundamentallösungen in Raumdimension  $m$  erhält man aus derjenigen in Dimension  $m + 1$  über die Gleichung*

$$R_m(t, x) = \int dx_{m+1} R_{m+1}(t, (x, x_{m+1})).\quad (31)$$

Insbesondere läßt sich die Fundamentallösung in gerader Dimension aus derjenigen in ungerader Dimension, (26), berechnen. Beispielsweise erhält man in zwei Raumdimensionen

$$\begin{aligned}R_2(t, x, y) &= \int dz R_3(t, x, y, z) \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{4\pi t} \int \delta(t - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dz.\end{aligned}$$

Das Integral kann mit Hilfe der Formel

$$\int \delta(f(\tau))d\tau = \sum_{\tau \in f^{-1}(0)} \frac{1}{|f'(\tau)|}$$

ausgeführt werden, und man erhält

$$R_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (32)$$

In höherer Dimension kann die Rechnung analog durchgeführt werden, dies ist aber etwas komplizierter. Wir sparen uns die Einzelheiten. An (31) sieht man, dass die Fundamentallösung einen Beitrag auch im Inneren des Lichtkegels hat. Somit ist das Huygensche Prinzip in gerader Raumdimension i.a. verletzt. Immerhin haben wir die folgende schwächere Aussage.

**Satz 1.4.2.** (*Kausalität*)

*Ist die Raumdimension  $m$  gerade, so hängt die Lösung  $\phi$  des Cauchy-Problems (9) an der Stelle  $(t, x)$  nur ab von den Anfangswerten  $\phi_0^{(y)}$  und  $\phi_1(y)$  im Ball  $|x - y| \leq t$ , und von der Inhomogenität  $\rho(\tau, y)$  im Kegel  $|x - y| \leq t - \tau$ .*

**Beweis.** Wegen der Duhamel-Darstellung, Thm. 1.2.3, genügt es zu zeigen, dass

$$R(t, x) = 0 \quad \text{falls} \quad |x| > t > 0.$$

Sei also  $(t, x)$  gegeben mit  $|x| > t$ . Gemäß (26) hat die Fundamentallösung in ungerader Dimension  $m + 1$  den Träger im unteren Lichtkegel, also  $R_{m+1}(t, \tilde{x}) = 0$  falls  $|\tilde{x}| > t > 0$ . Setzen wir  $\tilde{x} = (x, x_m)$ , so verschwindet also  $R_{m+1}(t, \tilde{x})$  und wegen (31) auch  $R_m(t, x)$ .

**1.5. Integration längs Charakteristiken, ein charakteristisches Anfangswertproblem.** Bei der eindimensionalen Wellengleichung in Abschnitt 1.1 hatten wir Lichtkegelkoordinaten kennengelernt. Ähnliche Koordinaten sind auch in höherer Dimension nützlich, um das Verhalten der Lösungen in einer Umgebung des Lichtkegels zu untersuchen. Sei  $\phi(t, x)$  eine Lösung der Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m})\phi(t, x) = \delta(t, x) \quad (33)$$

(mit noch nicht näher spezifizierten Anfangswerten). In Polarkoordinaten  $(t, r, \omega)$  mit  $r = |x|$  und  $\omega \in S^{m-1}$  haben wir

$$\left( \partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{m-1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{m-1}} \right) \phi = \rho,$$

wobei  $\Delta_{S^{m-1}}$  den Laplace-Operator auf der Sphäre bezeichnet. Setzen wir nun

$$\phi = r^{-\frac{m-1}{2}} \varphi \quad (34)$$

und führen anstelle von  $t$  und  $r$  die neuen Variablen

$$u = \frac{1}{2}(t+r), \quad v = \frac{1}{2}(t-r)$$

ein, so transformiert sich die Wellengleichung in

$$(\partial_u \partial_v - \frac{1}{4}(m-1)(m-3) \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{m-1}}) \varphi = r^{\frac{m-1}{2}} \rho. \quad (35)$$

Wegen der zusätzlichen Winkelableitung läßt sich diese Gleichung für  $m \geq 2$  nicht durch einfache Integration lösen. Bei Integration in  $u$  fallen aber immerhin die  $u$ -Ableitungen heraus,

$$\begin{aligned} & |\partial_v \varphi(u, v, \omega)|_{u=u_0}^{u=u_1} \\ &= \int_{u_0}^{u_1} \left\{ \left( \frac{(m-1)(m-3)}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{m-1}} \right) \varphi(u, v, \omega) + r^{\frac{m-1}{2}} \rho(u, v, \omega) \right\} du \end{aligned}$$

(wir fassen hier  $r$  als implizite Funktion von  $u$  und  $v$  auf). Nach Verschieben des Koordinatenursprungs können wir  $v = 0$  annehmen. Mit (34) erhalten wir das folgende Resultat.

**Satz 1.5.1.** (*Integration längs Charakteristiken*)

Sei  $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$  Lösung der Wellengleichung (33). Dann ist für  $0 \leq u_0 \leq u_1$ ,  $v = 0$  und  $\omega \in S^{m-1}$

$$\left| \partial_v \left( r^{\frac{m-1}{2}} \phi \right) \right|_{u=u_0}^{u=u_1} = \int_{u_0}^{u_1} r^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \left( \frac{(m-1)(m-3)}{4r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^{m+1}} \right) \phi + \rho \right\} du$$

Man beachte, dass in diesem Satz stets  $v = 0$  und  $u \geq 0$  ist; also werden alle Funktionen auf dem oberen Lichtkegel mit Spitze am Ursprung ausgewertet (siehe Abb.2). Die  $v$ -Ableitung ist transversal zum Lichtkegel, während alle anderen Ableitungen tangential dazu sind.

Satz 1.5.1 zeigt, dass die Propagation der transversalen Ableitung von  $\phi$  längs des Lichtkegels durch die Randwerte von  $\phi$  auf dem Lichtkegel vollständig festgelegt sind. Die transversale Ableitung zu einer späteren Zeit läßt sich aus der transversalen Ableitung zu früherer Zeit durch ein Linienintegral über  $\phi$  und dessen tangentialen Ableitungen auf dem Lichtkegel ausdrücken. Die Wellengleichung (35) kann auch dann aufintegriert werden, wenn  $\phi$  singular ist. Als Beispiel betrachten wir den Fall, wenn  $\phi$  eine Unstetigkeit auf dem Lichtkegel besitzt.

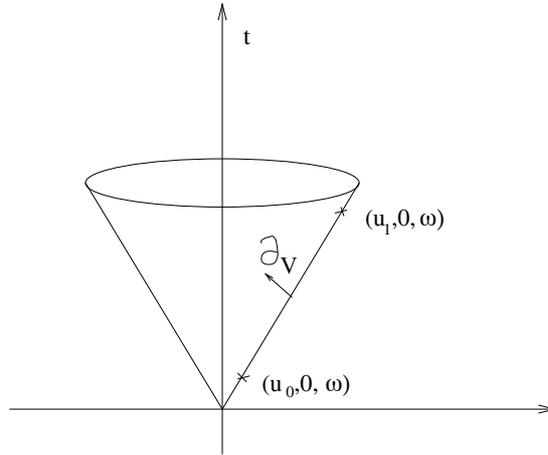


ABBILDUNG 2

**Satz 1.5.2.** (Ausbreitung von Unstetigkeiten)

Sei  $\phi \in C^2((t, r), t > r) \cup C^2((t, r), 0 < t < r)$  eine schwache Lösung der Wellengleichung. Dann erfüllt die Funktion

$$\hat{\phi}(u, \omega) = \lim_{v \searrow 0} \phi(u, v, \omega) - \lim_{v \nearrow 0} \phi(u, v, \omega)$$

für alle  $0 \leq u_0 < u_1$  und  $\omega \in S^{m-1}$  die Gleichung

$$u_1^{\frac{m-1}{2}} \hat{\phi}(u_1, \omega) = u_2^{\frac{m-1}{2}} \hat{\phi}(u_2, \omega) \quad (36)$$

**Beweis.** Unsere Lösung ist so regulär, dass wir die Ableitungen als Distribution berechnen können. Man erhält aus (35)

$$\partial_u \left( u^{\frac{m-1}{2}} \hat{\phi}(u, \omega) \right) \delta(v) = (\text{reguläre Distribution}).$$

Folglich muss  $\partial_u (u^{\frac{m-1}{2}} \hat{\phi}(u, \omega))$  verschwinden, und Integration liefert die Behauptung.  $\square$

Wir sehen also, dass der “Sprung” der Funktion  $\phi$  auf dem Lichtkegel in  $r$  polynomial wie  $r^{-\frac{m-1}{2}}$  abfällt. Hat man umgekehrt zwei glatte Lösungen der Wellengleichung im Innern bzw. Äußeren des Lichtkegels gegeben, welche die Sprungbedingungen (36) erfüllen, so erhält man durch “Verkleben” dieser Lösungen eine schwache Lösung der Wellengleichung im Halbraum  $t > 0$ .

Die Methode der Integration längs Charakteristiken kann in einem viel allgemeineren Rahmen angewendet werden:

- Anstelle des Lichtkegels kann eine allgemeine **charakteristische Hyperfläche**  $\mathcal{H}$  betrachtet werden. Schreibt man  $\mathcal{H}$  als

Nullstellenmenge einer Funktion  $f(t, x)$ , so ist  $\mathcal{H}$  charakteristisch, falls

$$|\partial_t f(t, x)|^2 = |\nabla f(t, x)|^2 \quad \text{für alle } (t, x) \in \mathcal{H}.$$

Fasst man  $\mathcal{H}$  als Hyperfläche im  $n$ -dimensionalen Minkowski-Raum auf, kann man diese Bedingung auch so verstehen, dass die Normale in jedem Punkt tangential zur Hyperfläche ist.

In diesem Fall geht in das Linienintegral die Geometrie der Fläche längs der Charakteristik ein.

- Man kann allgemeinere Gleichungen betrachten, beispielsweise hyperbolische Gleichungen in gekrümmter Raumzeit und/oder nichtlineare Gleichungen. Bei Systemen muss eine andere Definition von “charakteristisch” verwendet werden, die wir später kennenlernen werden (siehe Kapitel 2).

Aus Zeitgründen können wir auf diese Verallgemeinerungen der Methode der Integration längs Charakteristiken hier nicht eingehen.

Durch Durchdifferenzieren von (35) und anschließende Integration über  $u$  kann man iterativ auch Formeln für die höheren transversalen Ableitungen von  $\phi$  ableiten. Es ist wichtig zu bemerken, dass auch diese höheren Ableitungen eindeutig durch die Randwerte von  $\phi$  auf dem Lichtkegel bestimmt sind. Dies läßt vermuten, dass das Cauchy-Problem mit Anfangswerten auf dem Lichtkegel, also z.B.

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^m})\phi(t, x) &= 0 & \text{für } t > |x| \\ \phi(t = |x|, x) &= \phi_0(x) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

eine eindeutige Lösung besitzen sollte. Im folgenden wollen wir eine Lösung dieses **charakteristischen Anfangswertproblems** im physikalisch relevanten Fall  $m = 3$  konstruieren. Interessant ist dabei, dass man  $\phi$ , nicht aber  $\partial_t \phi$ , auf dem Lichtkegel vorschreibt (obwohl es sich ja um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt). Dieses Problem gibt uns die Möglichkeit, Methoden einzuführen, die auch auf andere hyperbolische Gleichungen im Minkowski-Raum anwendbar sind. Als Vorbereitung betrachten wir den Spezialfall, dass  $\phi_0 = \frac{1}{16\pi}$  eine Konstante ist. In diesem Fall können wir  $\phi = \frac{1}{16\pi}$  setzen. Es ist günstig,  $\phi$  außerhalb des Lichtkegels durch null fortzusetzen, also

$$\phi = \frac{1}{16\pi} \theta(t - |x|) = \frac{1}{16\pi} \theta(t^2 - r^2).$$

Durch die Unstetigkeit auf dem Lichtkegel ist  $\phi$  keine Distributionslösung der Wellengleichung, sondern für  $t > 0$

$$\begin{aligned} 16\pi \partial_t^2 \phi &= \partial_t(2t\delta(t^2 - r^2)) = 2\delta(t^2 - r^2) + 4t^2\delta'(t^2 - r^2) \\ 16\pi \partial_r^2 \phi &= -2\delta(t^2 - r^2) + 4r^2\delta'(t^2 - r^2) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} 16\pi \square \phi &= (\partial_t^2 - \partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r)\phi \\ &= 8\delta(t^2 - r^2) + 4(t^2 - r^2)\delta'(t^2 - r^2) = 4\delta(t^2 - r^2). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.7 und (27) wissen wir, dass

$$S^\wedge(t, x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - |x|)}{t}. \quad (38)$$

Hieran sehen wir, dass

$$\square \phi = -S^\wedge. \quad (39)$$

Im Hinblick auf das allgemeine Randwertproblem ist es günstig,  $\phi$  folgendermaßen mit einer Greenschen Funktion in Verbindung zu setzen: Wie man unmittelbar sieht, erfüllt das Fourierintegral

$$S_a^\wedge(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \frac{e^{-i\omega t + ikx}}{\omega^2 - |k|^2 - a + 2i\varepsilon\omega}, a > 0 \quad (40)$$

die Distributionsgleichung

$$(-\square - a)S_a^\wedge(t, x) = \delta(t)\delta^m(x), \quad (41)$$

und außerdem verschwindet  $S_a^\wedge(t, x)$  für negative  $t$  ( $S_a^\wedge$  ist die retardierte Greensche Funktion der Klein-Gordon-Gleichung). Im Limes  $a \searrow 0$  stimmt  $S_a^\wedge$  mit der retardierten Greenschen Funktion der Wellengleichung überein, wir schreiben

$$S_a^\wedge|_{a=0} = S^\wedge.$$

Leitet man (41) nach  $a$  ab, erhält man

$$\square \frac{d}{da}(S_a^\wedge)|_{a=0} = -S^\wedge. \quad (42)$$

Vergleicht man mit (39) und benutzt Eindeutigkeit (beachte, dass sowohl  $\phi$  als auch  $\frac{d}{da}(S_a^\wedge)|_{a=0}$  für negatives  $t$  verschwinden), erhält man schließlich

$$\phi = \frac{d}{da}(S_a^\wedge)|_{a=0}. \quad (43)$$

Um das allgemeine Randwertproblem zu lösen, betrachten wir zunächst für eine noch zu bestimmende Funktion  $f$  das folgende Faltungsintegral,

$$G[f](t, x) = \int d\tau \int dy S^\wedge(t - \tau, x - y) f(\tau, y) S^\wedge(\tau, y). \quad (44)$$

Durch Einsetzen von (38) sieht man, dass (44) außerhalb des Lichtkegels (also für  $t < |x|$ ) verschwindet. Im Innern des Lichtkegels (also für  $t > |x|$ ) reduziert sich (44) auf ein Integral über ein 2-dim. Ellipsoid (siehe Abb.3)

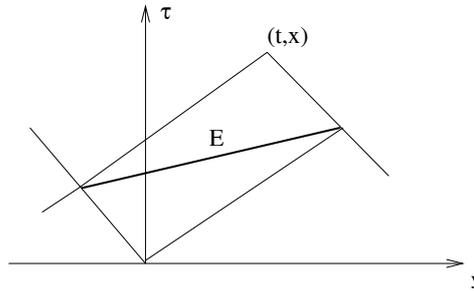


ABBILDUNG 3

Dieses Integral ist endlich, und damit ist  $G[f]$  gemäß (44) im Innern des Lichtkegels wohldefiniert. Durch Anwendung des Wellenoperators erhält man außerdem die Distributionsgleichung

$$-\square G(t, x) = f(t, x) S^\wedge(t, x), \quad (45)$$

und dies verschwindet für  $t > |x|$ . Wir sehen also, dass  $\phi(t, x)$  im Innern des Lichtkegels wie gewünscht die homogene Wellengleichung erfüllt und außerhalb des Lichtkegels verschwindet. Darum ist (44) ein vielversprechender Ansatz für die Lösung des Anfangswertproblems (37). Man beachte, dass  $f(\tau, y)$  in (44) nur für  $\tau = |y|$  eingeht. Das verbleibende Problem besteht darin, die Funktion  $f$  so zu bestimmen, dass  $\phi$  gemäß (44) die Anfangswerte in (37) erfüllt.

Wir wollen nun die Randwerte von (44) auf dem Lichtkegel berechnen. Im Limes  $t \rightarrow |x|$  degeneriert das Ellipsoid  $E$  in Abb.2 zu einer Strecke, und wir erwarten daher, dass die Randwerte durch ein Linienintegral über  $f$  ausgedrückt werden können. Um dies zu präzisieren, konstruieren wir zunächst eine weitere Lösung der Gleichung (45), wobei wir ähnlich zu (43) mit  $a$ -Ableitungen von  $S_a^\wedge$  arbeiten. Wir setzen

$$S^{(n)} = \left( \frac{d}{da} \right)^n S_a^\wedge|_{a=0} \quad (46)$$

**Lemma 1.5.3.** Für  $t > 0$  gilt

$$-\square \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^2 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) = f(t, x) S^\wedge(t, x) \quad (47)$$

**Beweis.** Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen von  $S^{(n)}$ . Differenziert man (41)  $(n + 1)$ -mal nach  $a$  und setzen dann  $a$  gleich null, erhält man in Verallgemeinerung von (42)

$$\square S^{(n+1)} = -(n + 1)S^{(n)}. \quad (48)$$

Als nächstes berechnen wir die Zeitableitung der Fourierdarstellung (40),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} S_a^\wedge(t, x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} (-i\omega) \frac{e^{-i\omega t + ikx}}{\omega^2 - |k|^2 - a + 2i\varepsilon\omega} \\ &= -\frac{i}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} e^{-i\omega t + ikx} \frac{\partial}{\partial \omega} \log(\omega^2 - |k|^2 - a + 2i\varepsilon\omega) \\ &= \frac{t}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} e^{-i\omega t + ikx} \log(\omega^2 - |k|^2 - a + 2i\varepsilon\omega). \end{aligned}$$

Durch  $(n + 1)$ -maliges Ableiten nach  $a$  erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} S^{(n+1)}(t, x) = -\frac{t}{2} S^{(n)}(t, x). \quad (49)$$

Analog hat man für die räumlichen Ableitungen

$$\nabla S^{(n+1)}(t, x) = \frac{x}{2} S^{(n)}(t, x). \quad (50)$$

Mit Hilfe der Relationen (48)-(50) erhält man für jeden Summanden in (47),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&= \int_0^1 \alpha (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n D_1 f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&\quad + \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) \partial_t S^{(n+1)}(t, x) \\
&\square \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&= \int_0^1 \alpha^2 (\alpha - \alpha^2) (\square^{n+1} f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&\quad - \int_0^1 \alpha (\alpha - \alpha^2)^n (tD_1 + xD_2) (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n)}(t, x) \\
&\quad - (n+1) \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n)}(t, x).
\end{aligned}$$

Die  $x$ - und  $t$ -Ableitungen können zu einer Ableitung in Richtung des Integrals kombiniert werden,

$$(t\partial_t + x\partial_x)(\square^n f)(\alpha t, \alpha x) = \alpha \frac{d}{d\alpha} (\square^n f)(\alpha t, \alpha x),$$

und partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
& \square \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)(\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&= -\delta_{n,0} f(t, x) S^\wedge(t, x) \\
&\quad - \int_0^1 \alpha^2 (\alpha - \alpha^2)^n (\square^{n+1} f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \\
&\quad + n \int_0^1 \alpha^2 (\alpha - \alpha^2)^{n-1} (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^n(t, x).
\end{aligned}$$

Nach Division durch  $n!$  und Summation über  $n$  sind die beiden letzten Terme teleskopisch und fallen heraus.  $\square$

Die eindeutige Lösbarkeit des Cauchy-Problems liefert unmittelbar, dass unsere beiden Lösungen von (45) übereinstimmen.

**Theorem 1.5.4.** *Die Distribution  $G[f]$ , (44), hat die Entwicklung*

$$G[f](t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (\alpha^2 - \alpha)^n (\square^n f)(\alpha t, \alpha x) S^{(n+1)}(t, x) \quad (51)$$

**Beweis.** Gemäß (45) und Lemma 1.5.3 erfüllen die linke und rechte Seite die gleiche inhomogene Wellengleichung; außerdem verschwinden sie wegen (44) und (46) beide für  $t < 0$ . Also ist die Differenz der beiden Seiten von (51) eine Lösung des Cauchy-Problems

$$\square \phi = 0, \quad \phi|_{t=-1} = 0 = \partial_t \phi|_{t=-1}$$

und verschwindet folglich identisch.  $\square$

Wir wollen dieses Ergebnis nun diskutieren und genauer erklären, in welchem Sinne es mathematisch zu verstehen ist. Das Fourierintegral (40) kann (mit Hilfe einer Integraltabelle oder mit Mathematica) leicht explizit berechnet werden. Entwickelt man die resultierenden Besselfunktionen nach Potenzen von  $a$ , erhält man

$$\begin{aligned}
S^{(0)}(t, x) &= -\frac{1}{2\pi} \theta(t - |x|) \delta(t^2 - |x|^2) \\
S^{(n+1)}(t, x) &= \frac{1}{8\pi} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(t^2 - |x|^2)^n}{4^n} \theta(t - |x|). \quad (52)
\end{aligned}$$

Folglich sind alle Summanden in (51) reguläre Distributionen. Die unendliche Reihe in (51) kann im Inneren des Lichtkegels als eine Entwicklung nach Potenzen von  $(t^2 - |x|^2)$  aufgefasst werden. Setzt man nur voraus, dass  $f$  glatt ist, so hat man keine punktweise Kontrolle über das Verhalten der höheren Ableitungen von  $f$ . Folglich kann man nicht erwarten, dass die unendliche Reihe in (51) absolut konvergiert. Um dieses Problem zu umgehen, könnte man eine Bedingung stellen, wie sich  $\square^n f$  als Funktion von  $n$  verhalten soll. Eine solche Bedingung würde jedoch implizieren, dass  $f$  reell analytisch ist, und dies scheint für physikalische Anwendungen zu restriktiv. Deshalb fassen wir (51) (ähnlich wie die Taylorreihe einer nicht-analytischen Funktion) als eine formale Reihe auf, die durch die Approximation der Partialsummen eine mathematische Bedeutung hat.

**Definition 1.5.5.** *Eine Distribution  $A(t, x)$  ist von der Ordnung  $\mathcal{O}((t^2 - |x|^2)^p)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  falls das Produkt*

$$(t^2 - |x|^2)^{-p} A(t, x)$$

*eine reguläre Distribution ist. Sie hat die **Lichtkegelentwicklung***

$$A(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{[n]}(t, x)$$

*falls die Distribution  $A^{[n]}(t, x)$  von der Ordnung  $\mathcal{O}((t^2 - |x|^2)^p)$  sind und die Partialsummen  $A$  approximieren in dem Sinne, dass*

$$A(t, x) - \sum_{n=0}^{n_0} A^{[n]}(t, x) \quad \text{ist von der Ordnung} \quad \mathcal{O}((t^2 - |x|^2)^{n_0+1})$$

Gemäß (52) ist (51) die Lichtkegelentwicklung von  $G[f]$ . Da (51) Liniennintegrale enthält, ist (51) eine **nichtlokale Entwicklung** nach der Ordnung auf dem Lichtkegel.

Nach diesen Vorbereitungen können wir das charakteristische Anfangswertproblem (37) leicht lösen. Nach Theorem 5.4 und (52) hat  $G[f]$  auf dem Lichtkegel nämlich die Randwerte

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow |x|} G[f](t, x) = \frac{1}{8\pi} \int_0^1 f(\alpha|x|, \alpha x), \quad (53)$$

und wir müssen lediglich  $f$  so bestimmen, dass die Bedingungen in (37) erfüllt sind.

**Theorem 1.5.6.** *Eine Lösung des charakteristischen Anfangswertproblems (37) ist gegeben durch*

$$\phi = G[f] \quad \text{mit} \quad f(t, x) = 8\pi(t\partial_t + x^j \nabla_j + 1)\phi_0(t, x). \quad (54)$$

Diese Lösung hat die Lichtkegelentwicklung

$$\phi(t, x) = \phi_0(t, x) \quad (55)$$

$$+ 8\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \alpha (\alpha - \alpha^2)^{n-1} \square^n \phi_0(\alpha t, \alpha x) d\alpha S^{(n+1)}(t, x). \quad (56)$$

**Beweis.** Setzt man  $f$  gemäß (54) in (53) ein, kann man die partiellen Ableitungen als Ableitung nach  $\alpha$  schreiben,

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^1 f(\alpha t, \alpha x) = \int_0^1 \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} + 1 \right) f(\alpha t, \alpha x),$$

und partielle Integration liefert  $G[f](|x|, x) = \phi_0(|x|, x)$ . Wegen (45) ist  $G[f](t, x)$  für  $t > |x|$  außerdem Lösung der homogenen Wellengleichung. Folglich ist  $G$  tatsächlich Lösung des Anfangswertproblems (37). Die Lichtkegelentwicklung (56) folgt unmittelbar durch Einsetzen von (54) in (51) und die Rechnung

$$\begin{aligned} \square^n (t\partial_t + x^j \nabla_j + 1) \phi_0(t, x) &= (t\partial_t + x^j \nabla_j) \square^n \phi_0 + (2n+1) \square^n \phi_0 \\ &= \int_0^1 (\alpha - \alpha^2)^n \left( \alpha \frac{d}{d\alpha} + (2n+1) \right) \square^n \phi_0(\alpha t, \alpha x) d\alpha \\ &= \delta_{n,0} \phi_0(t, x) + \int_0^1 n\alpha (\alpha - \alpha^2)^{n-1} \square^n \phi_0(\alpha t, \alpha x) d\alpha \end{aligned}$$

□

Da in diesem Theorem bei der Berechnung von  $G[f]$  gemäß (44) die Funktion  $f$  ausschließlich auf dem oberen Lichtkegel ausgewertet wird, kann  $\phi_0$  außerhalb des Lichtkegels beliebig abgeändert werden, ohne dass dies einen Einfluss auf  $\phi$  hätte. Dies ermöglicht uns sofort, einen Zusammenhang zur Integration längs Charakteristiken, Satz 1.5.1, herzustellen. Wählen wir nämlich Lichtkegelkoordinaten  $(u, v, \omega)$  und  $\phi_0 = \phi_0(u, \omega)$ , so liefert (56)

$$\phi(u, v) = \phi_0(u, v) + 8\pi \frac{1}{u} \int_0^u \tau \left( \frac{1}{\tau^2} \Delta_{S^2} \phi \right) (\tau, \omega) d\tau S^{(1)}(u, v),$$

und Ableitung nach  $u$  liefert genau die Formel von Satz 1.5.1 (mit  $\rho \equiv 0$  und  $m = 3$ ).

Die Lichtkegelentwicklung ist somit eine Verallgemeinerung der Integration längs Charakteristiken, mit der man unmittelbar auch Formeln für die höheren Entwicklungsterme erhält. Mit der Lichtkegelentwicklung lassen sich also Lösungen hyperbolischer Gleichungen im Minkowski-Raum explizit in einer Umgebung des Lichtkegels untersuchen.

**1.6. Einige einfache Abschätzungen.** Das wichtigste Hilfsmittel bei der Untersuchung hyperbolischer Gleichungen sind die Energieabschätzungen. Für die Wellengleichung sind sie uns bereits in Abschnitt 1.2 begegnet, und wir werden sie später in einem allgemeinen Rahmen genauer behandeln (siehe Abschnitt 2.3). Da die Wellengleichung besonders einfach ist, gibt es für sie einige zusätzliche Abschätzungen. In diesem Abschnitt betrachten wir Abschätzungen, die unmittelbar aus der Duhamel-Darstellung folgen; im nächsten Abschnitt werden dann die tiefergehenden Strichartz-Abschätzungen behandelt.

Wir beschränken uns zur Einfachheit auf den dreidimensionalen Fall ( $m = 3$ ) und die homogene Wellengleichung ( $\rho \equiv 0$ ). Die Duhamel-Darstellung, Theorem 1.2.3, vereinfacht sich dann zu

$$\phi(t, x) = \int \partial_t R(t, x - y) \phi_0(y) dy + \int R(t, x - y) \phi_1(y) dy,$$

und nach Einsetzen der Fundamentallösung (27) kann man die Integrale folgendermaßen umformen,

$$\begin{aligned} \int R(t, x - y) \phi_1(y) dy &= \frac{1}{4\pi t} \int \delta(t - |x - y|) \phi_1(y) dy \\ \int \partial_t R(t, x - y) \phi_0(y) dy &= \frac{1}{4\pi} \partial_t \frac{1}{t} \int \delta(t - |x - y|) \phi_0(y) dy \\ &= -\frac{1}{4\pi t^2} \int \delta(t - |x - y|) \phi_0(y) dy + \frac{1}{4\pi t} \int \delta'(t - |x - y|) \phi_0(y) dy \\ \int \delta'(t - |x - y|) \phi_0(y) dy &= - \int \frac{(y - x)^j}{|y - x|} \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \delta(t - |x - y|) \right) \phi_0(y) dy \\ &= \int \delta(t - |x - y|) \frac{\partial}{\partial y^j} \left( \frac{(y - x)^j}{|y - x|} \phi_0(y) \right) dy \\ &= \frac{2}{t} \int \delta(t - |x - y|) \phi_0(y) dy + \int \delta(t - |x - y|) \nabla_\nu \phi_0(y) dy \end{aligned}$$

mit  $\nu = (y - x)/|y - x|$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\phi(t, x) &= \frac{1}{4\pi t} \int \delta(t - |x - y|) \phi_1(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{4\pi t^2} \int \delta(t - |x - y|) \phi_0(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{4\pi t} \int \delta(t - |x - y|) \nabla_\nu \phi_0(y) dy\end{aligned}\quad (57)$$

Schätzt man  $\phi_{0,1}$  durch ihr Supremum ab, erhält man sofort eine punktweise Abschätzung.

**Satz 1.6.1.** *Sei  $\phi$  Lösung des Cauchy-Problems*

$$\left. \begin{aligned}(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^3})\phi &= 0 \\ \phi|_{t=0} &= \phi_0, \quad \partial_t \phi|_{t=0} = \phi_1\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Dann ist

$$|\phi(t, x)| \leq t \sup_{\mathbb{R}^3} (|\phi_1| + |\nabla \phi_0|) + \sup_{\mathbb{R}^3} |\phi_0|.$$

**Beweis.** Verwende in (57) die Abschätzung

$$\begin{aligned}|\int \delta(t - |x - y|) \cdot f(y) dy| &\leq \sup_{\mathbb{R}^3} |f| \int \delta(t - |x - y|) dy \\ &= 4\pi t^2 \sup_{\mathbb{R}^3} |f|.\end{aligned}$$

□

Die obige Abschätzung nutzt nicht aus, dass die Träger der Integranden in (57) zu verschiedenen Zeiten disjunkt sind (was wiederum das Huygensche Prinzip widerspiegelt). Diese Tatsache kann man für die Abschätzung von Zeitintegralen ausnutzen. Betrachten wir zunächst den Spezialfall  $\phi_0 \equiv 0$ . Dann vereinfacht sich (57) zu

$$\phi(t, x) = \frac{1}{4\pi t} \int \delta(t - |x - y|) \phi_1(y) dy$$

und es folgt

$$\int_0^\infty t |\phi(t, x)| dt = \frac{1}{4\pi} \int dt \int \delta(t - |x - y|) |\phi_1(y)| dy = \int |\phi_1(y)| dy.$$

Wir erhalten also die Ungleichung

$$\int_0^\infty t |\phi(t, x)| dt \leq \|\phi_1\|_{L^1}. \quad (59)$$

Im allgemeinen Fall ist die Situation schwieriger, weil das Integral über  $\phi_0$  in (57) einen Vorfaktor  $t^{-2}$  hat, der für kleine Zeiten divergiert. Darum leiten wir für große und kleine Zeiten getrennte Abschätzungen her.

**Satz 1.6.2.** *Sei  $\phi$  Lösung des Cauchy-Problems (58). Dann ist*

$$\int_0^1 t^2 |\phi(t, x)| dt \leq \|\phi_0\|_{H^{1,1}} + \|\phi_1\|_{L^1}$$

$$\int_1^\infty t |\phi(t, x)| dt \leq \|\phi_0\|_{H^{1,1}} + \|\phi_1\|_{L^1}$$

**Beweis.** Folgt analog zu (59) durch Integration von (57) und Abschätzung des Integranden.  $\square$

### 1.7. Die Strichartz-Abschätzungen in drei Raumdimensionen.

Wir betrachten zur Einfachheit das Cauchy-Problem

$$\left. \begin{array}{l} \square\phi(t, x) = 0 \quad \text{für } t > 0 \\ \phi|_{t=0} = 0, \quad \partial_t\phi|_{t=0} = f \end{array} \right\} \quad (60)$$

in Dimension  $m = 3$  (der Fall  $\phi|_{t=0} \neq 0$  und/oder mit Inhomogenität kann analog behandelt werden, ist aber etwas komplizierter). Unser Ziel besteht darin, eine Ungleichung der Form

$$\|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)} \leq c \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)} \quad \text{mit} \quad q = \frac{2m+2}{m-2} \quad (61)$$

abzuleiten. Man beachte, dass die Dimension der Integrationsgebiete auf der linken und rechten Seite der Ungleichung unterschiedlich sind. Ähnlich wie bei den Abschätzungen von Satz 1.6.2 bedeutet das Zeitintegral, dass die Ungleichung auch Information über das Langzeitverhalten von  $\phi$  liefert. Aber im Vergleich zu Satz 1.6.2 ist (61) sicher eine viel schönere und nützlichere Aussage. Ungleichungen vom Typ (61) wurden erstmals 1977 von Robert Strichartz bewiesen. Unser Beweis orientiert sich an der Originalarbeit und an Elias Stein, “Harmonic Analysis” (1993). Die Ungleichung (61) ist auch in allgemeiner Dimension  $m \geq 3$  richtig, der Beweis ist aber schwieriger. Für die meisten unserer Argumente spielt die Dimension keine Rolle; wir werden hervorheben, an welcher Stelle  $m = 3$  eingeht. Wir gehen in mehreren Schritten vor:

a) **Eine Fourierdarstellung für  $\phi$ .**

Da das Cauchy-Problem (60) nur für  $t > 0$  gestellt ist, können wir  $\phi$  für negative Zeiten beliebig wählen. Bei der Duhamel-Darstellung, Satz 1.2.3, war  $\phi(t, x)$  für  $t < 0$  identisch null. Nun wählen wir eine andere Fortsetzung, nämlich wir wählen  $\phi(t, x)$  für negatives  $t$  als Lösung des **rückwärts gerichteten Cauchy-Problems**

$$\left. \begin{aligned} \square\phi(t, x) &= 0 \quad \text{für } t < 0 \\ \phi|_{t=0} &= 0, \quad \partial_t\phi|_{t=0} = f \end{aligned} \right\}. \quad (62)$$

Durch Kombination der Duhamel-Darstellungen für (60) und (62) erhält man leicht eine Integraldarstellung für  $\phi$ , welche auch von unabhängigem Interesse ist. Für positives  $t$  haben wir für (60) die Duhamel-Darstellung

$$\phi(t, x) = - \int S^\wedge(t, x - y)f(y)dy, \quad t > 0. \quad (63)$$

Ersetzt man  $t$  durch  $-t$  und verwendet, dass  $S^\vee(-t, x) = S^\wedge(t, x)$ , so erhält man

$$\phi(t, x) = \int S^\vee(t, x - y)f(y)dy, \quad t < 0. \quad (64)$$

Da (63) und (64) für  $t < 0$  bzw.  $t > 0$  verschwinden, ist die Lösung von (60) und (62) einfach die Summe von (63) und (64). Wir erhalten also

$$\phi(t, x) = 2\pi i \int K(t, x - y)f(y)dy, \quad (65)$$

wobei  $K$  der *Feynman-Propagator*

$$K = \frac{1}{2\pi i}(S^\vee - S^\wedge)$$

ist. Die Fourier-Darstellung des Feynman-Propagators läßt sich leicht berechnen, denn

$$K(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \left( \frac{1}{(\omega - |k| - i\varepsilon)(\omega + |k| - i\varepsilon)} - \frac{1}{(\omega - |k| + i\varepsilon)(\omega + |k| + i\varepsilon)} \right) e^{-i\omega t + ikx}.$$

Das  $\omega$ -Integral reduziert sich auf zwei Konturintegrale um die beiden Pole, und der Residuensatz liefert

$$\begin{aligned} K(t, x) &= \int \frac{dk}{(2\pi)^{m+1}} \left( \frac{1}{2|k|} e^{-i|k|t} - \frac{1}{2|k|} e^{i|k|t} \right) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \delta(\omega^2 - |k|^2) \epsilon(\omega) e^{-i\omega t + ikx}, \end{aligned}$$

dabei ist  $\epsilon$  die Stufenfunktion  $\epsilon(\tau) = 1$  für  $\tau \geq 0$  und  $\epsilon(\tau) = -1$  sonst. Setzen wir dies in (65) ein führen die  $y$ -Integration aus, erhält man

$$\phi(t, x) = 2\pi i \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \delta(\omega^2 - |k|^2) \epsilon(\omega) \hat{f}(k) e^{-i\omega t + ikx}. \quad (66)$$

Da der Träger des Integranden auf dem Kegel  $\omega^2 = |k|^2$  liegt und Anwendung des Wellenoperators einen Faktor  $\omega^2 - |k|^2$  liefert, ist  $\phi$  offensichtlich (für alle  $t$ ) Lösung der homogenen Wellengleichung.

**b) Geometrische Formulierung, ein Dualitätsargument.**

Mit Hilfe der Fourierdarstellung (66) kann die zu beweisende Ungleichung (61) mit geometrischen Begriffen formuliert werden. Dazu sei  $\mathcal{H}$  der Doppelkegel im Impulsraum

$$\mathcal{H} = \{(\omega, k) \text{ mit } \omega^2 = |k|^2\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

und  $d\mu$  das folgende Maß mit Träger auf  $\mathcal{H}$ ,

$$d\mu = \frac{\delta(\omega^2 - |k|^2)}{2|k|} d\omega dk = \frac{dk}{4|k|^2}. \quad (67)$$

Außerdem führen wir auf  $\mathcal{H}$  die Funktion  $F$  ein,

$$F(\omega, k) = 2\omega \hat{f}(k) (= 2\epsilon(\omega)|k| \hat{f}(k)). \quad (68)$$

Das Theorem von Plancherel erlaubt es uns dann, die rechte Seite von (61) mit der  $L^2$ -Norm von  $F$  zu identifizieren, denn

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^m} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int \left| 2|k| \hat{f}(k) \right|^2 \frac{dk}{4|k|^2} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{H}} |F|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Andererseits stimmt die Fouriertransformation des Maßes  $Fd\mu$  bis auf eine Konstante mit  $\phi$  überein, denn nach (66) und (67), (68) gilt

$$\phi(t, x) = \frac{i}{(2\pi)^m} \int_{\mathcal{H}} F e^{-i\omega t + ikx} d\mu \equiv \frac{i}{(2\pi)^m} (Fd\mu)^\vee,$$

wobei “ $\vee$ ” die Fourier-Rücktransformation im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet (mit  $n = m + 1$ ). Folglich ist die Ungleichung (61) äquivalent dazu, dass es eine Konstante  $c$  gibt, so dass für alle  $F \in L^2(\mathcal{H}, d\mu)$  die Funktion  $(Fd\mu)^\vee$  in  $L^q(\mathbb{R}^{m+1})$  ist und

$$\|(Fd\mu)^\vee\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c \|F\|_{L^2(\mathcal{H}, d\mu)}. \quad (69)$$

Die Frage ist also, ob die Fouriertransformierte einer auf einer Hyperfläche gegebenen  $L^2$ -Funktion in  $L^q$  ist. In dieses Problem geht wesentlich die Geometrie der Hyperfläche ein.

Das folgende einfache Lemma ermöglicht es, anstelle von (69) das umgekehrte Problem zu untersuchen, also die Frage, für welche Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{R}^{m+1})$  die Fouriertransformierte  $\hat{f}(\omega, k)$  eine Einschränkung auf  $\mathcal{H}$  besitzt, die in  $L^2$  liegt. Der Beweis basiert auf Plancherel im  $\mathbb{R}^{m+1}$  und einem Dualitätsargument zwischen  $L^p$  und  $L^q$ , wobei

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{also} \quad p = \frac{2m+2}{m+4} \quad (70)$$

**Lemma 1.7.1.** *Die Ungleichung (69) gilt für alle  $F \in L^2(\mathcal{H}, d\mu)$  genau dann, wenn für alle  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\|\hat{g}\|_{L^2(\mathcal{H}, d\mu)} \leq c \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (71)$$

**Beweis.** Die Ungleichung (71) impliziert, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Fd\mu)^\vee g = \int_{\mathcal{H}} F \hat{g} d\mu \leq c \|F\|_{L^2(\mathcal{H}, d\mu)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{m+1})}.$$

Da dies für alle  $g \in L^p$  gilt, folgt, dass  $(Fd\mu)^\vee \in L^q$  mit einer durch (69) beschränkten Norm. Umgekehrt folgt aus (69), dass

$$\int_{\mathcal{H}} F \hat{g} d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} (Fd\mu)^\vee g \leq c \|F\|_{L^2(\mathcal{H}, d\mu)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

und Dualität liefert (71).  $\square$

c) **Die Littlewood-Paley-Zerlegung des Kegels in "Streifen".** Unsere Aufgabe besteht darin, die Ungleichung (71) mit  $p$  gemäß (70) zu beweisen. Eine Schwierigkeit besteht darin, dass der Kegel  $\mathcal{H}$  nicht kompakt ist. Denn in unseren Rechnungen wird die Fouriertransformierte von  $\mathcal{H}$  (oder genauer  $(d\mu)^\vee$ ) auftreten, und diese Fouriertransformierte hat als Folge der Unbeschränktheit von  $\mathcal{H}$  Singularitäten (genauer ist  $(d\mu)^\vee(t, x)$  auf dem Lichtkegel  $|t| = |x|$  singulär, ähnlich wie wir das schon bei den Fundamentallösungen kennengelernt haben). Strichartz vermeidet dieses Problem durch analytische Fortsetzung in die komplexe Ebene. Weil dies ein heikles Argument ist, verwenden wir eine andere Methode, die auf  $m = 3$  beschränkt ist, uns aber dafür erlaubt, einige Techniken kennenzulernen, die von allgemeinerem Interesse sind. Dazu zerlegen wir den Kegel zunächst in kompakte Teilflächen, beweisen die Ungleichung (71) anschließend für diese kompakten Flächen und folgern zuletzt, daß (71) dann auch für den gesamten Kegel gilt.

Wir wählen als “glatte Abschneidefunktion” eine Testfunktion  $\eta \in C_c^\infty$  mit

$$\eta(-x) = \eta(x), \quad \text{supp } \eta \subset [-1, 1] \quad \text{und} \quad \eta|_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} = 1.$$

Dann bilden wir die Funktionen  $(\chi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  mit

$$\chi_\ell(x) = (1 - \eta(2^{-\ell}x))\eta(2^{-\ell-1}x)$$

auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  eine Zerlegung der Eins

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \chi_\ell(x) = 1 \quad (x \neq 0).$$

Wir zerlegen das Maß  $d\mu$  gemäß

$$d\mu = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d\mu_\ell \quad \text{mit} \quad d\mu_\ell = \chi_\ell(\omega)d\mu.$$

Das Maß  $d\mu_\ell$  hat den Träger auf der kompakten Hyperfläche

$$\mathcal{H}_\ell = \mathcal{H} \cap \{(\omega, k) \mid 2^{\ell-1} < |\omega| < 2^{\ell+1}\}.$$

Eine solche Zerlegung im Impulsraum wird **Littlewood-Paley-Zerlegung** genannt.

**d) Beweis der Ungleichung in einem Streifen.**

Wir wollen nun die Ungleichung

$$\|\hat{g}\|_{L^2(\mathcal{H}_1, d\mu_1)} \leq c\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für} \quad p = \frac{2m+2}{m+4} \quad (72)$$

beweisen. Zunächst führen wir das Problem auf eine Abschätzung für  $(d\mu_1)^\vee$  zurück.

**Lemma 1.7.2.** *Nehme an, dass für alle  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\|(d\mu_1)^\vee * g\|_q \leq c\|g\|_p \quad (73)$$

mit  $1 \leq p < 2$  und  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ . Dann gilt (72).

**Beweis.** Die Aussage folgt sofort mit Plancherel und Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_1} |\hat{g}|^2 d\mu_1 &= \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \bar{g}(\hat{g}d\mu_1)^\vee = \int \bar{g}((d\mu_1)^\wedge * g) \\ &\leq \|g\|_p \|(d\mu_1)^\wedge * g\|_q \leq \|g\|_p^2. \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma liefert eine Ungleichung der gewünschten Form (72) unter der Voraussetzung, dass  $(d\mu_1)^\vee$  im Unendlichen hinreichend schnell abfällt.

**Lemma 1.7.3.** (*Hardy-Littlewood-Sobolev*)

$$\begin{aligned} & \|(|x|^{-\gamma}) * g\|_q \leq c \|g\|_p \\ & \text{für } 0 < \gamma < n \quad 1 < p < q < \infty \text{ und} \\ & \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n - \gamma}{n} \end{aligned} \quad (74)$$

**Beweis.** Wir spalten das Faltungsintegral auf in der Form

$$(|y|^{-\gamma} * g)(x) = \int g(x - y) |y|^{-\gamma} dy = \int_{|y| < R} + \int_{|y| \geq R}. \quad (75)$$

Das erste Integral ist die Faltung von  $g$  mit der Funktion

$$|y|^{-\gamma} \theta(R - |y|).$$

Da diese Funktion radial, monoton fallend und integrierbar ist, können wir durch die sog. *maximale Funktion*

$$(Mg)(x) = \sup_{r > 0} \int_{|y| < r} |g(x - y)| dy$$

majorisieren und erhalten

$$\left| \int_{|y| < R} g(x - y) |y|^{-\gamma} dy \right| \leq (Mg)(x) \int_{|y| < R} |y|^{-\gamma} dy = cR^{n-\gamma} (Mg)(x).$$

Das zweite Integral kann mit Hölder abgeschätzt werden,

$$\left| \int_{|y| \geq R} g(x, y) |y|^{-\gamma} dy \right| \leq \|f\|_p \| |y|^{-\gamma} \theta(|y| - R) \|_p,$$

Nun ist die  $p'$ -Norm endlich, falls  $-\gamma p' < -n$ . Wegen (74) ist tatsächlich

$$\gamma p' - n = \frac{np'}{q} > 0$$

und folglich

$$\| |y|^{-\gamma} \theta(|y| - R) \|_p = cR^{-\frac{n}{q}}.$$

Addition der Abschätzungen der beiden Integrale in (75) liefert

$$|(|y|^{-\gamma} * g)(x)| \leq c((Mf)(x)R^{n-\gamma} + \|f\|_p R^{-\frac{n}{q}}).$$

Nun wählen wir  $R$  so, dass die beiden Summanden gleich groß werden,

$$\frac{(Mf)(x)}{\|f\|_{L^p}} = R^{-n+\gamma-\frac{n}{q}} = R^{-\frac{n}{p}}.$$

Einsetzen liefert

$$|(|y|^{-\gamma} * f)(x)| \leq A[(Mf)(x)]^{\frac{p}{q}} |f|_p^{1-\frac{p}{q}}.$$

Verwende nun die elementare Ungleichung (siehe [5, Theorem I.3.1])

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

□

Um zu überprüfen, ob diese Ungleichung auf unser Problem anwendbar ist, müssen wir das Abfallverhalten von  $(d\mu_1)^\vee$  studieren.

**Lemma 1.7.4.** *Es gibt eine Konstante  $c > 0$  mit*

$$|(d\mu_1)^\vee(t, x)| \leq c(|t| + |x|)^{-\frac{m-1}{2}} \quad (76)$$

**Beweis.** Nach Definition von  $d\mu_1$  ist

$$\begin{aligned} (d\mu_1)^\wedge(t, x) &= \int d\omega \chi_1(\omega) \int dK \frac{\delta(\omega^2 - |k|^2)}{2|k|} e^{-i\omega t + ikx} \\ &= \int dk \frac{\chi_1(|k|)}{4|k|^2} (e^{-i|k|t} + e^{i|k|t}) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Wir führen nun genau wie bei der Berechnung der Greenschen Funktion in Abschnitt 1.2 Polarkoordinaten  $(K, \vartheta, \omega)$  ein mit  $K = |k|$ ,  $\omega \in S^{m-2}$  und setzen  $u = \cos \vartheta$ . Dies ergibt (mit  $r = |x|$ )

$$\begin{aligned} (d\mu_1)^\vee(t, x) &= \Omega_{m-2} \int_0^\infty dK \frac{\chi_1(K)}{4K^2} (e^{iKt} + e^{-iKt}) \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{iKru} du. \quad (77) \end{aligned}$$

Falls  $m$  ungerade ist, sieht man durch iterative partielle Integration sofort, dass

$$\left| \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\frac{m-3}{2}} e^{iKru} du \right| \leq C(Kr)^{-\frac{m-1}{2}}.$$

Diese Abschätzung ist auch für gerades  $m$  richtig, wie man beispielsweise durch Verwendung fraktioneller Ableitungen zeigt. Durch Einsetzen in (77) erhält man

$$|(d\mu_1)^\vee(t, x)| \leq \Omega_{m-2} \int_0^\infty dK \frac{\chi_1(K)}{4K^2} C(Kr)^{-\frac{m-1}{2}} \leq c \cdot r^{-\frac{m-1}{2}}.$$

Dies ist die gewünschte Ungleichung falls  $|t| < 2r$ .

Im Fall  $|t| > 2r$  führen wir in (77) zunächst die  $K$ -Integration aus,

$$(d\mu_1)^\vee(t, x) = \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\frac{m-3}{2}} (h(t + ru) + h(-t + ru)) du, \quad (78)$$

wobei  $h$  als Fouriertransformierte der glatten Funktion  $\chi_1(K)/4K^2\Omega_{m-2}$  im Unendlichen schnell abfällt. Da  $|\pm t + ru| \geq |t|/2$ , fallen die Faktoren  $h$  für großes  $t$  schnell ab, gleichmäßig in  $r$  und  $u$ . Folglich fällt  $(d\mu_1)^\vee$  in diesem Fall sogar schnell ab.  $\square$

Wir bemerken, dass dieses Lemma in dem Sinne optimal ist, dass der Exponent in (76) nicht kleiner gemacht werden kann. Dies sieht man für  $t = \pm r$  durch eine kurze Rechnung; wir sparen uns die Einzelheiten.

Versuchen wir nun, aus Lemma 1.7.3 und Lemma 1.7.4 die Ungleichung (73) zu folgern. In (73) sind die Exponenten  $p$  und  $q$  konjugiert, und dies ergibt mit (74), dass

$$p = \frac{2n}{2n - \gamma}.$$

Nach Lemma 1.7.4 kann  $0 < \gamma \leq \frac{m-1}{2}$  gewählt werden, und folglich

$$1 < p \leq \frac{4m + 4}{3m + 5}. \quad (79)$$

Für  $m = 3$  liegt das gewünschte  $p$ , (70), in diesem Intervall. Damit ist (68) bewiesen.

Im Fall  $m \geq 4$ , liegt das gewünschte  $p$  leider außerhalb des Intervalls (79). Die Ungleichung (73) ist in diesem Fall immer noch richtig, doch für den Beweis werden Interpolationsmethoden benötigt, auf die wir in dieser Vorlesung nicht eingehen wollen.

#### e) Summation über die Streifen.

Im Fall  $\ell = 1$  ist die Ungleichung

$$\|\hat{g}\|_{L^2(\mathcal{H}_\ell, d\mu_\ell)} \leq c \cdot \|g\|_p \quad (80)$$

bewiesen. Bei Skalierung

$$\begin{aligned} (\omega, k) &\rightarrow 2^\ell(\omega, k), & (t, x) &\rightarrow 2^{-\ell}(t, x) \\ (t, x) &\rightarrow 2^{-\ell}(t, x) \end{aligned}$$

transformieren sich die Funktionen und Normen folgendermaßen,

$$\begin{aligned} \hat{g} &\rightarrow \hat{g} && \text{(Konvention)} \\ g &\rightarrow 2^{h\ell} \hat{g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\hat{g}\|_{L^2(H_1, d\mu_1)} &\rightarrow 2^{\frac{m-2}{2}\ell} \|\hat{g}\|_{L^2(H_\ell, d\mu_\ell)} \\ \|g\|_p &\rightarrow 2^{n\ell - \frac{n\ell}{p}} \|g\|_p = 2^{\frac{(m+1)}{q}\ell} \|g\|_p. \end{aligned}$$

Folglich ist (80) skalierungsinvariant (hier geht entscheidend der spezielle Wert von  $q$  ein!), so dass (80) für alle  $\ell \in \mathbb{Z}$  gilt.

Im letzten Schritt müssen wir die Summe über die Streifen ausführen. Dazu “lokalisieren” wir zunächst die Funktion  $\hat{g}$  in den Streifen, indem wir setzen

$$\theta_{\ell(x)} = \begin{cases} 1 & x \in \text{supp } \chi_\ell \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{g}_\ell = \theta_\ell \hat{g}, \quad g_\ell = (\hat{g}_\ell)^\vee.$$

Die Ungleichung (80) läßt sich dann in der Form

$$\int_{\mathcal{H}} |\hat{g}|^2 \chi_\ell d\mu \leq c \|g_\ell\|_p^2$$

schreiben. Summation über  $\ell$  liefert

$$\int_{\mathcal{H}} |\hat{g}|^2 d\mu \leq c \sum_{\ell} \|g_\ell\|_p^2.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus den beiden Ungleichungen

$$\sum_{\ell} \|g_\ell\|_p^2 \leq \left\| \left( \sum_{\ell} g_\ell^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^2 \quad (81)$$

$$\left\| \left( \sum_{\ell} g_\ell^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \leq c \|g\|_p \quad (82)$$

(mit einer Konstanten  $c$ , die nur von  $n$  und  $p$  abhängt).

Für den Beweis von (81) führen wir auf  $h = (h_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$  die Norm

$$\| \|h\|_q = \left( \sum_{\ell} |h_\ell|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ein. Die Minkowski-Ungleichung

$$\| \| \int h d\mu \| \|_q \leq \int \| \|h\|_q d\mu \quad (1 < q < \infty)$$

liefert dann

$$\begin{aligned} \left( \sum_{\ell} \|g_{\ell}\|_p^2 \right)^{\frac{p}{2}} &= \left( \sum_{\ell} \left( \int g_{\ell}^p d\mu \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} = \left\| \int g^p d\mu \right\|_{\frac{2}{p}} \\ &\leq \int \left\| g^p \right\|_{\frac{2}{p}} d\mu = \int \left( \sum_{\ell} |g_{\ell}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left\| \left( \sum_{\ell} g_{\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p^p. \end{aligned}$$

Die Ungleichung (82) läßt sich unter Verwendung der Rademacher-Funktion beweisen (siehe die Übungsaufgaben oder E. Stein, "Singular Integrals and Differentiability of Functions", Princeton University Press (1970), Appendix D).

## 2. SYMMETRISCH HYPERBOLISCHE SYSTEME, DIE ENERGIE-METHODE

In diesem Kapitel wenden wir uns allgemeinen hyperbolischen Gleichungen zu. Unser Hauptziel besteht darin, für glatte Anfangswerte Existenz- und Eindeutigkeit einer glatten Lösung für kurze Zeiten zu beweisen. In den nachfolgenden Kapiteln werden wir uns dann globalen Fragen zuwenden.

Um möglichst allgemein zu sein, wollen wir **Systeme** von Differentialgleichungen betrachten. Da sich Systeme höherer Ordnung durch Erhöhung der Anzahl der Komponenten stets auf Systeme erster Ordnung zurückführen lassen, können wir uns auf Gleichungen erster Ordnung beschränken. Wir betrachten also  $k$ -komponentige Funktionen  $u(t, x) = (u_1, \dots, u_k)$  mit  $0 \leq t < T$  und  $x \in \mathbb{R}^m$ . Den möglichen Wertebereich von  $u$  bezeichnen wir mit  $G \subset \mathbb{C}^k$ , also  $u \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^m, G)$ . Seien  $A^0(t, x, u)$  und  $A^j(t, x, u)$  (mit  $j = 1, \dots, m$ ) komplexe  $(k \times k)$ -Matrizen und  $B(t, x, u)$  ein  $k$ -Vektor der Klasse  $C^\infty((0, t) \times \mathbb{R}^m \times G)$ . Dann betrachten wir das quasilineare System

$$A^0(t, x, u) \partial_t u + \sum_{j=1}^m A^j(t, x, u) \partial_j u + B(t, x, u) = 0 \quad (83)$$

**Definition 2.1.** Das System (83) heißt **symmetrisch hyperbolisch**, falls

(i) Die Matrizen  $A^0$  und  $A^j$  sind Hermitesch,

$$(A^0)^* = A^0, \quad (A^j)^* = A^j.$$

(ii) Die Matrix  $A^0$  ist **gleichmäßig positiv definit**, also es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit

$$A^0(t, x, u) > C \quad \text{für alle } (t, x, u) \in ((0, T) \times \mathbb{R}^m \times G).$$

Für ein **lineares** Gleichungssystem schreiben wir (83) in der Form

$$A^0(t, x)\partial_t u + \sum_{j=1}^m A^j(t, x)\partial_j u + B(t, x)u = w(x, t), \quad (84)$$

dabei ist  $w(x, u)$  die Inhomogenität. Im Falle  $w \equiv 0$  heißen die Gleichungen homogen. Die obige Definition geht auf K.O. Friedrichs zurück. Sie ist deswegen sehr nützlich, weil man für symmetrisch hyperbolische Gleichungen Energieabschätzungen ableiten kann, die für den lokalen Existenz- und Eindeigkeitssatz entscheidend sind. Außerdem ist die Definition allgemein genug, dass sich alle für die Physik interessanten Gleichungen als symmetrisch hyperbolische System umschreiben lassen. Bevor wir dies an einigen Beispielen genauer sehen, wollen wir ein geometrisches Konzept einführen. Für eine gegebene Lösung  $u$  und einen Raumzeitpunkt  $(t, x) \in \mathbb{R}^n$  sei  $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n$  ein Richtungsvektor. Dann ist

$$A(\tau, \xi) = \tau A^0(t, x, u) + \sum_{j=1}^m \xi_j A^j(t, x, u)$$

eine Hermitesche  $k \times k$ -Matrix. Nach Definition des symmetrisch hyperbolischen Systems ist  $A(\tau, \xi)$  für  $\tau > 0$  und  $\xi = 0$  eine positiv definite Matrix. Ein Stetigkeitsargument zeigt, dass  $A(\tau, \xi)$  auch dann positiv ist, wenn  $|\xi|$  nur genügend klein gewählt wird. Die Determinante von  $A(\tau, \xi)$ ,

$$P(\tau, \xi) = \det A(\tau, \xi),$$

ist ein reelles Polynom in den Variablen  $\tau$  und  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , sie wird das **charakteristische Polynom** genannt. Für  $\tau \neq 0$  und  $|\xi|$  genügend klein ist  $P(\tau, \xi) \neq 0$ . Für die Wellengleichung (siehe Beispiel 2.3) verschwindet  $P(\tau, \xi)$  genau dann, wenn  $|\tau| = |\xi|$ , also wenn der Vektor  $(\tau, \xi)$  auf dem Lichtkegel liegt; außerdem ist  $A(\tau, \xi)$  definit genau wenn  $|\tau| < |\xi|$ . Dies ist die Motivation für die folgende allgemeine Definition.

**Definition 2.2.** *Der Vektor  $(\tau, \xi)$  heißt **zeitartig** bzw. **zukunftsgerichtet**, falls  $A(\tau, \xi)$  definit bzw. positiv definit ist. Eine Richtung  $(\tau, \xi)$  mit  $P(\tau, \xi) = 0$  heißt **charakteristisch**. Eine Hyperfläche  $\mathcal{H} \subset (0, T) \times \mathbb{R}^m$  mit Normale  $\nu$  heißt **raumartig**, falls*

$$\nu_0 A^0 + \sum_{j=1}^m \nu_j A^j > 0. \quad (85)$$

Ist die Hyperfläche als Graph gegeben, also  $\mathcal{H} = \{(t = f(x), x)\}$ , läßt sich die Bedingung (85) auch in der Form

$$A_0 - \sum_{j=1}^m (\nabla_j f) A^j > 0$$

schreiben.

Unsere Definitionen werden durch die folgenden Beispiele erläutert.

**Beispiel 2.3.** Wir betrachten eine skalare hyperbolische Gleichung der Form

$$\partial_t \varphi(t, x) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x) \nabla_{ij} \varphi + \sum_{i=1}^m b_i(t, x) \nabla_i \varphi + c(t, x) \partial_t \varphi + d(t, x) \varphi$$

mit  $a_{ij}$  einer symmetrischen, gleichmäßig positiven Matrix. Um diese Gleichung in ein System erster Ordnung umzuschreiben, führen wir den Vektor  $u$  mit  $k = m + 2$  Komponenten ein durch

$$u_1 = \nabla_1 \varphi, \dots, u_m = \nabla_m \varphi, \quad u_{m+1} = \partial_t \varphi, u_{m+2} = \varphi.$$

Das System

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_t u_j - \sum_{k=1}^m a_{ik} \nabla_k u_{m+1} &= 0 \\ \partial_t u_{m+1} - \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \nabla_j u_i - \sum_{i=1}^m b_i u_i - c u_{m+1} - d u_{m+2} &= 0 \\ \partial_t u_{m+2} - u_{m+1} &= 0 \end{aligned}$$

ist zur skalaren Gleichung äquivalent und ist symmetrisch hyperbolisch. Im Fall  $a_{ij} = \delta_{ij}$  und  $b, c, d = 0$  erhält man die Wellengleichung. Eine kurze Rechnung zeigt, dass Def. 2.2 tatsächlich mit den Begriffen im Minkowski-Raum verträglich sind, wie sie in Kapitel 1 gelegentlich verwendet wurden.

**Beispiel 2.4.** Die Diracgleichung im elektromagnetischen Feld hat die Form

$$\sum_{j=0}^3 i \gamma^j (\partial_j - ie A_j) \psi = m \psi.$$

Dabei ist  $\psi$  die 4-komponentige komplexe Wellenfunktion eines Teilchens der Masse  $m$  und  $A$  das elektromagnetische Potential. Die  $(4 \times 4)$ -Matrizen  $\gamma^j$ , die sog. Diracmatrizen, sind gegeben durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\alpha \\ -\sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

wobei  $\sigma^\alpha$  die Pauli-Matrizen sind,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Multiplikation mit  $-i\gamma^0$  hat die Diracgleichung die Form

$$\partial_t \psi + \sum_{j=1}^3 \gamma^0 \gamma^j \partial_j \psi - iA_0 \psi - i \sum_{j=1}^3 \gamma^0 \gamma^j A_j \psi - m\gamma^0 \psi = 0.$$

Dieses System ist symmetrisch hyperbolisch.

### 2.1. Kausale Struktur, Eindeutigkeit.

Für die Wellengleichung haben wir das Abhängigkeits- und Einflussgebiet bereits kennengelernt. Wir wollen es nun allgemeiner definieren. In diesem Abschnitt folgen wir im wesentlichen dem Vorlesungsskript [3].

**Definition 2.1.1.** Sei  $u$  eine Lösung des symmetrisch hyperbolischen Systems (83). Das **Abhängigkeitsgebiet** eines Punktes  $(t_0, x_0) \in (0, t) \times \mathbb{R}^m$  ist die Teilmenge  $K$  der Hyperfläche  $\{t = 0\}$  mit der Eigenschaft, dass jede glatte Lösung  $v$  des Systems, die auf  $K$  mit  $u$  übereinstimmt,  $v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0)$  erfüllt.

Der **Einflussbereich** einer Teilmenge  $K$  der Hyperfläche  $t = 0$  ist die Menge aller Punkt  $(t, x)$ , für welche  $K$  ein Abhängigkeitsgebiet ist.

Man beachte, dass das Abhängigkeitsgebiet nicht eindeutig definiert ist, insbesondere ist mit  $K$  auch jede Menge  $\tilde{K} \supset K$  ein Abhängigkeitsgebiet. Die Definition des Einflussbereiches ist dagegen eindeutig.

Wir werden nun eine Methode beschreiben, mit der sich für lineare Systeme Aussagen über das Abhängigkeitsgebiet gewinnen lassen.

**Definition:** Seien  $S_0$  und  $S_1$  die Hyperflächen  $t = \text{const}$  bzw.  $t = f(x)$  und nehme an, dass  $S_1$  raumartig ist. Eine offene Menge  $L \subset (0, T) \times \mathbb{R}^m$  heißt **linsenförmiges Gebiet**, falls  $L$  relativ kompakt ist und  $\partial L \subset \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1$ . Wir setzen  $(\partial L)_+ = \partial L \cap S_1$  und  $(\partial L)_- = \partial L \cap S_0$ . Typischerweise sieht ein linsenförmiges Gebiet aus wie in Abb. 4.

Es ist im folgenden günstig, die Einsteinsche Summenkonvention im  $\mathbb{R}^n$  zu verwenden; wir summieren also über alle doppelt auftretenden Indizes von  $0, \dots, m$ . Unser lineares System (84) kann dann in der kompakten Form

$$A^j \partial_j u + Bu = w$$

geschrieben werden. Wir betrachten zunächst die zugehörige homogene Gleichung,

$$(A^j \partial_j + B)u = 0. \tag{86}$$

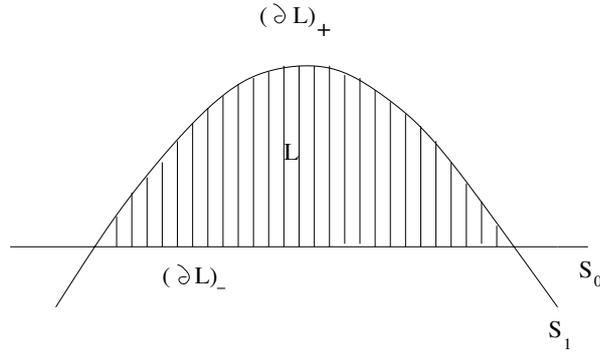


ABBILDUNG 4

Die entscheidende Idee bei der Untersuchung des Abhängigkeitsgebietes besteht darin, diese Gleichung mit einer geeigneten Testfunktion zu multiplizieren und über das linsenförmige Gebiet zu integrieren. Genauer gehen wir aus von der Gleichung

$$0 = \int_L e^{-Kt} 2\operatorname{Re}\langle u, (A^j \partial_j + B)u \rangle, \quad (87)$$

dabei ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^k$  und  $K > 0$  ein Parameter, der später genauer bestimmt wird. Da die  $A^j$  Hermitesch sind, haben wir

$$\partial_j \langle u, A^j u \rangle = 2\operatorname{Re}\langle u, A^j \partial_j u \rangle + \langle u, (\partial_j A^j)u \rangle,$$

und durch Einsetzen in (87) folgt

$$0 = \int_L e^{-Kt} (\partial_j \langle u, A^j u \rangle + \langle u, (B + B^* - (\partial_j A^j))u \rangle). \quad (88)$$

Der erste Term kann mit Hilfe des Satzes von Gauß partiell integriert werden, also

$$\begin{aligned} \int_L e^{-Kt} \partial_j \langle u, A^j u \rangle &= K \int_L e^{-Kt} \langle u, A^0 u \rangle \\ &+ \int_{(\partial L)_+} e^{-Kt} \langle u, \nu_j A^j u \rangle d\mu - \int_{(\partial L)_-} \langle u, A^0 u \rangle dx \end{aligned} \quad (89)$$

mit  $\nu = (1, -\nabla_1 f, \dots, -\nabla_m f)$ . Wir setzen nun (89) in (95) ein und lösen nach dem Oberflächenintegral über  $(\partial L)_+$  auf,

$$\begin{aligned} & \int_{(\partial L)_+} e^{-Kt} \langle u, \nu_j A^j u \rangle d\mu \\ &= \int_{(\partial L)_-} \langle u, A^0 u \rangle dx + \int_L e^{-Kt} \langle u, (-K - B - B^* + (\partial_j A^j))u \rangle. \end{aligned} \quad (90)$$

Diese Identität ist die Grundlage für den folgenden Eindeutigkeitsatz.

**Theorem 2.1.2.** *Seien  $u_1$  und  $u_2$  glatte Lösungen des linearen symmetrisch hyperbolischen Systems (84), deren Anfangswerte auf einem linsenförmigen Gebiet  $L$  übereinstimmen,*

$$u_1|_{(\partial L)_-} = u_2|_{(\partial L)_-}.$$

*Dann stimmen  $u_1$  und  $u_2$  auf ganz  $L$  überein.*

**Beweis.** Die Funktion  $u = u_1 - u_2$  ist Lösung des homogenen Systems (86) und  $u|_{(\partial L)_-} = 0$ . Folglich vereinfacht sich (95) zu

$$\int_{(\partial L)_+} e^{-Kt} \langle u, \nu_j A^j u \rangle = \int_L e^{-Kt} \langle u, (-K - B - B^* + (\partial_j A^j))u \rangle.$$

Nehme an, dass  $u$  auf  $L$  nicht identisch verschwindet. Wählt man  $K$  hinreichend groß, wird die rechte Seite negativ. Da  $(\partial L)_+ \subset \mathcal{H}_1$  eine raumartige Hyperfläche ist, ist die linke Seite aber  $\geq 0$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Hieraus können wir sofort einen Eindeutigkeitsatz für lineare Systeme folgern.

**Theorem 2.1.3.** *Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei glatte Lösungen des linearen symmetrisch hyperbolischen Systems (84) mit den gleichen Anfangswerten bei  $t = 0$ . Dann ist  $u_1 = u_2$  in einer Umgebung der Anfangshyperfläche.*

*Sind die Matrizen  $A^j$  gleichmäßig beschränkt, ist  $u_1 = u_2$  auf ganz  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m$ .*

**Beweis.** Für die lokale Eindeutigkeit überdecke man die Anfangshyperfläche mit linsenförmigen Gebieten. Sind die  $A^j$  glm beschränkt, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass  $|\nabla f| \leq \varepsilon$  impliziert, dass die Hyperfläche  $\mathcal{H}_1 = \{(f(x), x)\}$  raumartig ist. Für gegebenes  $(t_0, x_0)$  kann man dann beispielsweise

$$f(x) = t_0 + 1 - \varepsilon \sqrt{1 + |x - x_0|^2} \quad (91)$$

wählen. Das zugehörige linsenförmige Gebiet enthält  $(t_0, x_0)$ .  $\square$

Durch geeignete Wahl linsenförmiger Gebiete kann man auch eine (i.a. sehr grobe) Abschätzung für die Propagationsgeschwindigkeit erhalten. Betrachten wir als Beispiel den Fall von Anfangswerten mit kompaktem Träger  $K_0$  und nehmen an, dass die  $A^i$  gleichmäßig beschränkt sind. Für gegebenes  $t_0$  betrachten wir die Menge  $K$  aller  $x_0$ , so dass das zu (91) gehörende linsenförmige Gebiet  $K_0$  schneidet. Dann ist  $K$  relativ kompakt. Bei kompakten Anfangswerten bleibt der Träger der Lösung also zu allen Zeiten kompakt. Man sieht außerdem, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit höchstens  $\varepsilon^{-1}$  ist.

Abschließend wollen wir kurz die Situation für **quasilineare** Systeme besprechen. In diesem Fall ist es i.a. schwierig, linsenförmige Gebiete anzugeben, weil die Matrizen  $A^i$  von  $u$  abhängen und man daher a-priori nicht weiß, welche Hyperflächen raumartig sind. Für die Eindeutigkeit können wir das Problem aber auf den linearen Fall zurückführen.

**Theorem 2.1.4.** *Nehme an, dass der maximale Wertebereich  $G$  konvex ist. Seien  $u$  und  $v$  zwei glatte Lösungen des symmetrisch hyperbolischen Systems (83) mit den gleichen Anfangswerten bei  $t = 0$ . Dann ist  $u = v$  in einer Umgebung der Anfangshyperfläche. Wenn die Matrizen  $A^i$  auf  $(0, T) \times \mathbb{R}^m \times G$  gleichmäßig beschränkt sind, ist  $u = v$  auf ganz  $(0, T) \times \mathbb{R}^m$ .*

**Beweis.** Wir verwenden wieder die Einsteinsche Summenkonvention im  $\mathbb{R}^n$  und schreiben die Gleichungen in der Form

$$A^i(u) \partial_i u + B(u) = 0 = A^i(v) \partial_i v + B(v).$$

Durch Subtraktion folgt

$$0 = A^i(u) \partial_i (u - v) + (A^i(u) - A^i(v)) \partial_i v + B(u) - B(v).$$

Mit der Umformung

$$f(u) - f(v) = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} f(\tau v + (1 - \tau)u) = \int_0^1 Df|_{\tau v + (1 - \tau)u} (v - u)$$

erhalten wir

$$A^i(u) \partial_i (u - v) + [\tilde{A}^i(u, v) \partial_i v + \tilde{B}(u, v)] = 0 \quad (92)$$

mit

$$\begin{aligned}\tilde{A}^i(u, v) &= \int_0^1 DA^i|_{\tau v + (1-\tau)u} d\tau \\ \tilde{B}(u, v) &= \int_0^1 DB|_{\tau v + (1-\tau)u} d\tau.\end{aligned}$$

Wir fassen (92) als ein lineares Gleichungssystem für  $u - v$  auf und wenden Theorem 2.4 an.

## 2.2. Existenz für lineare Systeme.

Der Existenzbeweis für symmetrisch hyperbolische Systeme basiert auf Energieabschätzungen und den Sobolevschen Einbettungssätzen. In diesem Abschnitt wird dies für lineare Systeme (84) entwickelt; die zusätzlichen Schwierigkeiten bei quasilinearen Systemen werden im nächsten Abschnitt behandelt. Für die linearen Systeme orientieren wir uns an der Darstellung [1].

Genau wie im vorigen Abschnitt schreiben wir die Gleichung in der Form

$$Lu \equiv A^j \partial_j u + Bu = w, \quad (93)$$

wobei über  $j = 0, \dots, m$  summiert wird. Da die Matrizen  $A^j$  Hermitesch sind, haben wir

$$\partial_j \langle u, A^j u \rangle = 2\operatorname{Re} \langle u, A^j \partial_j u \rangle + \langle u, (\partial_j A^j) u \rangle,$$

und durch Einsetzen der Gleichung folgt

$$\begin{aligned}\partial_j \langle u, A^j u \rangle + \langle u, Cu \rangle &= 2\operatorname{Re} \langle u, w \rangle, \\ C &= B + B^* - (\partial_j A^j).\end{aligned} \quad (94)$$

Wir betrachten im folgenden für  $0 < \lambda \leq T$  den Streifen

$$R_\lambda = \{(x, t), x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq \lambda\}.$$

Wir nehmen an, dass  $A^j$ ,  $B$  und  $w$  glatt und glm beschränkt sind, außerdem soll  $w$  in  $x$  kompakte Träger besitzen. Wir bezeichnen  $s$ -mal stetig differenzierbare Funktionen auf  $R_\lambda$ , die in  $x$  kompakten Träger besitzen, mit  $C^s(R_\lambda)$ . Die Funktionen in

$$\underline{C^s(R_\lambda)} \quad \text{und} \quad \overline{C^s(R_\lambda)}$$

sollen außerdem für  $t = 0$  bzw.  $t = \lambda$  verschwinden.

Wir wollen das Cauchy-Problem

$$Lu = w, \quad u|_{t=0} = u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$$

in  $C^s(R_T)$  lösen. Zunächst einmal können wir uns auf den Fall  $u_0 \equiv 0$  beschränken. Wählen wir nämlich eine Funktion  $\tilde{u} \in C^\infty(R_T)$ , die für

$t = 0$  mit  $u_0$  übereinstimmt, so ist  $(u - \tilde{u})$  Lösung der Gleichung (93) (mit  $w$  ersetzt durch  $w + A^j \partial_j \tilde{u} + B\tilde{u}$ ) und verschwindet für  $t = 0$ .

Wir leiten zunächst sog. Energieabschätzungen ab. Dazu integrieren wir (94) über  $R_\lambda$ , integrieren den ersten Term mit dem Satz von Gauß partiell und verwenden, dass die Anfangswerte für  $t = 0$  verschwinden. Dies ergibt

$$E(\lambda) \equiv \int_{t=\lambda} \langle u, A^0 u \rangle = \int_0^\lambda dt \int (2\operatorname{Re}\langle u, w \rangle - \langle u, Cu \rangle) dx. \quad (95)$$

Da die Matrix  $C$  glm beschränkt und  $A^0$  glm positiv ist, gibt es eine Konstante  $K$ , so dass

$$|\langle u, Cu \rangle| \leq K \langle u, A^0 u \rangle.$$

Den linearen Term in  $u$  können wir folgendermaßen abschätzen,

$$2\operatorname{Re}\langle u, w \rangle \leq \mu \langle u, u \rangle + \frac{1}{\mu} \langle w, w \rangle \leq \langle u, A^0 u \rangle + \frac{1}{\mu^2} \langle w, A^0 w \rangle,$$

wobei  $\mu \geq 0$  eine geeignete Konstante ist. Einsetzen in (95) liefert

$$E(\lambda) \leq (K + 1) \int_0^\lambda E(t) dt + \frac{1}{\mu^2} \int_{R_\lambda} \langle w, A^0 w \rangle dx dt.$$

Schreiben wir dies in der Form

$$\frac{d}{d\lambda} e^{-(K+1)\lambda} \int_0^\lambda E(t) dt \leq e^{-(K+1)\lambda} \frac{1}{\mu^2} \int_{R_T} \langle w, A^0 w \rangle dx dt,$$

so folgt durch Integration über  $\lambda$ ,

$$\int_0^T E(\lambda) d\lambda \leq \frac{e^{(K+1)T} - 1}{K + 1} \frac{1}{\mu^2} \int_{R_T} \langle w, A^0 w \rangle dx dt \quad (96)$$

$$\leq \frac{T}{\mu^2} e^{(K+1)T} \int_{R_T} \langle w, A^0 w \rangle dx dt, \quad (97)$$

wobei wir im letzten Schritt den Mittelwertsatz und die Monotonie der Exponentialfunktion ausgenutzt haben.

Für die Wellengleichung gibt  $E(t)$  genau die Energie zur Zeit  $t$  an. Im Gegensatz zur Wellengleichung ist die Energie nun i.a. nicht erhalten,

aber (97) gibt eine gute Abschätzung dafür, wie sich die Energie zeitlich ändert. Es ist günstig, auf  $C^1(R_T)$  das Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{R_T} \langle u, A^0 v \rangle dx dt$$

einzuführen. Die zugehörige Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|$ . Setzen wir außerdem

$$\Gamma^2 = \frac{T}{\mu^2} e^{(K+1)T}, \quad (98)$$

so läßt sich die Energieabschätzung in der Form

$$(u, u) \leq \Gamma^2 (w, w)$$

schreiben, und durch Einsetzen der Gleichung  $Lu = w$  folgt

$$\|u\| \leq \Gamma \|Lu\| \quad \text{für alle } u \in \underline{C^1(R_T)}. \quad (99)$$

Mit (99) haben wir die Energieabschätzung in eine Form gebracht, die für einen abstrakten Existenzbeweis geeignet ist. Wir wollen zunächst eine *schwache Lösung* konstruieren. Als Raum der Testfunktionen wählen wir  $\overline{C^1(R_T)}$ ; dies garantiert, dass wir bei der partiellen Integration keine Randterme bekommen. Für eine klassische Lösung  $u \in \underline{C^1(R_T)}$  folgt

$$(v, w) = (\tilde{L}v, u) \quad \text{für alle } v \in \overline{C^1(R_T)}, \quad (100)$$

und umgekehrt folgt für  $u \in C^1(R_T)$  aus (100), dass  $u$  eine Lösung eines Anfangswertproblems ist (es folgt also insbesondere, dass  $u|_{t=0} \equiv 0$ , dazu untersucht man bei partieller Integration die Randwerte). Also können wir über (100) einen schwachen Lösungsbegriff einführen.

Wir müssen nun den geeigneten Hilbertraum wählen. Dazu führen wir zunächst auf  $\overline{C^1(R_T)}$  das Skalarprodukt

$$\langle v, v' \rangle = (\tilde{L}v, \tilde{L}v')$$

ein. Dieses Skalarprodukt ist positiv, da für  $v \neq 0$

$$\|v\|^2 \equiv \langle v, v \rangle = (\tilde{L}v, \tilde{L}v) \geq \tilde{\Gamma}^2 (v, v) \neq 0,$$

dabei ist  $\tilde{\Gamma}$  die Konstante in der zu (99) dualen Ungleichung. Durch Vollständigkeit erhalten wir den Hilbertraum  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Wir betrachten nun für  $w \in C^1(R_T)$  und  $v \in \overline{C^1(R_T)}$  das lineare Funktional  $(v, w)$ . Aufgrund der Abschätzung

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\| \leq \tilde{\Gamma} \|w\| \|v\|$$

ist dieses Funktional stetig für  $v \in \mathcal{H}$ . Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es ein  $U \in \mathcal{H}$  mit

$$(v, w) = \langle v, U \rangle = (\tilde{L}v, \tilde{L}U) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}.$$

Folglich erfüllt  $\tilde{L}U \in L^2(R_T)$  die Gleichung (100) und ist somit die gesuchte schwache Lösung. Man beachte, dass  $T$  in den bisherigen Abschätzungen beliebig groß gewählt werden kann. Somit haben wir die globale Existenz einer schwachen Lösung bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Lösung (zumindest für kurze Zeiten) in  $C^s$  ist, wobei  $s \geq 1$  beliebig groß gewählt werden kann. Die Methode besteht darin, Integralabschätzungen für die Ableitungen von  $u$  herzuleiten. Die Sobolev-Einbettungen liefern dann punktweise Abschätzungen. Wir erklären die Integralabschätzung zur besseren Übersichtlichkeit für die zweiten Ableitungen; für die höheren Ableitungen geht es ganz analog. Wir differenzieren zunächst die Gleichung durch ( $i = 1, \dots, m$ ),

$$\nabla_i w = \nabla_i L u = L \nabla_i u + (\partial_i A^j) \partial_j u + (\partial_i B) u.$$

Für  $\partial_i u$  setzen wir die Gleichung ein und erhalten so eine Gleichung der Form

$$L \nabla_i u = \sum_{k=1}^m a_{ik} \nabla_k u + b_i u + \nabla_i w + e_i w$$

mit geeigneten glatten und glm beschränkten Koeffizienten. Durch Integration folgt

$$\|L \nabla_i u\| \leq M \left( \sum_{k=1}^m \|\nabla_k u\| + \|u\| + \|w\| \right) + \|\nabla_i w\|.$$

Nehme an, dass  $u \in \underline{C}^2$ . Dann ist  $\nabla_i u \in \underline{C}^1$ , und wir erhalten

$$\sum_{i=1}^m \|\nabla_i u\| \leq \Gamma M n \sum_{k=1}^m \|\nabla_k u\| + n M \Gamma (1 + \Gamma) \|w\| + \sum_i \|\nabla_i w\|.$$

Gemäß (99) können wir  $\Gamma$  beliebig klein machen, indem wir  $T$  genügend klein wählen. Folglich können wir erreichen, dass

$$\sum_{i=1}^m \|\nabla_i u\| \leq 2n M \Gamma (1 + \Gamma) \|w\| + \sum_i \|\nabla_i w\|.$$

Durch Iteration erhält man entsprechend

$$\|\nabla^s u\| \leq C \cdot \sum_{|\beta| \leq s} \|\nabla^\beta w\|.$$

Man beachte, dass die Norm  $\|\cdot\|$  ein Zeitintegral enthält. Die Energieabschätzung liefert nun aber für alle  $u \in \underline{C}^1(R_T)$  und  $0 \leq \lambda \leq T$ ,

$$\int_{t=\lambda} \langle u, A^0 u \rangle dx = E(\lambda) \leq (K + 1) \|u\|^2 + \frac{1}{\mu^2} \|Lu\|^2,$$

und dies liefert uns sofort auch Abschätzungen für die entsprechende räumliche  $L^2$ -Norm für festes  $t$ . Wir erhalten somit das folgende Ergebnis

**Theorem 2.2.1.** *Wir betrachten das Cauchy-Problem*

$$(A^0 \partial_t + \sum_{i=1}^m A^i \nabla_i + B)u = w, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

wobei  $u_0, w(t, \cdot) \in C_c^\infty$ . Nehme an, dass die Matrizen  $A^0, A^j, B$  sowie die Funktion  $w$  glatt und gemeinsam mit ihren Abbildungen auf  $R_T$  glm beschränkt sind. Dann besitzt das Cauchy-Problem eine glatte Lösung auf  $R_T$ .

**Beweis.** Sei  $s \geq 1$  gegeben. Die Energieabschätzungen für die Ableitungen von  $u$  liefern, dass für geeignetes  $\varepsilon > 0$ ,

$$\int_{t=\lambda} \|\nabla^\alpha u\| \leq C \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \|\nabla^\beta w\| \quad \text{für alle } |\alpha| \leq s + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 2$$

und  $0 \leq \lambda \leq \varepsilon$ . Die Sobolev-Einbettung liefert, dass  $\nabla^\alpha u \in C^0$ . Da  $\varepsilon$  nur von der Regularität der Koeffizienten und der Inhomogenität abhängt, erhalten wir durch iteratives Aneinandersetzen der  $\varepsilon$ -Streifen eine Lösung der Klasse  $C^s$  auf ganz  $R_T$ .  $\square$

Dieses Theorem ist auch für  $T = \infty$  anwendbar; in diesem Fall erhalten wir also die Existenz einer globalen Lösung.

Abschließend geben wir zur Vollständigkeit einen Beweis der Sobolevungleichung, die wir im Beweis von Theorem 2.4.1 verwendet haben.

**Lemma 2.2.2.** *Sei  $s = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + 1$ . Ist eine Funktion  $g$  auf  $\mathbb{R}^m$   $s$ -mal schwach differenzierbar und*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\nabla^\alpha g|^2 dx < C \quad \text{für alle } |\alpha| = s,$$

*dann ist  $f \in L^\infty$ .*

**Beweis.** Nach Plancherel und der Schwarzischen Ungleichung haben wir

$$\begin{aligned} |g^2(x)| &= \left| \int \frac{dk}{(2\pi)^m} \hat{g}(k) e^{-ikx} \right|^2 \\ &= \left| \int \frac{dk}{(2\pi)^m} (1+|k|^2)^{-\frac{s}{2}} (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{g}(k) e^{-ikx} \right|^2 \\ &\leq c_m \int \frac{dk}{(2\pi)^m} (1+|k|^2)^s |\hat{g}(k)|^2 \end{aligned}$$

mit

$$c_m = \int \frac{dk}{(2\pi)^m} (1+|k|^2)^{-s} < \infty.$$

Nun ist, wieder wegen Plancherel,

$$\int \frac{dk}{(2\pi)^m} (1+|k|^2)^s |\hat{g}(k)|^2 = \sum_{j=0}^s \binom{j}{n} \|\square^j g\|_{L^2(\mathbb{R}^m)}^2 < c.$$

Somit ist  $\sqrt{c_m c}$  eine  $L^\infty$ -Schranke für  $g$ .

### 2.3. Lokale Existenz für Quasilineare Systeme, die Moser-Abschätzungen.

Wir wollen nun den lokalen Existenzsatz, Theorem 2.2.1, auf quasilineare Systeme ausdehnen. Damit die Darstellung nicht ermüdend und zu technisch wird, beschränken wir uns darauf zu beschreiben, wie der Beweis für lineare Systeme modifiziert werden muss und welche zusätzlichen Methoden dafür benötigt werden (ein detaillierter Beweis findet sich z.B. in [3]). Die Hauptschwierigkeit bei den quasilinearen Systemen besteht darin, dass man beim Durchdifferenzieren der Gleichung zusätzliche Terme bekommt, z.B.

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i (A^j(t, x, u) \partial_j u + B(t, x, u)) \\ &= (\partial_i A^j) \partial_j u + (DA^j)(\partial_i u)(\partial_j u) + \partial_i B + (DB) \partial_i u, \end{aligned}$$

wobei  $D$  die partielle Ableitung nach  $u$  bezeichnet. Bei Berechnung der höheren Ableitungen treten allgemeine Terme der Form

$$(D^s f(u)) (\partial^{K_1} u) \cdots (\partial^{K_p} u)$$

auf, und wir müssen deren  $L^2$ -Norm kontrollieren. Dazu dienen die Moser-Abschätzungen, die wir nun herleiten werden. Als Vorbereitung benötigen wir die Gagliardo-Nirenberg-Abschätzungen.

**Lemma 2.3.1.** Sei  $k > 1$ ,  $1 \leq p \leq k$  und

$$q_1 = \frac{2k}{p+1}, \quad q_2 = \frac{2k}{p-1}.$$

Wenn  $u \in L^{q_2}(\mathbb{R}^m) \cap H^{2,q_1}(\mathbb{R}^m)$ , dann ist  $\partial_j u \in L^{\frac{2k}{p}}$  und für geeignetes  $c = c(m, p, k)$ ,

$$\|\nabla_j u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \|u\|_{L^{q_2}} \cdot \|\nabla_{jj} u\|_{L^{q_1}}$$

( $j$  ist hier ein fester Index, also keine Summenkonvention!)

**Beweis.** Es genügt, die Ungleichung für  $u \in C_c^\infty$  zu beweisen. Dann ist für  $q \geq 2$ ,

$$|\nabla_j u|^q = \nabla_j(u \nabla_j u |\nabla_j u|^{q-2}) - (q-1)u \nabla_{jj} u |\nabla_j u|^{q-2}$$

Bei Integration über  $\mathbb{R}^m$  fällt der erste Term heraus, und Hölder liefert

$$\|\nabla_j u\|_{L^q}^q \leq (q-1) \|u\|_{L^{q_2}} \|\nabla_{jj} u\|_{L^{q_1}} \|\nabla_j u\|_{L^q}^{q-1}.$$

□

Das nächste Lemma behandelt höhere Ableitungen.

**Lemma 2.3.2.** Für  $j \leq p \leq k+1-r$ ,  $l \geq j$  gilt

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \left( \varepsilon \|\nabla^{\ell-j} u\|_{L^{\frac{2k}{p-j}}} + c(\varepsilon) \|\nabla^{\ell+r} u\|_{L^{\frac{2k}{p+r}}} \right). \quad (101)$$

**Beweis.** Wir wenden zunächst Lemma 2.3.1 auf  $D^{\ell-1}u$  an,

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \|\nabla^{\ell-1} u\|_{L^{\frac{2k}{p-1}}} \|\nabla^{\ell+1} u\|_{L^{q_1}}.$$

Die Ungleichung  $\sqrt{ab} \leq \varepsilon a + b/4\varepsilon$  liefert

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \left( \varepsilon \|\nabla^{\ell-1} u\|_{L^{\frac{2k}{p-1}}} + \varepsilon^{-1} \|\nabla^{\ell+1} u\|_{L^{\frac{2k}{p+1}}} \right)$$

Entsprechend haben wir

$$\|\nabla^{\ell-1} u\|_{L^{\frac{2k}{p-1}}} \leq c \left( \tilde{\varepsilon} \|\nabla^{\ell-2} u\|_{L^{\frac{2k}{p-2}}} + \tilde{\varepsilon}^{-1} \|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \right).$$

Kombinieren wir diese beiden Ungleichungen für  $\tilde{\varepsilon}$  fest und  $\varepsilon$  hinreichend klein, erhält man

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \left( \varepsilon \|\nabla^{\ell-2} u\|_{L^{\frac{2k}{p-2}}} + c(\varepsilon) \|\nabla^{\ell+1} u\|_{L^{\frac{2k}{p+1}}} \right)$$

Durch weiteres induktives Einsetzen erhält man (101). □

Im Spezialfall  $\ell = j$  und  $p+r = k$  haben wir insbesondere

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{k-r}}} \leq c \left( \varepsilon \|u\|_{L^{\frac{2k}{p-\ell}}} + c(\varepsilon) \|\nabla^{\ell+r} u\|_{L^2} \right). \quad (102)$$

Das folgende allgemeine Lemma erlaubt es uns, die Summe auf der rechten Seite von (101) durch ein Produkt zu ersetzen.

**Lemma 2.3.3.** *Seien  $\ell, \mu, \bar{\mu} \in \mathbb{N}_0$  mit  $\ell \leq \max(\mu, \bar{\mu})$  und  $1 \leq q, r, \bar{r} < \infty$ . Sei weiterhin*

$$\alpha = \frac{m}{q} - \frac{m}{r} + \mu - \ell, \quad \beta = -\frac{m}{q} + \frac{m}{\bar{r}} - \bar{\mu} + \ell$$

mit  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ . Falls für alle  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  die Ungleichung

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^q} \leq c_1 \|\nabla^\mu u\|_{L^r} + c_2 \|\nabla^{\bar{\mu}} u\|_{L^{\bar{r}}} \quad (103)$$

gilt, dann haben  $\alpha$  und  $\beta$  das gleiche Vorzeichen und

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^q} \leq (c_1 + c_2) \|\nabla^\mu u\|_{L^r}^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \|\nabla^{\bar{\mu}} u\|_{L^{\bar{r}}}^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

**Beweis.** Wir schreiben (103) schematisch als

$$Q \leq c_1 R + c_2 P.$$

Wir ersetzen nun  $u(x)$  durch  $u(sx)$  ( $s > 0$ ) und skalieren die Integrale um. Dies liefert

$$s^{\ell - \frac{m}{q}} Q \leq c_1 s^{\mu - \frac{m}{r}} R + c_2 s^{\bar{\mu} - \frac{m}{\bar{r}}} P$$

und nach Division durch  $s^{\ell - \frac{m}{q}}$ ,

$$Q \leq c_1 s^\alpha R + c_2 s^{-\beta} P. \quad (104)$$

Hieran sieht man, dass  $\alpha$  und  $\beta$  gleiches Vorzeichen haben, denn ansonsten würde man im Limes  $s \rightarrow +\infty$  oder  $s \rightarrow 0$  die widersprüchliche Aussage erhalten, dass  $Q = 0$  ist. Abschließend wählen wir  $s$  so, dass die beiden Summanden in (104) (bis auf eine Konstante) gleich groß sind,

$$S = \left( \frac{P}{R} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

□

**Theorem 2.3.4.** (Gagliardo-Nirenberg)

Seien  $\ell, p, k$  positive ganze Zahlen mit  $1 \leq p \leq k - 1$ . Dann gilt

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{p}}} \leq c \|u\|_{L^{\frac{2k}{p-\ell}}}^{\frac{k-p}{k+\ell-p}} \|\nabla^{k+\ell-p} u\|_{L^2}^{\frac{\ell}{k+\ell-p}}.$$

Im Fall  $\ell < k$  gilt außerdem

$$\|\nabla^\ell u\|_{L^{\frac{2k}{\ell}}} \leq c \|u\|_{L^\infty}^{1-\frac{\ell}{k}} \|\nabla^k u\|_{L^2}^{\frac{\ell}{k}} \quad (105)$$

**Beweis.** Die erste Ungleichung folgt unmittelbar aus (102) und Lemma 2.3.3. Im Grenzfall  $\ell \rightarrow p$  erhält man (105). □

Wir wenden uns nun  $L^2$ -Abschätzungen von Potenzen von  $\nabla^s u$  zu.

**Lemma 2.3.5.** *Sind  $\beta$  und  $\gamma$  Multiindizes mit  $|\beta| + |\gamma| = k$ , dann gibt es  $c > 0$ , so dass für alle  $f, g \in C^\infty \subset (\mathbb{R}^m)$*

$$\|(\nabla^\beta f)(\nabla^\gamma g)\|_{L^2} \leq c(\|f\|_{L^\infty} \|\nabla^k g\|_{L^2} + \|\nabla^k f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty})$$

**Beweis.** Die Hölder-Ungleichung liefert

$$\|(\nabla^\beta f)(\nabla^\gamma g)\|_{L^2} \leq \|\nabla^\beta f\|_{L^{\frac{2k}{\ell}}} \|\nabla^\gamma g\|_{L^{\frac{2k}{r}}}$$

mit  $\ell = |\beta|$  und  $r = |\gamma|$ . Nun wenden wir die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \|(\nabla^\beta f)(\nabla^\gamma g)\|_{L^2} &\leq c \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{\ell}{k}} \|\nabla^k f\|_{L^2}^{\frac{\ell}{k}} \|g\|_{L^\infty}^{1-\frac{m}{k}} \|\nabla^k g\|_{L^2}^{\frac{m}{k}} \\ &= c \left( \|f\|_{L^\infty} \|\nabla^k g\|_{L^2} \right)^{\frac{m}{k}} \left( \|\nabla^k f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} \right)^{\frac{\ell}{k}} \end{aligned}$$

Wende nun die Ungleichung  $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq (p^{-1}a + q^{-1}b)$  an, wobei  $a, b > 0$  und  $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  $\square$

Die Ungleichungen im folgenden Theorem werden die **ersten** und **zweiten Moser-Abschätzungen** genannt.

**Theorem 2.3.6.** *Es gibt eine Konstante  $c > 0$ , so dass für alle  $f, g \in H^s(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$  und jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = s$*

$$\|\nabla^\alpha(fg)\|_{L^2} \leq c(\|f\|_{L^\infty} \|\nabla^s g\|_{L^2} + \|\nabla^s f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty}).$$

Für  $f \in H^s(\mathbb{R}^m) \cap H^{1,\infty}(\mathbb{R}^m)$  und  $g \in H^{s-1}(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$  gilt außerdem

$$\|\nabla^\alpha(fg) - f(\nabla^\alpha g)\|_{L^2} \leq c(\|\nabla^s f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} + \|\nabla f\|_{L^\infty} \|\nabla^{s-1} g\|_{L^2}).$$

**Beweis.** Nach der Leibnizschen Regel ist

$$\nabla^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \nabla^\beta f \nabla^\gamma g$$

und

$$\nabla^\alpha(fg) - f\nabla^\alpha g = \sum_{\beta+\gamma=\alpha, |\beta|>0} \binom{\alpha}{\beta} \nabla^\beta f \nabla^\gamma g \quad (106)$$

Wende nun auf jeden Summanden Lemma 2.3.5 an. Da (106) wenigstens erste Ableitungen von  $f$  enthält, kann man Lemma 2.3.5 anwenden mit  $f$  ersetzt durch  $\nabla_i f$ .  $\square$

Es folgen die **dritten Moser-Abschätzungen**.

**Theorem 2.3.7.** *Sei  $F$  eine  $C^\infty$ -Funktion mit  $F(0) = 0$ . Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$ , die nur von  $\|f\|_{L^\infty}$  abhängt, so dass für alle  $f \in H^s(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$  und jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = s$  die Abschätzung*

$$\|\nabla^\alpha F(f)\|_{L^2} \leq c(\|f\|_{L^\infty} \|\nabla^s f\|_{L^2})$$

*gilt.*

**Beweis.** Die Kettenregel und Leibnizsche Regel liefern

$$\nabla^\alpha F(f) = \sum_{K \leq s} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_k = \alpha} c(\beta_1, \dots, \beta_k) F^{(K)}(f) (\nabla^{\beta_1} f) \cdots (\nabla^{\beta_k} f)$$

mit kombinatorischen Faktoren  $c(\beta_1, \dots, \beta_k)$ . Wir verwenden nun, dass  $F^{(k)}(f)$  beschränkt ist und die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|(\nabla^{\beta_1} f_1) \cdots (\nabla^{\beta_k} f_k)\|_{L^2} &\leq c(\|f_1\|_{L^\infty} \cdot \|f_2\|_{L^\infty} \cdots \|f_{k-1}\|_{L^\infty} \|\nabla^s f_k\|_{L^2} \\ &\quad + \cdots + \|\nabla^s f_1\|_{L^2} \|f_2\|_{L^\infty} \cdots \|f_k\|_{L^\infty}), \end{aligned}$$

die man wiederum unmittelbar aus Lemma 2.3.5 durch Induktion erhält.  $\square$

Wir verwenden nun die Moser-Abschätzungen, um eine fundamentale Energieabschätzung für quasilineare Systeme zu beweisen.

**Satz 2.3.8.** *Sei  $u \in C^s((0, T) \times \mathbb{R}^m, G)$  Lösung des symmetrisch hyperbolischen Systems*

$$A^0(t, x, u) \partial_t u + \sum_{i=1}^m A^i(t, x, u) \nabla_i u + B(t, x, u) = 0$$

*mit Anfangswerten  $u|_{t=0} \equiv 0$ . Nehme an, dass  $A^i$  und  $B$  gemeinsam mit ihren Ableitungen glm beschränkt sind und dass  $B(t, \dots, u = 0)$  kompakten Träger besitzt. Dann gibt es eine Konstante  $C$ , die nur von  $G$  und  $s$  abhängt, so dass*

$$\|u(t)\|_{H^s}^2 \leq c \int_0^t (1 + |u(\tau)|_{C^1}) (1 + \|u(\tau)\|_{H^s}) \|u(\tau)\|_{H^s} d\tau$$

**Beweis.** Wir wenden auf die Gleichung den Differentialoperator  $\nabla^\alpha$  mit  $|\alpha| = s$  an,

$$A^i \partial_i (\nabla^\alpha u) + [\nabla^\alpha A^i - A^i \nabla^\alpha] \partial_i u + \nabla^\alpha B = 0.$$

Wir bilden das  $L^2$ -Skalarprodukt mit  $\nabla^\alpha u$  und integrieren genau wie bei den linearen Systemen partiell,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^m} \langle \nabla^\alpha u, A^0 \nabla^\alpha u \rangle dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} (\langle \nabla^\alpha u, (\partial_j A^j) \nabla^\alpha u \rangle - 2\operatorname{Re} \langle \nabla^\alpha u, B^\alpha \rangle) dx \end{aligned} \quad (107)$$

mit

$$B^\alpha = [\nabla^\alpha A^i - A^i \nabla^\alpha] \partial_i u + \nabla^\alpha B.$$

Die rechte Seite von (107) kann mit den Moser-Abschätzungen kontrolliert werden. Zunächst einmal haben wir

$$\begin{aligned} |(\nabla_j A^j)| &= \left| \frac{\partial}{\partial x^j} A^j + (DA) \nabla_j u \right| \leq c(1 + |u|_{C^1}) \\ |\partial_t A^0| &= \left| \frac{\partial}{\partial t} A^0 + (DA) \partial_t u \right| \\ &\leq c(1 + |\partial_t u|) \leq c(1 + |u|_{C^1}), \end{aligned}$$

wobei wir die glm Beschränktheit und im letzten Schritt die Gleichung verwendet haben. Es folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle \nabla^\alpha u, (\partial_j A^j) \nabla^\alpha u \rangle \leq c(1 + |u|_{C^1}) \|u\|_{H^s}^2 \quad (108)$$

Als nächstes soll  $\nabla^\alpha B$  abgeschätzt werden. Leider kann man die dritten Moserabschätzungen nicht unmittelbar anwenden, weil  $B$  auch explizit von  $x$  abhängt. Diese Schwierigkeit kann umgangen werden, indem man eine Funktion  $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  einführt, die kompakten Träger hat und auf  $\operatorname{supp} u(\tau, \cdot) \cup \operatorname{supp} B(\tau, \cdot, 0)$  die Identität ist. Dann ist nämlich  $B(t, x, u) = B(t, v, u)$ , und wir können die Moser-Abschätzungen auf die Funktion  $(v, u)$  anwenden. Man erhält so die Ungleichung

$$\|\nabla^\alpha B\|_{L^2} \leq c(1 + \|\nabla^s u\|_{L^2}). \quad (109)$$

Die zweite Moser-Abschätzung liefert

$$\|(\nabla^\alpha A^i - A^i \nabla^\alpha) \partial_i u\|_{L^2} \leq c(\|\nabla A^i\|_{L^\infty} \|\nabla^{s-1} \partial_i u\|_{L^2} + \|\nabla^s A\|_{L^2} \|\partial_i u\|_{L^\infty}).$$

Den Term  $\|\nabla^s A\|_{L^2}$  kann man schließlich mit der dritten Moser-Ungleichung abschätzen und erhält

$$\begin{aligned} & \|(\nabla^\alpha A^i - A^i \nabla^\alpha) \partial_i u\|_{L^2} \\ & \leq c(|u|_{C^1} \cdot \|\nabla^{s-1} \partial_i u\|_{L^2} + (1 + \|u\|_{L^2}) |\partial_i u|_{C^0}) \end{aligned}$$

Im Falle  $i = 0$  kann man die Gleichung einsetzen und erhält

$$\|(\nabla^\alpha A^i - A^i \nabla^\alpha) \partial_i u\|_{L^2} \leq c|u|_{C^1} (1 + \|u\|_{H^s}). \quad (110)$$

Durch Einsetzen von (108), (109) und (110) in (107) und Integration über  $t$  folgt die Behauptung.  $\square$

Um zu verstehen, warum dieses Lemma so nützlich ist, betrachten wir die Ungleichung in differentieller Form etwas genauer. Wir wählen  $s$  so groß, dass  $\|u\|_{H^s} \geq c|u|_{C^1}$  ist. Dann haben wir vor Integration über  $t$  die Ungleichung

$$\frac{d}{dt} \| \|u\| \|^2 \leq c(1 + \| \|u\| \|^2),$$

dabei bezeichnet  $\| \| \cdot \|$  die Norm

$$\| \|u\| \|^2 = \sum_{\alpha \text{ mit } |\alpha| \leq S} \int \langle \nabla^\alpha u, A^0 \nabla^\alpha u \rangle dx$$

(diese Norm ist natürlich zu  $\|\cdot\|_{H^s}$  äquivalent; wir verwenden hier  $\| \| \cdot \|$ , weil  $\frac{d}{dt} \| \|u\| \|^2$  genau Terme wie auf der linken Seite von (107) liefert). Setzt man

$$g(t) = \| \|u\| \|^2 + 1,$$

erhält man also die Differentialgleichung

$$\dot{g} \leq c \cdot g^2,$$

und separieren, sowie Integration mit den Anfangswerten  $g(0) = 1$  liefert die Ungleichung  $g(t) \leq (1 - ct)^{-1}$  und folglich

$$\| \|u\| \|(t) \leq \frac{ct}{1 - ct}.$$

Wir haben somit eine Ungleichung abgeleitet, die  $\|u\|_{H^s}$  für kleine Zeiten (genauer für  $t \ll c^{-1}$ ) durch eine obere Schranke abschätzt, welche für  $t \rightarrow 0$  nach null konvergiert. Für große Zeiten (für  $t > c^{-1}$ ) haben wir dagegen über  $\|u\|_{H^s}$  keinerlei Kontrolle. Dies läßt sich auch gar nicht vermeiden, weil Lösungen nichtlinearer hyperbolischer Gleichungen i.a. nach endlicher Zeit Singularitäten bilden und aufhören zu existieren.

Wir skizzieren abschließend eine Methode, mit der sich ausgehend von Satz 2.3.8 ein lokaler Existenzsatz beweisen läßt. Dazu betrachtet man zu gegebenem  $v \in C^0((0, T), H^s(\mathbb{R}^m))$  die Lösung der *linearen* Gleichung

$$A^j(v) \partial_j u + B(v) = 0.$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung erhält man ganz analog zu Satz 2.3.8 eine Abschätzung von  $\|u\|_{H^s}^2$ , die auf der rechten Seite Sobolevnormen von  $u$  und  $v$  enthält. Indem man  $T$  hinreichend klein wählt, kann man erreichen, dass

1. Die Abbildung  $K : v \rightarrow u$  bildet  $B_\varepsilon(0) \subset C^0((0, t), H^s(\mathbb{R}^m))$  in sich ab.
2.  $K$  ist eine Kontraktion.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es dann ein  $u \in B_\varepsilon(0)$  mit  $Ku = u$ . Dieses  $u$  ist die gesuchte Lösung der nichtlinearen Gleichung. Die Einzelheiten dieses Beweises sind alle nicht schwierig, aber etwas länglich, und wir lassen sie hier aus Zeitgründen weg.

**2.4. Globale Methoden.** In diesem Kapitel wollen wir an Beispielen einige Methoden erklären, mit denen sich das globale Verhalten von Lösungen untersuchen läßt.

**Beispiel 2.5.** (*eine nichtlineare Wellenabbildung,  $m = 1$* )

*Wir betrachten das folgende quasilineare System in einer Raumdimension,*

$$\left. \begin{aligned} (-\partial_t^2 + \partial_x^2)u &= -2(\dot{u}\dot{v} - u'v') \\ (-\partial_t^2 + \partial_x^2)v &= e^{-2v}(\dot{u}^2 - |u'|^2). \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

*Dieses Gleichungssystem beschreibt die Wellenabbildung in die Poincarésche Halbebene; diese geometrische Interpretation spielt für uns hier aber keine Rolle. Wir wollen zeigen, dass (111) eine **globale Lösung** besitzt. Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz genügt es zu zeigen, dass die Größe*

$$|u|_{C^1} + |v|_{C^1} + |\partial_t u|_{C^0} + |\partial_t v|_{C^0}$$

*für alle Zeiten beschränkt ist.*

*Zunächst einmal ist es hilfreich, dass es eine erhaltene Energie gibt. Wie man durch eine direkte Rechnung verifiziert, ist nämlich das Integral*

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \{e^{-2v}(\dot{u}^2 + u'^2) + \dot{v}^2 + v'^2\} dx$$

*zeitunabhängig.*

*Wir schreiben die Gleichungen in der Form*

$$\left. \begin{aligned} (-\partial_t^2 + \partial_x^2)u &= Q_u \\ (-\partial_t^2 + \partial_x^2)v &= Q_v \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

mit Quelltermen  $Q_u$  und  $Q_v$ . Die Lösung von (112) kann explizit angegeben werden,

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u(0, t-x) + u(0, t+x)) + \int_{x-t}^{x+t} \partial_t u|_{t=0} \\ + \frac{1}{2} \int_{\Delta} Q_u(t', x') dt' dx'$$

und entsprechend für  $v$ , dabei ist  $\Delta$  das Dreieck mit Ecken  $(t, x)$ ,  $(0, t-x)$  und  $(0, t+x)$ . Die  $L^1$ -Norm von  $Q_v$  kann durch die Energie abgeschätzt werden, und daher ist

$$\left| \int_{\Delta} Q_v \right| \leq \int_0^t E = tE.$$

Folglich ist  $v$  beschränkt. Dann ist auch die  $L^1$ -Norm von  $Q_u$  beschränkt. Um die ersten Ableitungen von  $u$  und  $v$  abzuschätzen, führen wir Lichtkegelkoordinaten  $\xi = \frac{1}{2}(t+x)$ ,  $\eta = \frac{1}{2}(t-x)$  ein. Die Gleichungen nehmen dann die Form

$$\left. \begin{aligned} u_{\xi\eta} &= u_{\xi}v_{\eta} - u_{\eta}v_{\xi} \\ v_{\xi\eta} &= -e^{-2v}u_{\eta}u_{\xi} \end{aligned} \right\}$$

an. Durch direktes Nachrechnen sieht man, dass

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}(e^{-2v}u_{\eta}^2 + v_{\eta}^2) &= 0 \\ \partial_{\eta}(e^{-2v}u_{\xi}^2 + v_{\xi}^2) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass auch die Ableitungen  $u_{\eta}$ ,  $u_{\xi}$ ,  $v_{\eta}$ ,  $v_{\xi}$  beschränkt sind.  $\square$

### Beispiel 2.6. (Sobolev-Methoden)

Wir wollen nun einen globalen Existenzsatz für die semilineare Gleichung

$$(\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{R}^3})u + u^3 = 0$$

und Anfangswerte mit kompaktem Träger beweisen. Dazu müssen wir zeigen, dass die  $L^{\infty}$ -Norm von  $u$  beschränkt bleibt. Nach dem Sobolev-schen Einbettungssatz genügt es, die  $H^2$ -Norm von  $u$  zu beschränken. Zunächst einmal ist die Energie

$$E = \frac{1}{2} \int (|\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^4) dx$$

zeitlich erhalten. Folglich ist die  $L^4$ -Norm von  $u$  gleichmäßig beschränkt. Da der Träger durch die Kausalität kontrolliert werden kann, können wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_K u^2 dx \leq \|u\|_4^2 \cdot \sqrt{|K|}$$

auch die  $L^2$ -Norm von  $u$  abschätzen. Aus der Energieerhaltung folgt außerdem, dass  $\|u\|_{H^1}$  beschränkt ist.

Wir differenzieren nun die Gleichung durch,

$$\partial_t^2 \nabla_i u - \Delta \nabla_i u + 3u^2 \nabla_i u = 0$$

Multiplikation mit  $\partial_t \nabla_i u$  und Integration liefert

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int (|\partial_t \nabla_i u|^2 + |\nabla \nabla_i u|^2) dx = -3 \int u^2 (\nabla_i u) (\partial_t \nabla_i u) dx \quad (113)$$

Das letzte Integral kann durch

$$\|\partial_t \nabla_i u\|_{L^2}^2 + \|u^2 \nabla_i u\|_{L^2}^2$$

abgeschätzt werden. Den zweiten Term können wir mit Hölder und Sobolev folgendermaßen weiter abschätzen,

$$\|u^2 \nabla_i u\|_{L^2}^2 = \int u^4 |\nabla_i u|^2 \leq \left( \int u^6 \right)^{\frac{2}{3}} \left( \int (\nabla_i u)^6 \right)^{\frac{1}{3}} \leq c \|u\|_{H^1}^4 \|u\|_{H^2}^2.$$

Durch Einsetzen in (113) erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dt} (\|\partial_t \nabla_i u\|_{L^2}^2 + \|\nabla^2 u\|_{L^2}^2) \leq c(t) \|u\|_{H^2}^2,$$

und eine Gronwall-Abschätzung liefert eine Schranke für  $\|u\|_{H^2}$ .  $\square$

### Beispiel 2.7. (Hilbertraum-Methoden)

Wir betrachten für eine reelle Funktion  $\varphi(t, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  die Wirkung

$$S = \int \int \mathcal{L}(x, \varphi, \dot{\varphi}, \varphi') dx dt$$

mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=0,1} a^{ij}(x) (\partial_i \varphi) (\partial_j \varphi) - V(x) \varphi^2$$

mit einer reellen symmetrischen  $(2 \times 2)$ -Matrix  $a^{ij}$  und einer reellen Funktion  $V$ . Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{ij}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_j (a^{ij}(x) \varphi_{ij}) + V \varphi \quad (114)$$

Wir wollen, dass diese Gleichung hyperbolisch ist und dass  $t$  und  $x$  Zeit- bzw. Raumrichtungen sind. Dazu setzen wir

$$a^{00} < 0 \quad \text{und} \quad a^{11} > 0$$

voraus. Man beachte, dass wir im Spezialfall  $a^{ij} = \text{diag}(-1, 1)$  und  $V \equiv 0$  die gewöhnliche Wellengleichung erhalten. Gleichung (114) kann als Wellengleichung in einer gekrümmten Raumzeit aufgefasst werden. Wir haben eine erhaltene Energie. Dies folgt aus dem allgemeinen Lagrange-Formalismus und der Tatsache, dass  $\mathcal{L}$  nicht explizit von der Zeit abhängt; die Energie ist gegeben durch

$$E = \int \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} \right) dx = \int (a^{00} \dot{\varphi}^2 - a^{11} \varphi'^2 + V \varphi^2) dx.$$

Man kann auch durch eine direkte Rechnung überprüfen, dass  $E$  erhalten ist.

Wir schreiben nun die Gleichung als ein symmetrisch hyperbolisches System um. Zunächst einmal schreiben wir (114) in Komponenten aus,

$$(a^{00} \partial_t^2 + 2a^{01} \partial_{tx} + a^{11} \partial_x^2) \varphi + (a^{01})' \partial_t \varphi + (a^{11})' \partial_x \varphi + V \varphi = 0$$

Mit dem Vektor  $\psi = (\varphi', \dot{\varphi}, 0)$  erhalten wir das System erster Ordnung

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{00} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a^{11} & 2a^{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \psi = 0$$

Die Koeffizientenmatrix vor  $\partial_t$  und  $\partial_x$  ist nicht positiv bzw. nicht symmetrisch. Wir erhalten aber ein symmetrisch hyperbolisches System, indem wir die erste Gleichung mit  $a^{11}$  und die zweite Gleichung mit  $(-1)$  multiplizieren,

$$\left[ \begin{pmatrix} a^{11} & 0 & 0 \\ 0 & -a^{00} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_t + \begin{pmatrix} 0 & -a^{11} & 0 \\ -a^{11} & -2a^{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \psi = 0$$

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Systeme liefert eine eindeutige globale Lösung des Cauchyproblems, falls die Koeffizienten glm beschränkt und  $-a^{00}$  glm positiv ist.

Wir beschreiben nun eine Methode, mit der sich das Verhalten der Lösung genauer analysieren läßt. Dazu schreiben wir die Gleichung als ein System erster Ordnung in der Zeit, aber zweiter Ordnung in  $x$ ,

$$\partial_t \Phi = h\Phi \quad (115)$$

mit  $\Phi = (\varphi, \dot{\varphi})$ ,

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ H & K \end{pmatrix}$$

und

$$H = -\frac{1}{a^{00}}(\partial_x a^{11} \partial_x + v), \quad K = -\frac{1}{a^{00}}(2a^{01} \partial_x + (a^{01})').$$

Die Energie läßt sich nun dazu ausnutzen, einen Hilbertraum so einzuführen, dass  $H$  formal anti-selbstadjungiert wird. Dazu führen wir zunächst ein Skalarprodukt ein, indem wir  $E$  "polarisieren", also

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \int (a^{00} \bar{\varphi}_1 \varphi_2 - a^{11} \bar{\varphi}_1' \varphi_2' + v \bar{\varphi}_1 \varphi_2) dx,$$

wobei wieder  $\Phi_{1/2} = (\varphi_{1/2}, \dot{\varphi}_{1/2})$ . Die Energieerhaltung impliziert nun, dass für eine Lösung  $\phi$  des Cauchy-Problems mit kompaktem Träger in  $x$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} \langle \Phi, \Phi \rangle \\ &= \langle \dot{\Phi}, \Phi \rangle + \langle \Phi, \dot{\Phi} \rangle = \langle h\Phi, \Phi \rangle + \langle \Phi, h\Phi \rangle. \end{aligned}$$

Da man jedes  $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})^2$  als Anfangswerte für eine Lösung des Cauchy-Problems verwenden kann, folgt durch Polarisierung, dass

$$\langle h\Phi_1, \Phi_2 \rangle = -\langle \Phi_1, h\Phi_2 \rangle \quad \text{für alle } \Phi_1, \Phi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})^2.$$

Also ist  $h$  formal anti-selbstadjungiert.

Man muss nun einen geeigneten Definitionsbereich wählen, so dass  $h$  selbstadjungiert wird. Dies ist ein technisches Problem der Funktionalanalysis, auf das wir hier nicht eingehen wollen. Wir nehmen hier einfach an, dass für einen geeigneten Definitionsbereich  $\mathcal{D}(h)$  der Operator  $h$  anti-selbstadjungiert ist,  $h^* = -h$ . Dann liefert uns der Spektralsatz die Darstellung

$$h = \int_{\sigma(H)} \lambda dE_\lambda,$$

und wir können das Cauchy-Problem explizit lösen, indem wir (115) mit dem Funktionalkalkül aufintegrieren,

$$\phi(t) = e^{th} \phi_0 = \int_{\sigma(H)} e^{\lambda t} dE_\lambda \phi_0.$$

Aus Informationen über das Spektrum und die Eigenfunktionen von  $h$  kann man Information über das Langzeitverhalten der Lösungen gewinnen. Besitzt  $H$  beispielsweise ein Punktspektrum, dann fällt die Lösung  $\phi(\cdot, x)$  für großes  $t$  i.a. nicht ab.

### 3. HYPERBOLISCHE ERHALTUNGSGLEICHUNGEN

Im Kapitel 2 haben wir lokale Existenz- und Eindeutigkeit für glatte Lösungen untersucht. Bei nichtlinearen Gleichungen werden die Lösungen i.a. nach endlicher Zeit  $T$  Singularitäten ausbilden. Dies bedeutet nicht zwangsläufig, dass die Lösung zur Zeit  $T$  zusammenbricht; es kann sein, dass sie zwar nicht mehr glatt ist, aber als verallgemeinerte "schwache" Lösung weiter existiert. Dies soll nun genauer untersucht werden. Zur Einfachheit beschränken wir uns auf eine Raumdimension und nehmen an, dass die Gleichung in eine spezielle "Divergenzform" gebracht werden kann.

**Definition 3.1.** Ein System von Differentialgleichungen der Form

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{116}$$

mit  $u = (u_1, \dots, u_N)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_N)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ ,  $N > 1$  heißt **System von Erhaltungsgleichungen**. Im Falle  $N = 1$  spricht man von einer **skalaren Erhaltungsgleichung**.

Indem man durchdifferenziert, kann man (116) immer als quasilineare Gleichung der Form

$$A^0(u) \partial_t + A^1(u) \partial_x u + B(u) = 0$$

mit  $A^0$  positiv schreiben, und in den meisten interessantesten Fällen kann man auch erreichen, dass  $A^0$  und  $A^1$  symmetrisch sind. Die Form (116) ist sicher viel spezieller. Allerdings spiegelt die spezielle Form (116) wider, dass es im System erhaltene Größen (Energie, Impuls, Ladung,...) gibt, und deswegen können viele physikalische Gleichungen als Erhaltungsgleichungen geschrieben werden. Um eine kurze Idee zu geben, warum die Form der Gleichung mit Erhaltungsgrößen in Verbindung steht, betrachten wir die Größe

$$E(t) = \int u(t, x) dx$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}E = \int \partial_t u(t, x) dx = - \int f(u)_x dx = 0.$$

**Beispiel 3.2.** (Nichtlineare Wellengleichung)

Eine schwingende Saite mit großer Auslenkung, aber ohne Reibung, wird beschrieben durch die Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x p(\partial_x u)$$

mit einer gegebenen Funktion  $p$ . Setzen wir  $v = \partial_t u$  und  $w = \partial_x u$ , können wir die Gleichung in Erhaltungsform bringen,

$$\left. \begin{aligned} \partial_t v - \partial_x p(w) &= 0 \\ \partial_t w - \partial_x v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**Beispiel 3.3.** (Euler-Gleichung)

Wir betrachten ein Gas mit Dichte  $\rho(t, x)$ , Geschwindigkeit  $u(t, x)$  und Druck  $p(t, x)$ . Wir nehmen an, dass es im System keine Dissipation (Reibung) gibt, so dass Energie- und Impulserhaltung gelten. Die Dynamik des Gases wird dann durch die Eulergleichungen beschrieben,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (\text{Kontinuitätsgleichung})$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \quad (\text{Impulserhaltung})$$

Dies ist i.a. noch kein geschlossenes Gleichungssystem, da die Gleichung für  $p$  fehlt. Im einfachsten sog. **isentropischen** Fall ist  $p$  eine gegebene Funktion von  $\rho$ . Darunter fallen bei einem idealen Gas der isotherme Fall ( $p \sim \rho$ ) und der adiabatische Fall ( $p \sim \rho^k$ ). Im allgemeinen wird  $p$  durch die Energieerhaltung bestimmt, nämlich

$$\left[ \rho \left( \frac{u^2}{2} + e \right) \right]_t + \left[ \rho u \left( \frac{1}{2} u^2 + i \right) \right]_x = 0,$$

wobei  $e$  die innere Energie und  $i = e + p/\rho$  die spezifische Enthalpie ist, und der Druck über  $p = \rho^2 \cdot \partial e / \partial \rho$  gegeben ist.

Bei Systemen mit Reibung erhält man einen zusätzlichen "Viskositätsterm" der Form  $\lambda u_{xx}$ . Wichtigstes Beispiel sind die Navier-Stokes-Gleichungen. Die Gleichungen sind dann nicht mehr hyperbolisch, sondern parabolisch, und wir werden deshalb darauf nicht weiter eingehen.

**Beispiel 3.4.** ( $p$ -Systeme)

Die Euler-Gleichungen lassen sich durch eine Variablentransformation in eine einfachere Form bringen. Dazu setzen wir

$$\tau(t, x) = t, \quad z(t, x) = \int_{-\infty}^x \rho(t, x) dx.$$

Dann ist wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \rho, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \int_{-\infty}^x \rho_t = - \int_{-\infty}^x (\rho u)_x = -\rho u(x)$$

und folglich

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \rho u \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial z}.$$

Setzt man dies in die Gleichungen ein, erhält man

$$\rho_\tau + \rho^2 u_z = 0, \quad \rho(u_\tau + \rho_z) = 0.$$

Dies ist nicht mehr in Erhaltungsform. Setzen wir aber  $v = \rho^{-1}$ , so erhält man das sog.  $p$ -System

$$\left. \begin{array}{l} v_\tau - u_z = 0 \\ u_\tau + p_z = 0 \end{array} \right\}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist der isentropische Fall mit  $p = kv^{-\gamma}$ . Es ist interessant zu bemerken, dass die nichtlineare Wellengleichung aus Beispiel 4.2 ein spezielles  $p$ -System ist.

**Beispiel 3.5.** (Skalare Erhaltungsgleichung)

Wir betrachten nun die skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0$$

und nehmen an, dass  $f''(u) = 0$  (diese Bedingung werden wir später noch genauer behandeln). Im Spezialfall  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  erhält man die

**Burgers-Gleichung**

$$u_t + uu_x = 0.$$

Um die skalare Erhaltungsgleichung zu lösen, betrachten wir die Charakteristiken  $x(t)$ ,

$$\frac{dx}{dt} = f'(u)$$

längs der Charakteristiken haben wir dann

$$\frac{d}{dt}u(t, x(t)) = \partial_t u + \partial_x u \dot{x} = 0,$$

also ist  $u$  längs der Charakteristiken konstant, und die Charakteristiken sind Geraden. Wir haben also ein einfaches Verfahren, um Lösungen der skalaren Erhaltungsgleichung zu konstruieren. Die Lösung existiert für alle Zeiten genau dann, wenn  $u_0$  monoton steigend ist. Ansonsten bildet sich nach endlicher Zeit eine Singularität aus.

### 3.1. Schwache Lösungen von Erhaltungsgleichungen, Sprungbedingungen.

Wir wollen nun einen schwachen Lösungsbegriff einführen. Dazu betrachten wir zunächst eine klassische Lösung  $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  des allgemeinen Cauchy-Problems

$$\left. \begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \\ u|_{t=0} &= u_0 \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Für  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$  gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (u_t + f_x) \phi \, dx dt \\ &= - \int u \phi|_{t=0} dx - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} (u \phi_t + f(u) \phi_x) \, dx dt \end{aligned}$$

und nach Einsetzen der Randwerte,

$$\iint_{t \geq 0} (u \phi_t + f(u) \phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi \, dx = 0. \quad (118)$$

Ist umgekehrt für  $u \in C^1$  diese Gleichung für alle  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$  erfüllt, so ist  $u$  eine Lösung des Cauchy-Problems (117). Dies erlaubt es uns, (118) zur Definition einer verallgemeinerten Lösung zu verwenden.

**Definition 3.1.1.** *Eine Funktion  $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2)$  heißt schwache Lösung des Cauchy-Problems (117), falls für alle  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$  die Gleichung (118) erfüllt ist.*

Wir betrachten speziell Lösungen mit einer Unstetigkeit, also  $\mathbb{R}^2 = D_1 \cup D_2$  und  $\partial D_1$  eine Kurve  $\Gamma$  (siehe Abb.42) und nehmen an, dass  $u$  eine schwache Lösung ist, die auf  $\overline{D_1}$  und  $\overline{D_2}$  von der Klasse  $C^1$  ist. Eine solche Lösung wird auch **Schockwellenlösung** genannt,  $\Gamma$  ist die Schockfront.

Dann gilt für jedes  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$

$$0 = \iint_{\mathbb{R}^2} (u \phi_t + f \phi_x) \, dx dt = \left( \iint_{D_1} + \iint_{D_2} \right) (u \phi_t + f \phi_x) \, dx dt.$$

Die beiden Integrale können durch partielle Integration in Randintegrale umgewandelt werden,

$$\iint_{D_i} (u \phi_t + f \phi_x) = \int_{\partial D_i} \phi (-u dx + f dt).$$

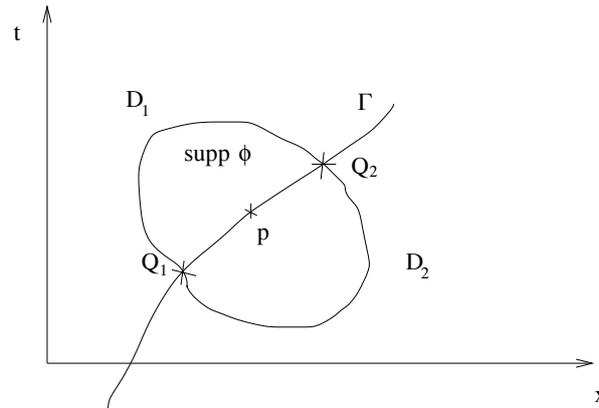


ABBILDUNG 5

Summiert man die beiden Integrale auf, so erhält man ein Integral längs  $\Gamma$ ,

$$0 = \int_{\Gamma} \phi(-[u]dx + [f(u)]dt),$$

wobei  $[\cdot]$  den "Sprung" der Funktion längs  $\Gamma$  bezeichnet, also für  $g \in C^1(\overline{D_1}) \cup C^1(\overline{D_2})$  und  $x_0 \in \Gamma$ ,

$$[g] = \lim_{D_1 \ni x \rightarrow x_0} g(x) - \lim_{D_2 \ni x \rightarrow x_0} g(x).$$

Da  $\phi$  beliebig ist, folgt, dass längs  $\Gamma$

$$s[u] = [f(u)], \quad (119)$$

wobei  $s$  die "Geschwindigkeit" des Schocks ist,

$$s = \frac{dx}{dt}.$$

Die Bedingung (29) wird **Sprungbedingung** oder in der Gasdynamik **Rankine-Hugoniot-Bedingung** genannt.

**Beispiel 3.1.2.** Für die Burgers-Gleichung lautet die Sprungbedingung (119)  $s(u_\ell - u_r) = \frac{1}{2}(u_\ell^2 - u_r^2)$  und folglich

$$s = \frac{1}{2}(u_\ell + u_r).$$

Betrachten wir als Beispiel das Cauchy-Problem mit Anfangswerten

$$u_0 = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ 1 - x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$$

Die Methode der Charakteristiken liefert die Lösung

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & , x < t \\ (1-x)/1-t & , t \leq x \leq 1 \\ 0 & , x > 1 \end{cases}$$

Diese Lösung ist bis zur Zeit  $t = 1$  stetig. Danach haben wir eine Schockfront, nämlich für  $t > 1$ ,

$$u(t, x) = \begin{cases} 1 & , x < 1 + \frac{1}{2}(t-1) \\ 0 & , x > 1 + \frac{1}{2}(t-1) \end{cases}$$

Die Lösung ist in Abb.6 dargestellt.

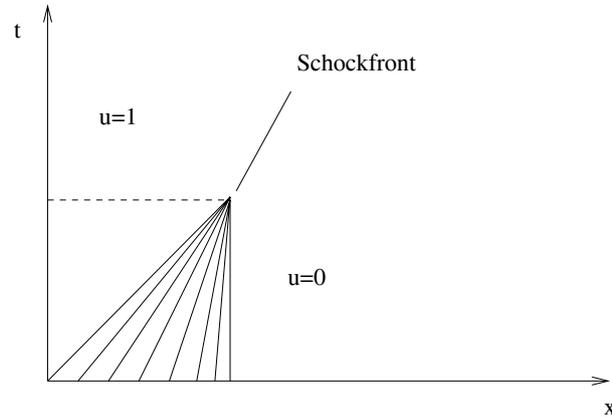


ABBILDUNG 6

Die nächsten beiden Beispiele zeigen, dass die Sprung- und Entropiebedingungen nicht erhalten bleiben, wenn man die Gleichungen in eine andere, äquivalente Form bringt oder glatten, nichtlinearen Transformationen unterwirft. Es ist also Vorsicht geboten: man darf die hyperbolische Erhaltungsgleichung nicht als rein mathematische Gleichung betrachten, sondern muss sie als eine Gleichung in einer ganz bestimmten, durch die Physik vorgegebene Form auffassen.

**Beispiel 3.1.3.** Für glattes  $u$  kann die Burgers-Gleichung in den beiden äquivalenten Formen

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}(u^2)_t + \frac{1}{3}(u^3)_x = 0$$

geschrieben werden. Die Sprungbedingungen sind in beiden Fällen verschieden,

$$s = \frac{u_\ell + u_r}{2} \quad \text{bzw.} \quad S = \frac{2(u_\ell^2 + u_\ell u_r + u_r^2)}{3(u_\ell + u_r)}.$$

Es ist also wichtig, mit der von der physikalisch motivierten Divergenzform zu arbeiten.

**Beispiel 3.1.4.** Wir betrachten wieder die skalare Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{120}$$

unter der Annahme  $f'' > 0$ . Da  $f' \nearrow$ , können wir auf eindeutige Weise die Koordinatentransformation

$$u \rightarrow v = f'(u)$$

durchführen. Die Gleichung transformiert sich in

$$v_t = f''(u)u_t = -f''(u)f'(u)u_x = -f'(f''u_x),$$

und wir erhalten die Burgers-Gleichung

$$v_t + vv_x = 0. \tag{121}$$

Die Sprungbedingungen für (120) und (121) sind

$$s = \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r} \quad \text{bzw.} \quad s = \frac{v_\ell + v_r}{2} = \frac{f'(u_\ell) + f'(u_r)}{2},$$

und diese Bedingungen sind offensichtlich unterschiedlich.

### 3.2. Verlust der Eindeutigkeit, die Entropiebedingungen von Lax.

Das nächste Beispiel illustriert, dass die schwache Lösung des Cauchy-Problems im allgemeinen nicht eindeutig ist.

**Beispiel 3.2.1.** Betrachte das Cauchyproblem für die Burgers-Gleichung mit Anfangswerten

$$u_0 = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Die Methode der Charakteristiken liefert eine eindeutige Lösung in den Gebieten  $x < 0$  und  $x > t$ . Im Gebiet dazwischen gibt es aber verschiedene Lösungen, z.B.

$$u = \begin{cases} 0 & , x < \frac{t}{2} \\ 1 & , x > \frac{t}{2} \end{cases} \quad \text{oder} \quad u = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{x}{t} & , 0 < x < t \\ 1 & , x > t \end{cases}$$

Für die Anfangswerte

$$u_0 = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ -1 & , x > 0 \end{cases}$$

gibt es sogar ein Kontinuum von Lösungen, nämlich für  $\alpha > 1$ ,

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} 1 & , 2x < (1 - \alpha)t \\ -\alpha & , (1 - \alpha)t < 2x < 0 \\ \alpha & , 0 < 2x < (\alpha - 1)t \\ -1 & , (\alpha - 1)t < 2x \end{cases}$$

Zumindest für Gleichungen, die aus der Physik kommen, sollte es eine eindeutige Lösung des Cauchy-Problems geben. Dieser scheinbare Widerspruch kann dadurch ausgelöst werden, dass man physikalisch motivierte Zusatzbedingungen aufstellt, die Eindeutigkeit garantieren. Wir wollen diese Zusatzbedingung zunächst für skalare Gleichungen motivieren. Dazu nehmen wir an, dass  $u_0 \nearrow$ , so dass es mit der Methode der Charakteristiken eine eindeutige Lösung des Cauchy-Problems gibt, die über die Gleichung

$$u = u_0(x - tf'(u(t, x)))$$

definiert wird (siehe Beispiel 4.5). Wir differenzieren durch

$$u_x = u'_0 (1 - tf''(u)u_x),$$

und erhalten durch Auflösen nach  $u_x$  die Ungleichung

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + u'_0 f''(u)t} \leq \frac{1}{f''(u)t} \leq \frac{E}{t}$$

mit  $E^{-1} := \inf f'' > 0$ . Wir sehen also, dass bei glatten Lösungen die Ableitung  $u_x$  zwar positiv, aber nicht zu groß sein kann. Es ist nahelegend, diese Bedingung auf schwache Lösungen zu verallgemeinern, indem man die Ableitung durch einen Differenzenquotienten ersetzt, also

$$\frac{u(t, x + a) - u(t, x)}{a} \leq \frac{E}{t} \quad \forall a > 0, t > 0 \quad (122)$$

fordert. Insbesondere darf  $u$  also nicht “nach oben springen”. Eine solche Bedingung, die nicht aus den Gleichungen abgeleitet werden kann, sondern zusätzlich postuliert werden muss, nennt man **Entropiebedingung**. Wie man direkt verifiziert, beseitigt die Entropiebedingung (122) die Uneindeutigkeit in Beispiel 4.2.1.

Wir bringen nun die gerade abgeleitete Bedingung  $u_\ell > u_r$  für Schocks in eine besser verständliche Form. Nach dem Mittelwertsatz liefert die

Rankine-Hugoniot-Bedingung

$$s = \frac{f(u_\ell) - f(u_r)}{u_\ell - u_r} = f'(\xi) \quad \text{mit} \quad u_\ell > \xi > u_r.$$

Da  $f'' > 0$ , ist dies äquivalent zu

$$f'(u_\ell) > s > f'(u_r).$$

Da  $f'$  die "Geschwindigkeit" der Charakteristiken ist, bedeutet diese Bedingung, dass die Charakteristiken "in die Schockfront hineinlaufen" müssen. Dies kann als ein "Verlust von Information" an der Schockfront interpretiert werden und liefert eine Begründung für den Begriff "Entropiebedingung". Dieser "Informationsverlust" an einer Schockfront führt dazu, dass die Gleichungen irreversibel (also rückwärts in der Zeit nicht eindeutig lösbar) sind.

**Beispiel 3.2.2.** Wir betrachten für  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  die Lösungen der Burgers-Gleichung

$$u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} 1 & , x < t - \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{x - \varepsilon/2}{t - \varepsilon} & , t - \frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & , x > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{falls } t < \varepsilon$$

$$u_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} 1 & , x < t/2 \\ 0 & , x > t/2 \end{cases} \quad \text{falls } t \geq \varepsilon$$

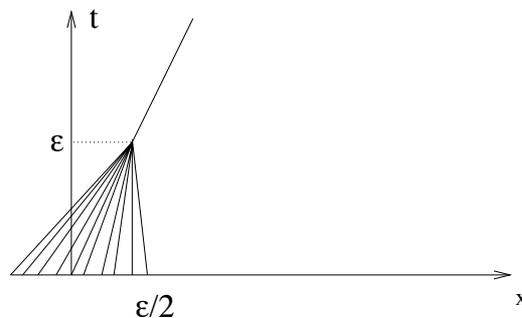


ABBILDUNG 7

Für  $t > 1$  stimmen die Lösungen alle überein, obwohl die Anfangswerte verschieden sind (siehe Abb. 7).

Wir wollen nun die Entropiebedingungen systematischer untersuchen und auf Systeme verallgemeinern. Zunächst betrachten wir die lineare skalare Gleichung

$$u_t + au_x = 0$$

mit einer reellen Konstanten  $a$ . Die Lösung ist längs der Charakteristiken  $x = at + c$  konstant, die allgemeine Lösung hat also die Form

$$u(t, x) = u_0(x - at) .$$

Nehme nun an, dass die Gerade  $t = 0$  ein Schock ist, und dass wir die Lösung rechts des Schocks bestimmen wollen. Im Fall  $a < 0$  ist die Lösung durch die Anfangswerte  $u(t = 0, x > 0)$  eindeutig bestimmt. Im Fall  $a > 0$  hingegen müssen zusätzlich Randwerte auf dem Schock vorgegeben werden.

Wir betrachten nun das lineare System

$$u_t + Au_x = 0$$

mit einer konstanten Matrix  $A$  mit Eigenwerten

$$\lambda_1 < \dots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_N .$$

Nach einem Basiswechsel ist  $A$  diagonal, und wir erhalten  $N$  skalare Gleichungen. Folglich müssen auf der Schockfront nun  $N - k$  Bedingungen vorgegeben werden. Wir kommen nun zur allgemeinen Erhaltungsgleichung

$$u_t + f'(u)u_x = 0 \tag{123}$$

und betrachten einen Schock mit Geschwindigkeit  $s$ . Wir nehmen außerdem an, dass  $f'(u)$  diagonalisierbar ist und nicht entartete Eigenwerte  $\lambda_1^{(u)} < \dots < \lambda_N^{(u)}$  hat. Nehme an, dass

$$\lambda_k(u_r) < s < \lambda_{k+1}(u_r) .$$

Dann sind genau wie beim dem linearen System auf der Schockfront  $N - k$  Bedingungen zu erfüllen. Die schwache Auswertung der Gleichungen liefert  $N$  Sprungbedingungen. Da eine der Sprungbedingungen  $s$  bestimmt, können an  $u_l$   $k - 1$  Bedingungen gestellt werden. Dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 3.2.3.** *Für das System (123) sind die **Lax-Bedingungen** erfüllt, falls*

$$\begin{aligned} \lambda_k(u_r) &< s < \lambda_{k+1}(u_r) \\ \lambda_{k-1}(u_e) &< s < \lambda_k(u_e) . \end{aligned}$$

*Die zugehörige Lösung der Erhaltungsgleichung heißt **k-Schock**.*

### 3.3. Die skalare Erhaltungsgleichung.

Wir kehren nun zurück zur skalaren Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0 , \quad u|_{t=0} = u_0 \tag{124}$$

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Entropielösung beweisen. Der Beweis basiert auf einer Differenzenapproximation und geht auf Oleinik zurück.

**Theorem 3.3.1.** *Sei  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $f'' > 0$  auf  $[-M, M]$  mit  $M \equiv \|u_0\|_\infty$ . Dann gibt es eine schwache Lösung von (124) mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $|u(t, x)| \leq M$  für alle  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .
- (ii) Die Entropiebedingung ist erfüllt: Es gibt

$$E = E(M, \mu = \min f'', A = \max f'),$$

so dass

$$\frac{u(t, x+a) - u(t, x)}{a} < \frac{E}{t} \quad \forall a > 0, t > 0.$$

- (iii) Die Lösung  $u$  ist stabil und hängt stetig von  $u_0$  ab: Falls  $u_0, v_0 \in L^\infty \cap L^1$  und  $\|v_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$ , dann gilt für die zugehörigen Lösungen  $u, v$  des Anfangswertproblems,

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(t, x) - v(t, x)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_1 + At} |u_0 - v_0| dx. \quad (125)$$

Wir bemerken, dass es im Moment mehrere Lösungen mit obigen Eigenschaften geben könnte; die Eindeutigkeit der Entropielösung werden wir später zeigen (siehe Theorem 4.3.11). Die  $L^\infty$ -Schranke (i) ist für Systeme i.a. falsch; dies ist eine der Hauptschwierigkeiten bei Systemen. Man beachte weiterhin, dass die Entropiebedingung (ii) impliziert, dass  $u$  lokal beschränkte Totalvariation besitzt. Wählt man nämlich eine Konstante  $c_1 > E/t$ , so ist die Funktion  $v = u - c_1 x$  monoton steigend und folglich für  $x_2 > x_1$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} |v'| dx &= v(x_1) - v(x_2) = u(x_1) - u(x_2) + c_1(x_2 - x_1) \\ \int_{x_1}^{x_2} |u'| dx &\leq \int_{x_1}^{x_2} (|v'| + c_1) dx \leq u(x_1) - u(x_2) + 2c_1(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind jedoch nur in  $L^\infty$ ; in diesem Sinne ist die Lösung also regulärer als die Anfangswerte. Schließlich zeigt (iii) auch, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich ist.

Wir führen nun die Gitterapproximation ein. Dazu “diskretieren” wir  $t$  und  $x$ ,

$$(t, x) \in h|N \times \ell\mathbb{Z}$$

mit Gitterlängen  $h, \ell > 0$ . Wir setzen  $t = kh$  und  $x = n\ell$  mit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  und setzen  $u_n^k \equiv u(t, x)$ . Die Differentialgleichung ersetzen wir durch die Differenzgleichung

$$\frac{1}{h} \left( u_n^{k+1} - \frac{1}{2}(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k) \right) + \frac{1}{2\ell} (f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)) = 0.$$

Es gäbe viele andere mögliche Gitterapproximationen. Unsere Wahl hat den Vorteil, dass sie in  $x$  symmetrisch ist; sie wird im Limes  $h, \ell \rightarrow 0$  gerade die Entropielösung liefern. Man beachte, dass die Differenzgleichung nur Gitterpunkte miteinander koppelt, für die  $k + n$  jeweils gerade oder ungerade ist. Die Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Gitterpunkten spielt im folgenden aber keine Rolle. Schließlich wählen wir die “zeitliche Auflösung” des Gitters fein genug,

$$\frac{Ah}{\ell} \leq 1. \quad (126)$$

**Lemma 3.3.2.** ( *$L^\infty$ -Schranke*)

$$|u_n^k| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}$$

**Beweis.** Wir lösen die Differenzgleichung nach  $u_{n+1}^k$  auf,

$$u_{n+1}^k = -\frac{h}{2\ell} [f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)] + \frac{1}{2}(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k).$$

Der Mittelwertsatz liefert

$$\begin{aligned} u_n^{k+1} &= -\frac{h}{2\ell} f'(\theta_n^k)(u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) + \frac{1}{2}(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k) \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{h}{2\ell} f'(\theta_n^k) \right) u_{n-1}^k + \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{2\ell} f'(\theta_n^k) \right) u_{n+1}^k. \end{aligned} \quad (127)$$

Wegen (126) sind die Faktoren  $\frac{1}{2} \pm \frac{h}{2\ell} f'$  beide positiv, und folglich

$$|u_n^{k+1}| \leq \sup_n u_n^k \left( \frac{1}{2} + \frac{h}{2\ell} f'(\theta_n^k) + \frac{1}{2} - \frac{h}{2\ell} f'(\theta_n^k) \right) = \sup_n u_n^k.$$

Verwende nun vollständige Induktion in  $k$ . □

**Lemma 3.3.3.** (*Entropiebedingung*)

$$\frac{u_n^k - u_{n-2}^k}{2\ell} \leq \frac{E}{kh}$$

mit  $E = c^{-1}$  und  $c = \min\left(\frac{\mu}{2}, \frac{2}{4M}\right)$ .

**Beweis.** Wir setzen

$$z_n^k = \frac{u_n^k - u_{n-2}^k}{2\ell}.$$

Dann erfüllen die  $z_n^k$  die Differenzengleichung

$$z_n^{k+1} = \frac{1}{2}(z_{n-1}^k + z_{n+1}^k) - (f(u_{n-3}^k) - 2f(u_{n-1}^k) + f(u_{n+1}^k))\frac{h}{4\ell^2}.$$

Die letzten beiden Terme sind eine Differenzenapproximation für die zweite Ableitung. Wir können wieder den Mittelwertsatz anwenden,

$$\begin{aligned} z_n^{k+1} &= \frac{1}{2}(z_{n-1}^k + z_{n+1}^k) - \frac{h}{4\ell^2} f'(u_{n-1}^k) [(u_{n-3}^k - u_{n-1}^k) - (u_{n-1}^k - u_{n+1}^k)] \\ &\quad - \frac{h}{4\ell^2} \frac{1}{2} f''(\theta_1) (u_{n-3}^k - u_{n-1}^k)^2 - \frac{h}{4\ell^2} \frac{1}{2} f''(\theta_2) (u_{n+1}^k - u_{n-1}^k)^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{h}{2\ell} f'(u_{n-1}^k) \right) z_{n-1}^k + \left( \frac{1}{2} - \frac{h}{2\ell} f'(u_{n+1}^k) \right) z_{n+1}^k \\ &\quad - \frac{h}{2} [(z_{n-1}^k)^2 f''(\theta_1) + (z_{n+1}^k)^2 f''(\theta_2)] \end{aligned}$$

Wir setzen  $M^k = \sup_n z_n^k$ , schätzen die rechte Seite ab,

$$z_n^{k+1} \leq M^k - ch(M^k)^2$$

und erhalten so die Differenzengleichung

$$M^{k+1} \leq M^k - ch(M^k)^2. \quad (128)$$

Es genügt zu zeigen, dass

$$M^k \leq \frac{1}{chk + \frac{1}{M^0}} \quad (129)$$

Dazu wenden wir vollständige Induktion an. Für  $k = 0$  ist (129) offensichtlich erfüllt. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass (118) für eine gegebenes  $k$  gilt. Nach (128) gilt dann

$$\begin{aligned} M^{k+1} &\leq M^k(1 - chM^k) = \frac{M^k}{1 + chM^k}(1 - (chM^k)^2) \\ &\leq \frac{M^k}{1 + chM^k} = \frac{1}{ch + \frac{1}{M^k}}, \end{aligned}$$

und schätzt man  $M^k$  gemäß (129) ab, folgt (129) für  $k$  ersetzt durch  $k + 1$ .  $\square$

Das nächste Lemma kontrolliert die "lokale totale Variation" der Lösung.

**Lemma 3.3.4.** *(Abschätzung im Ort)*

Für alle  $X > 0$  und  $kh \geq \alpha > 0$  gibt es eine Konstante  $c = c(M, X, \alpha)$  (unabhängig vom Gitterabstand), so dass

$$\sum_{|n| \leq X/\ell} |u_{n+2}^k - u_n^k| \leq c.$$

**Beweis.** Wir setzen  $v_n^k = u_n^k - c_1 h \ell$  mit  $c_1 > E/\alpha$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} v_{n+2}^k - v_n^k &= u_{n+2}^k - u_n^k - 2c_1 \ell \\ &\leq \frac{2\ell}{kh} - 2c_1 \ell \leq 2\ell \left( \frac{E}{\alpha} - c \right) < 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq X/\ell} |u_{n+2}^k - u_n^k| &\leq \sum_{|n| \leq X/\ell} |v_{n+2}^k - v_n^k| + \sum_{|n| \leq X/\ell} 2c_1 \ell \\ &= - \sum_{|n| \leq X/\ell} v_{n+2}^k - v_n^k + 2c_1 \ell \left( \frac{2X + \ell}{\ell} \right) \\ &\leq 2 \max_{|n| \leq X/\ell} |v_n^k| + 4c_1(X + \ell) \\ &\leq 2M + 2c_1|X| + 4c_1(X + \ell). \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma liefert eine diskrete Version von “Lipschitz-Stetigkeit in  $t$ ”.

**Lemma 3.3.5.** *(Abschätzung in der Zeit)*

Sei  $h/\ell \geq \delta > 0$  und  $\ell, h \leq 1$ . Dann gibt es für jedes  $X > 0$  ein  $L > 0$ , so dass für  $k > p$  mit  $k - p$  gerade und  $ph \geq \alpha > 0$ ,

$$\sum_{|n| < X/\ell} |u_n^k - u_n^p| \ell \leq L(k - p)h$$

**Beweis.** Wir können die diskrete “Evolutionsgleichung” (127) in der Form

$$u_n^k = a_{n \ n-1}^{k \ k-1} u_{n-1}^{k-1} + a_{n \ n+1}^{k \ k-1} u_{n+1}^{k-1}$$

schreiben, wobei die Koeffizienten die Bedingungen

$$a_{n \ n\pm 1}^{k \ k-1} \geq 0 \quad \text{und} \quad a_{n \ n-1}^{k \ k-1} + a_{n \ n+1}^{k \ k-1} = 1$$

erfüllen. Durch einmalige Iteration erhält man

$$u_n^{k+1} = A u_{n-2}^{k-1} + B u_n^{k-1} + C u_{n+2}^{k-1}$$

mit  $A, B, C \geq 0$  und  $A + B + C = 1$ , oder äquivalent,

$$u_n^{k+1} - u_n^{k-1} = A(u_{n-2}^{k-1} - u_n^{k-1}) - C(u_n^{k-1} - u_{n+2}^{k-1}). \quad (130)$$

Diese Identität erlaubt es uns, die Zeitabschätzung auf die Ortsabschätzung zurückzuführen. Multipliziert man nämlich (130) mit  $\ell$ , summiert über  $n$  und wendet Lemma 4.3.3 an, so erhält man

$$\sum_{|n| \leq X/\ell} |u_n^{k+1} - u_n^{k-1}| \ell \leq c\ell.$$

Das Zeitintervall ist nun  $[(k-1)h, (k+1)h]$ . Für größere Zeitintervalle folgt die Abschätzung mit der Dreiecksungleichung,

$$\begin{aligned} \sum_{|n| \leq X/\ell} |u_n^k - u_n^p| \ell &\leq \sum_{i=p}^{k-2} \sum_{|n| \leq X/\ell} |u_n^{i+2} - u_n^i| \ell \\ &\leq (k-p)c\ell \leq \frac{c}{\delta}(k-p)h. \end{aligned}$$

Wähle nun  $L = c/\delta$ . □

**Lemma 3.3.6.** (*Stabilität*)

Seien  $\{u_n^k\}, \{v_n^k\}$  zwei Lösungen der Differenzgleichungen mit  $\sup_n |u_n^0|, \sup_n |v_n^0| \leq M$ . Dann gilt für  $k > 0$ ,

$$\sum_{|n| \leq N} |u_n^k - v_n^k| \ell \leq \sum_{|n| \leq N+k} |u_n^0 - v_n^0| \ell.$$

**Beweis.** Wir setzen  $w_n^k = u_n^k - v_n^k$ . Dann erfüllt  $w_n^k$  die Differenzgleichung

$$\begin{aligned} w_n^{k+1} &= \frac{u_{n+1}^k - v_{n+1}^k}{2} - \frac{h}{2\ell}(f(u_{n+1}^k) - f(v_{n+1}^k)) \\ &\quad + \frac{u_{n-1}^k - v_{n-1}^k}{2} + \frac{h}{2\ell}(f(u_{n-1}^k) - f(v_{n-1}^k)) \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \frac{h}{2\ell} f'(\theta_{n+1}^k) \right] w_{n+1}^k - \left[ \frac{1}{2} + \frac{h}{2\ell} f'(\theta_{n-1}^k) \right] w_{n-1}^k \end{aligned}$$

Jetzt kann man ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.6 ausnutzen, dass die Terme in den eckigen Klammern positiv sind, nämlich

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq N} |w_n^{k+1}| &\leq \sum_{|n| \leq N} \left[ \frac{1}{2} - \frac{h}{2\ell} f'(\theta_{n+1}^k) \right] |w_{n+1}^k| + \left[ \frac{1}{2} + \frac{h}{2\ell} f'(\theta_{n-1}^k) \right] |w_{n-1}^k| \\ &\leq \sum_{|n| \leq N+1} |w_{n+1}^k| \end{aligned}$$

Das Lemma folgt nun mittels vollständiger Induktion in  $k$ .  $\square$

Der nächste Schritt im Existenzbeweis (Theorem 4.3.1) besteht darin zu zeigen, dass die Lösungen der Differentialgleichung im Limes  $\ell, h \rightarrow 0$  punktweise konvergieren. Dazu nutzt man eine Kompaktheitseigenschaft von Funktionen mit beschränkter Totalvariation (sogenannten BV-Funktionen) aus. Wir erinnern daran, dass die totale Variation einer Funktion  $u$  auf einem Intervall  $J$  definiert ist durch

$$TV_I(u) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})|, N \geq 1, x_i \in I, x_0 < \dots < x_N \right\}.$$

**Theorem 3.3.7. (Halley)**

Sei  $u_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ , eine Funktionenfolge mit

$$|u_\nu(x)| \leq M \quad \text{für alle } \nu, x$$

Nehme außerdem an, dass die  $(u_\nu)$  lokal glm beschränkte Totalvariation haben, also für jedes kompakte Intervall  $I$  gibt es  $c > 0$  mit

$$TV_I(u_\nu) \leq c \quad \text{für alle } \nu.$$

Dann gibt es eine Funktion  $u$  und eine Teilfolge  $(u_\mu)$ , so dass

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} u_\mu(x) = u(x) \quad \text{für alle } x$$

und

$$|u(x)| \leq M, \quad TV_I(u) \leq c. \quad (131)$$

**Beweis.** Es genügt, das Theorem für ein festes Intervall  $I = [a, b]$  zu beweisen, denn wir können  $\mathbb{R}$  mit abzählbar vielen Intervallen ausschöpfen, die Teilfolgen iterativ auswählen und die Diagonalfolge betrachten.

Wir führen die Funktionen  $U_\nu(x)$ ,  $x \in I$ , ein gemäß

$$U_\nu(x) = TV_{[a,x]}(u_\nu).$$

Offensichtlich sind die Funktionen  $U_\nu$  glm. beschränkt, monoton steigend und

$$|u_\nu(y) - u_\nu(x)| \leq U_\nu(q) - U_\nu(p) \quad \forall p \leq x \leq y \leq q$$

Mit dem Diagonalfolgentrick können wir eine Teilfolge  $U_{\nu'}$  auswählen, so dass

$$\lim_{\nu' \rightarrow \infty} U_{\nu'}(x) = U(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}$$

und eine Funktion  $U : \mathbb{Q} \cap [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die beschränkt und monoton steigend ist. Es seien  $J_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , diejenigen Mengen, an denen  $U$  wenigstens um  $1/n$  springt, also

$$J_n = \left\{ x \in I : \lim_{\mathbb{Q} \ni y \searrow x} U(y) - \lim_{\mathbb{Q} \ni y \nearrow x} U(y) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Da  $U$  beschränkt und monoton steigend ist, sind die  $J_n$  alle endliche Mengen. Ihre Vereinigung

$$J = \bigcup_n J_n$$

ist abzählbar und gibt genau die Unstetigkeitsstellen von  $U$  an.

Wir wählen nun eine weitere Teilfolge  $u_\mu$  aus, so dass

$u_\mu(x) \rightarrow u(x)$  für alle  $x \in (I \cap \mathbb{Q}) \cup J$  und eine geeignete Funktion  $u$ .

Wir wollen nun zeigen, dass  $u_\mu$  sogar auf ganz  $I$  punktweise konvergiert, also

$$u_\mu(x) \rightarrow u(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dazu genügt es,  $x \in I \setminus (J \cup \mathbb{Q})$  zu betrachten. Wir wissen dann, dass  $U$  in  $x$  stetig ist. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es also  $\delta > 0$ , so dass

$$|U(y) - U(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } y \in B_\delta(x).$$

Wir wählen nun  $y \in B_\delta(x) \cap (I \cap \mathbb{Q})$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \liminf_{i,j} |u_i(x) - u_j(x)| &\leq \liminf_i |u_i(x) - u(y)| + \liminf_i |u_j(x) - u(y)| \\ &\leq |U(x) - U(y)| + |U(x) - U(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass die erhaltene Funktion  $u$  die Eigenschaften (131) hat. Da der punktweise Limes beschränkter Funktionen wieder beschränkt ist, ist offensichtlich  $|u(x)| \leq M$ . Nehme an, dass  $TV_I(u) > c$ . Dann gäbe es  $N$  und  $x_0 < \dots < x_N$  mit

$$\sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| > c.$$

Dies ist ein Widerspruch, da  $u_\mu(x_j) \rightarrow u(x_j)$  und  $TV_I(u_\mu) \leq c$ .  $\square$

Wir führen nun zu  $u_k^n$  eine Funktion  $U_{h,\ell}(t, x)$  im Kontinuum ein durch

$$U_{h,\ell}(t, x) = u_k^n \quad \text{falls } n\ell \leq x < (n+1)\ell, \quad kh \leq t < (k+1)h.$$

**Lemma 3.3.8.** *Es gibt eine Teilfolge  $\{U_{h_i, \ell_i}\}$  mit  $(h_i, \ell_i) \rightarrow (0, 0)$ , so dass*

$$U_{h_i, \ell_i}(t, x) \rightarrow u(t, x) \quad \text{für alle } t, x \quad (132)$$

$$\int_{|x| \leq x} |U_{h_i, \ell_i}(t, x) - u(t, x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{für alle } t \quad (133)$$

$$\int_{0 \leq t \leq T} dt \int_{|x| \leq x} dx |U_{h_i, \ell_i}(t, x) - u(t, x)| \rightarrow 0 \quad (134)$$

**Beweis.** Die Funktionenfamilie  $\{U_{h, \ell}(t, \cdot)\}$  erfüllen die Voraussetzungen des Theorems von Helly. Also existiert eine Teilfolge  $U_{h_i, \ell_i}$  mit  $U_{h_i, \ell_i}(t, x) \rightarrow u(t, x)$  (für festes  $t$ ). Sei nun  $\{t_m\}$  eine abzählbare, dichte Teilmenge von  $[0, T]$ . Wir wählen eine Diagonalfolge  $U_i \equiv U_{h_i, \ell_i}$ , so dass  $U_i(t_m, x) \rightarrow u(t_m, x)$  für alle  $m$ .

Um (132) und (133) zu beweisen, betrachten wir die Integrale

$$I_{ij}(t) = \int_{-x}^x |U_i(t, x) - U_j(t, x)| dx .$$

Wir wählen  $\tau \in \{t_m\}$  und wenden die Dreiecksungleichung an,

$$\begin{aligned} I_{ij}(t) &\leq \int_{-x}^x |U_i(t, x) - U_i(\tau, x)| dx + \int_{-x}^x |U_j(t, x) - U_j(\tau, x)| dx \\ &\quad + \int_{-x}^x |U_i(\tau, x) - U_j(\tau, x)| dx . \end{aligned} \quad (135)$$

Die ersten beiden Integrale können mit Hilfe von Lemma 4.3.5 jeweils durch  $L(|t - \tau| + \max(h_i, h_j))$  abgeschätzt werden, wohingegen das letzte Integral nach Lebesgues dominiertem Konvergenzatz eine Cauchyfolge ist. Also ist  $I_{ij}(t)$  für alle  $t$  eine Cauchyfolge. Folglich konvergiert  $U_j(t, \cdot)$  in  $L^1$ , (133). Hieraus folgt wiederum, dass  $U_j(t, x)$  f.ü. punktweise konvergiert, und wir erhalten (132). Um (134) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  die Integrale  $I_{ij}(t)$  glm in  $t \in [\varepsilon, T]$  eine Cauchyfolge sind. Um das zu sehen, wählt man  $\varepsilon \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_N \leq T$  die genügend dicht beieinander liegen und betrachtet die Abschätzung (135) für diese endlich vielen  $\tau_j$ 's. Wir spalten nun das Doppelintegral in (134) folgendermaßen auf,

$$\begin{aligned} &\int_0^T dt \int_{-x}^x dx |U_i(t, x) - U_j(t, x)| \\ &= \int_0^\varepsilon dt \int_{-x}^x dx |U_i(t, x) - U_j(t, x)| + \int_\varepsilon^T I_{ij}(t) dt \end{aligned}$$

Der erste Summand kann durch  $2\varepsilon XM$  abgeschätzt werden, während der zweite Summand eine Cauchyfolge ist.  $\square$

Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  die Entropiebedingung erfüllt und die skalare Erhaltungsgleichung löst. Dies wird in den beiden folgenden Lemmata gezeigt, die somit den Beweis von Theorem 4.3.1 abschließen.

**Lemma 3.3.9.** (*Entropiebedingung*)

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{E}{t}$$

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, dass

$$\frac{U_i(x_1, t) - U_i(x_2, t)}{x_1 - x_2} < \frac{2E}{t - h_i}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Lemma 4.3.3 mit der Dreiecksungleichung.  $\square$

Wir müssen noch spezifizieren, wie wir  $u_n^0$  wählen. Da  $u_0$  beschränkt und messbar ist, gibt es Stufenfunktionen  $U_i$ , die auf den Intervallen  $n\ell_i \leq x \leq (n+1)\ell_i$  stückweise konstant sind, und die in  $L^1_{\text{loc}}$  gegen  $u_0$  konvergieren, also

$$\int_{-x}^x |U_i(x, 0) - u_0(x)| dx \rightarrow 0.$$

Wählen wir diese Stufenfunktionen als Anfangswerte für die Differenzenapproximation, erhalten wir tatsächlich eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung.

**Lemma 3.3.10.** Für jedes  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$  mit

$$\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0. \quad (136)$$

**Beweis.** Wir multiplizieren die Differenzengleichung

$$\frac{1}{h}(u_n^{k+1} - \frac{1}{2}(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k)) + \frac{1}{2\ell}(f(u_{n+1}^k) - f(u_{n-1}^k)) = 0$$

mit  $\phi_n^k = \phi(kh, n\ell)$  und summieren über  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Da  $\phi$  kompakten Träger hat, ist die Summe endlich, und wir erhalten durch

Umordnen

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \sum_h u_n^k \left\{ \frac{1}{h} (\phi_n^{k-1} - \frac{1}{2} (\phi_{n-1}^k + \phi_{n+1}^k)) + \frac{1}{2\ell} (\phi_{n-1}^k - \phi_n^k) \right\} \\ + \sum_n u_n^0 \left\{ -\frac{1}{2h} (\phi_{n-1}^0 + \phi_{n+1}^0) + \frac{1}{2\ell} (\phi_{n-1}^0 - \phi_n^0) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Da  $\phi \in C^1$  und  $U_j \rightarrow u$  in  $L^1_{\text{loc}} L^\infty$ , konvergiert diese ‘‘schwache Differenzgleichung’’ gegen (136).  $\square$

Nachdem Theorem 4.3.1 bewiesen ist, k6nnen wir uns nun der Eindeutigkeitsfrage zuwenden.

**Theorem 3.3.11.** *Sei  $f \in C^2$ ,  $f'' > 0$ , und seien  $u, v$  zwei L6sungen der schwachen Erhaltungsgleichung*

$$\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u))\phi_x dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0,$$

welche die Entropiebedingung erf6llen,

$$\frac{u(x+a) - u(x)}{a} < \frac{E}{t}.$$

Dann ist  $u = v$  f. 6.

Wir geben zun6chst die grundlegende Beweisidee. Wenn wir die skalaren Erhaltungsgleichungen f6r  $u$  und  $v$  subtrahieren, erhalten wir

$$\iint_{t \geq 0} (u - v)\phi_t + (f(u) - f(v))\phi_x = 0.$$

Wir setzen

$$F(t, x) = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$$

und erhalten dann

$$\iint_{t \geq 0} (u - v)(\phi_t + F\phi_x) = 0. \quad (137)$$

Unser Zugang besteht darin, die sog. **adjungierte Gleichung**

$$\phi_t + F\phi_x = \psi$$

zu betrachten. Nehme zum Beispiel an, wir k6nnten zu jeden  $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  eine L6sung  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$  finden. Dann w6rden wir durch

Einsetzen in (137) erhalten, dass

$$\iint_{t \geq 0} (u - v) \psi dx dt = 0 \quad \text{für alle } \psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$$

Hieraus würde  $u = v$  f.ü. folgen.

Die Schwierigkeit dieses Zugangs ist, dass  $F$  i.a. nicht glatt ist, so dass nicht klar ist, ob wir die adjungierte Gleichung in  $C^1$  lösen können. Um dieses Problem zu umgehen, approximieren wir  $u$  und  $v$  durch glatte Funktionen  $u_m$  und  $v_m$ . Genauer setzen wir

$$u_m = u * \eta_m, \quad v_m = v * \eta_m$$

mit  $\eta_m = \eta(x/m)$  und  $\eta \in C_c^\infty([-1, 1])$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $\int \eta = 1$ . Wir lösen dann die zugehörige lineare Gleichung

$$\phi_t^m + F_m \phi_x^m = \psi \tag{138}$$

mit

$$F_m(t, x) = \frac{f(u_m) - f(v_m)}{u_m - v_m}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_{t \geq 0} (u - v) \psi dx dt &= \iint_{t \geq 0} (u - v) \phi_t^m + \iint_{t \geq 0} (u - v) F_m \phi_x^m \\ &= - \iint_{t \geq 0} (f(u) - f(v)) \phi_x^m + \iint_{t \geq 0} (u - v) F_m \phi_x^m \end{aligned}$$

und folglich

$$\iint_{t \geq 0} (u - v) \psi dx dt = \iint_{t \geq 0} (u - v) (F_m - F) \phi_x^m \tag{139}$$

Unsere Strategie ist zu zeigen, dass

- (1)  $F_m \rightarrow F$  in  $L_{\text{loc}}^1$
- (2) Die Funktionen  $\phi_x^m$  sind glm. beschränkt

Dann können wir nämlich in (139) den Limes  $m \rightarrow \infty$  bilden.

Wir beginnen nun mit den detaillierten Abschätzungen.

**Lemma 3.3.12.** *Die Gleichung (138) besitzt für jedes  $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  eine eindeutige Lösung  $\phi^m$  in  $C^1$ , so dass  $\text{supp } \phi^m \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  kompakt ist.*

**Beweis.** Nehme an, der Träger von  $\psi$  liege im Streifen  $0 < t < T$ . Dann kann (138) mit der Methode der Charakteristiken gelöst werden. Dazu sei  $x(s; x, t)$  Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dx_n(s, t, x)}{ds} = F_m(s, x_m) \quad (140)$$

mit Anfangswerten

$$x_m(t; t, x) = x \quad (141)$$

(Existenz und Eindeutigkeit folgt aus Picard-Lindelöf für  $C^1$ -Daten). Dann ist

$$\frac{d}{ds}\phi^m(s, x_m(s; t, x)) = \phi_t^m(s, x_m) + \phi_x^m(s, x_m)F_m(s, x_m) = \psi(s, x_m).$$

Integriert man über  $s \in [t, T]$  und verwendet, dass  $\phi^m$  zur Zeit  $T$  verschwinden soll, so erhält man die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \phi^m(t, x) &= \phi^m(t, x_m(t; t, x)) = \int_T^t \frac{d}{ds}\phi^m(s, x_m(s; t, x)) \\ &= \int_T^t \psi(s, x_m(s; t, x)) ds. \end{aligned} \quad (142)$$

□

Wir müssen nun die konstruierten Lösung  $\phi^m$  genauer analysieren und gehen dazu in mehreren Schritten vor. Zunächst einmal ist

$$|u_m(t, x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x-y)|\eta_m(y)dy \leq M \int \eta_m(y)dy = M \quad (143)$$

und entsprechend  $|v_m(t, x)| \leq M$ . Folglich

$$|F_m(t, x)| = \left| \int_0^1 f'(\theta u_m + (1-\theta)v_m)d\theta \right| \leq M_1, \quad (144)$$

und da  $x_m$  außerdem differenzierbar von  $F_m$  und den Anfangswerten abhängt, ist  $\phi^m$  offensichtlich in  $C^1$ .

Sei nun  $R$  trapezförmiges Gebiet in  $\mathbb{R}^2$ , das durch die Geraden  $t = 0$  und  $t = T$  sowie Geraden mit den Steigungen  $\pm 1/M_1$  begrenzt wird und den Träger von  $\psi$  einschließt (siehe Abb. 8)

Für  $(t, x)$  außerhalb von  $R$  schneidet die Kurve  $x_m(s; t, x)$  den Träger von  $\psi$  nicht, und aus (142) folgt, dass  $\phi^m(t, x) = 0$  ist. Folglich ist  $\text{supp } \phi^m \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \subset R$  kompakt.

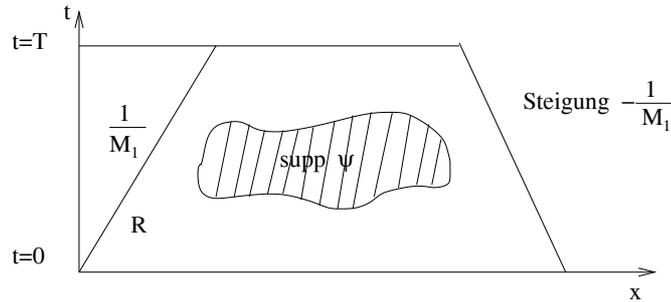


ABBILDUNG 8

**Lemma 3.3.13.**  $F_m \rightarrow F$  in  $L^1_{loc}$

**Beweis.** Nach dem Mittelwertsatz ist

$$\begin{aligned} F(t, x) - F_m(t, x) &= \int_0^1 (f'(\theta u + (1 - \theta)v) - f'(\theta u_m + (1 - \theta)v_m)) d\theta \\ &= \int_0^1 f''(\xi) [\theta(u - u_m) - (1 - \theta)(v - v_m)] d\theta, \end{aligned}$$

wobei  $|\xi| \leq M$ . Dies läßt sich weiter abschätzen zu

$$|F(t, x) - F_m(t, x)| \leq \frac{c}{2} \{|u - u_m| + |v - v_m|\}$$

mit  $c = \sup \{|f''(u)|, |u| \leq M\}$ . Verwende nun, dass die Faltung mit  $\eta_m$  in  $L^1_{loc}$  approximiert.  $\square$

In das nächste Lemma geht die Entropiebedingung ein.

**Lemma 3.3.14.** Für  $t \geq \alpha > 0$  ist

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} \leq K_\alpha \equiv \frac{E}{\alpha} \max_{|u| \leq m} f''(u).$$

**Beweis.** Nach der Entropiebedingung ist  $u(t, x) - Ex/\alpha$  monoton fallend. Da die Faltung die Monotonie respektiert, ist auch die Funktion

$$u_m - \frac{E}{\alpha}(\eta_m * x)$$

monoton fallend. Da  $\eta_m + *x$  linear mit Steigung eins ist, erhalten wir durch Differentiation

$$\frac{\partial u_m}{\partial x} \leq \frac{E}{\alpha} \quad \text{und entsprechend} \quad \frac{\partial v_m}{\partial x} \leq \frac{E}{\alpha}. \quad (145)$$

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_m}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 f'(\theta u_m + (1-\theta)v_m) d\theta \\ &= \int_0^1 f''(\theta u_m + (1-\theta)v_m)(\theta u'_m + (1-\theta)v'_m) d\theta.\end{aligned}$$

Verwenden wir nun, dass  $f'' > 0$  ist und setzen (145) ein, so folgt

$$\frac{\partial F_m}{\partial x} \leq \frac{E}{\alpha} \int_0^1 f''(\theta u_m + (1-\theta)v_m) d\theta$$

und somit die Behauptung.  $\square$

**Lemma 3.3.15.** *Für jedes  $\alpha > 0$  gibt es eine Konstante  $C_\alpha$  (unabhängig von  $m$ ), so dass für alle  $t \geq \alpha$ ,*

$$\left| \frac{\partial \phi^m}{\partial x} \right| \leq C_\alpha.$$

**Beweis.** Durchdifferenzieren von (142) liefert

$$\frac{\partial \phi^m}{\partial x} = \int_T^t \psi' \frac{\partial x_m(s; t, x)}{\partial x}.$$

Wir führen (für festes  $t, x$ ) die Funktion

$$a_m(s) = \frac{\partial x_m(s; t, x)}{\partial x}$$

ein. Es bleibt zu zeigen, dass  $a_m$  glm. beschränkt ist. Dazu müssen wir die Lösung der Differentialgleichung (140), (141) bei Variation der Anfangswerte untersuchen. Differenzieren von (141) bzw. (140) liefert

$$\begin{aligned}a_m(t) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial s} a_m &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial x_m(s; t, x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x_m}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F(s, x_m(s; t, x)) = \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x} = \frac{\partial F_m}{\partial x_m} a_m.\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung, und Gronwall liefert

$$|a_m(s)| \leq \exp \left( \int_t^s \frac{\partial F}{\partial x}(\tau, x_m(\tau; t, x)) d\tau \right) \leq e^{K_\alpha(T-\alpha)},$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 4.3.14 verwendet haben.  $\square$

Wir müssen nun noch die Totalvariation von  $\phi^m$  für kleine Zeiten kontrollieren.

**Lemma 3.3.16.** *Es gibt ein  $\alpha > 0$  und eine Konstante  $C$ , so dass*

$$TV(\phi^m(t, \cdot)) \leq C \quad \text{für alle } t < \alpha.$$

**Beweis.** Wir wählen  $\alpha$  so klein, dass  $\text{supp } \psi \subset (\alpha, T) \times \mathbb{R}$ . Dann ist  $\phi^m$  für  $t < \alpha$  längs der Charakteristiken  $x_m$  konstant (siehe (142)). Da die Charakteristiken auf  $[0, T]$  existieren und sich nicht schneiden, erhalten wir eine Bijektion  $x \rightarrow x_m(\alpha, (t, x)) =: \sigma(x)$ . Folglich läßt sich die Totalvariation von  $\phi^m(t, x)$  direkt durch die Totalvariation von  $\phi^m(\alpha, x)$  abschätzen, denn für  $x_0 < \dots < x_n$  gilt

$$\sum_{k=1}^N |\phi^m(t, x_k) - \phi^m(t, x_{k-1})| = \sum_{k=1}^N |\phi^m(\alpha, \sigma(x_k)) - \phi^m(\alpha, \sigma(x_{k-1}))| \leq C_\alpha.$$

$\square$

**Beweis.** [von Theorem 4.3.11]

Ähnlich wie im Existenzbeweis spalten wir im Integral auf der rechten Seite von (139) einen Streifen  $0 < t < \varepsilon$  ab

$$\begin{aligned} \iint_{t \geq 0} (u - v)(F_m - F)\phi_x^m dx dt &\leq \iint_{t \geq \alpha} |u - v||F_m - F||\phi_x^m| dx dt \\ &\quad + \iint_{0 \leq t \leq \alpha} |u - v||F_m - F||\phi_x^m| dx dt. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun  $|u - v|$  nach oben durch  $2M$  ab. Im ersten Integral wenden wir außerdem Lemma 4.3.15 an, während wir im zweiten Integral  $|F_m - F|$  mit Hilfe von (144) abschätzen. Dies liefert

$$\begin{aligned} \iint_{t \geq 0} (u - v)(F_m - F)\phi_x^m &\leq 2MC_\alpha \iint_{t \geq \alpha} |F_m - F| dx dt \\ &\quad + 2MM_1 \iint_{0 \leq t \leq \alpha} |\phi_x^m| dx dt \quad (146) \end{aligned}$$

Das zweite Integral schätzen wir folgendermaßen ab,

$$\begin{aligned} \int \int_{0 \leq t \leq \alpha} |\phi_x^m| dx dt &\leq \alpha \sup_{0 \leq t \leq \alpha} \int |\phi_x^m(t, x)| dx \\ &\leq \alpha \sup_{0 \leq t \leq \alpha} TV \phi^m(t, \cdot) \leq \alpha C, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 4.3.16 verwendet haben.

Indem wir  $\alpha$  genügend klein wählen, können wir das zweite Integral in (146) beliebig klein machen. Im ersten Integral verwenden wir schließlich, dass  $F_m \rightarrow F$  in  $L^1_{\text{loc}}$  (Lemma 4.3.13).  $\square$

### 3.4. Das Riemann-Problem für $p$ -Systeme.

Wir haben in Beispiel 4.4 bereits das  $p$ -System

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p(v)_x &= 0 \end{aligned}$$

mit  $p = kv^{-\gamma}$  kennengelernt. In diesem Abschnitt betrachten wir dieses System für eine allgemeine Funktion  $p(v)$  mit den Eigenschaften

$$p'(v) < 0, \quad p''(v) > 0.$$

Wir schreiben das  $p$ -System auch in der Form

$$U_t + F(U)_x = 0$$

mit  $U = (v, u)$  und  $F(U) = (-u, p(v))$ . Wir wollen das Cauchyproblem mit Anfangswerten

$$U|_{t=0} = U_0 = \begin{cases} U_\ell = (v_\ell, u_\ell) & \text{falls } x < 0 \\ U_r = (v_r, u_r) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

untersuchen. Ein solches Anfangswertproblem mit stufenförmigen, stückweise konstanten Anfangswerten wird auch **Riemann-Problem** genannt.

Als Vorbereitung bestimmen wir die Geschwindigkeiten der Charakteristiken. Die Matrix  $dF$  berechnet sich zu

$$dF = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

und hat die beiden reellen, nicht entarteten Eigenwerte

$$\lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)} < 0, \quad \lambda_2 = \sqrt{-p'(v)} > 0 \quad (147)$$

Wir betrachten nun zunächst *Schocks*. Die Lax-Bedingungen lassen die folgenden beiden Möglichkeiten zu,

$$\begin{aligned} s < \lambda_1(U_\ell) \ , \quad \lambda_1(U_r) < s < \lambda_2(U_r) \\ \lambda_1(U_\ell) < s < \lambda_2(U_\ell) \ , \quad \lambda_2(U_r) < s \ , \end{aligned}$$

die sich gemäß (147) vereinfachen zu

$$-\sqrt{-p'(v_r)} < s < -\sqrt{-p'(v_\ell)} \quad (148)$$

$$\sqrt{-p'(v_r)} < s < \sqrt{-p'(v_\ell)} \ . \quad (149)$$

Im ersten Fall ist die Schockgeschwindigkeit negativ, dies ist ein sog. **Rückwärtsschock**. Dagegen ist (149) ein **Vorwärtsschock**.

Sei  $U_\ell$  vorgegeben. Wir wollen die Frage untersuchen, für welches  $U_r \equiv U$  das Riemannproblem eine Lösung mit einem Rückwärtsschock besitzt. Die Sprungbedingungen  $s[U] = [F(U)]$  liefern die beiden Gleichungen

$$s(v - v_\ell) = -(u - u_\ell) \quad (150)$$

$$s(u - u_\ell) = p(v) - p(v_\ell) \quad (151)$$

Durch Eliminieren von  $s$  erhält man die Bedingung

$$(u - u_\ell)^2 = -(v - v_\ell)(p(v) - p(v_\ell)) \ .$$

Um (148) erfüllen zu können, muss  $p'(v_\ell) > p'(v)$  und folglich  $v_\ell > v$  sein. Da (150) mit  $s < 0$  erfüllt sein soll, folgt  $u - u_\ell < 0$  und somit

$$u - u_\ell = -\sqrt{-(v - v_\ell)(p(v) - p(v_\ell))} \equiv S_1(v, U_\ell) \ .$$

Die Funktion  $S_1$  ist monoton steigend, da

$$\frac{dS_1}{dv} = \frac{v - v_\ell}{2S_1} \left( p'(v) + \frac{p(v) - p(v_\ell)}{v - v_\ell} \right) > 0 \ .$$

Die zulässigen Werte für  $U$  liegen also auf einer Kurve wie in Abb.9

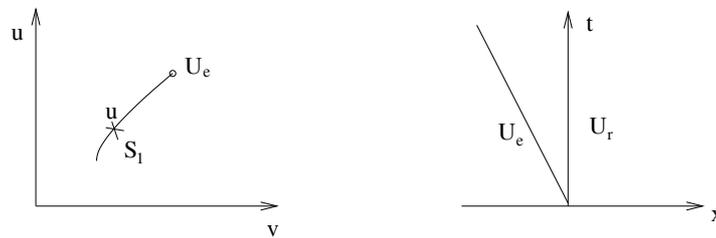


ABBILDUNG 9

Für den Vorwärtsschock ist die Rechnung analog. Man erhält  $v > v_\ell$  und

$$u - u_\ell = -\sqrt{-(v - v_\ell)(p(v) - p(v_\ell))} \equiv S_2(v, U_\ell),$$

siehe Abb.10.

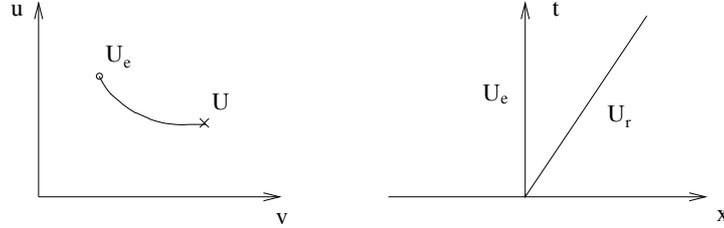


ABBILDUNG 10

Als nächstes betrachten wir Verdünnungswellen. Dazu setzen wir  $\xi = x/t$  und suchen nach Lösungen der Erhaltungsgleichung, die nur von  $\xi$  abhängen, also

$$-\xi U_\xi + F(U)_\xi = 0$$

oder äquivalent

$$(dF - \xi)U_\xi = 0.$$

Wir können annehmen, dass  $U_\xi \neq 0$ , denn ansonsten ist  $U$  konstant. Also muß  $\xi = \lambda_1 < 0$  oder  $\xi = \lambda_2 > 0$  sein. Wir nennen diese beiden Fälle eine **Rückwärts-** bzw. **Vorwärts-Verdünnungswelle**. Für die Rückwärtsverdünnungswelle erhalten wir die Gleichung ( $U_\xi \equiv (v_\xi, u_\xi)$ )

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & -1 \\ p'(v) & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\xi \\ u_\xi \end{pmatrix} = 0.$$

Hieraus folgt  $u_\xi = -\lambda_1 v_\xi$  und somit

$$\frac{du}{dv} = -\lambda_1(v, u) = \sqrt{-p'(v)}$$

Diese Gleichung kann unmittelbar vom Anfangszustand  $U_\ell$  aus integriert werden. Wir erhalten so die Kurve

$$u - u_\ell = \int_{v_\ell}^v \sqrt{-p'(y)} dy \equiv R_1(v, U_\ell),$$

und alle Punkte auf dieser Kurve können mit  $U_\ell$  durch eine Rückwärtsverdünnungswelle verbunden werden. Da  $\lambda_1(v) > \lambda_1(v_\ell)$ , ist  $v > v_\ell$ , außerdem ist

$$\frac{dR_1}{dv} = \sqrt{-p'(v)} > 0,$$

siehe auch Abb.11.

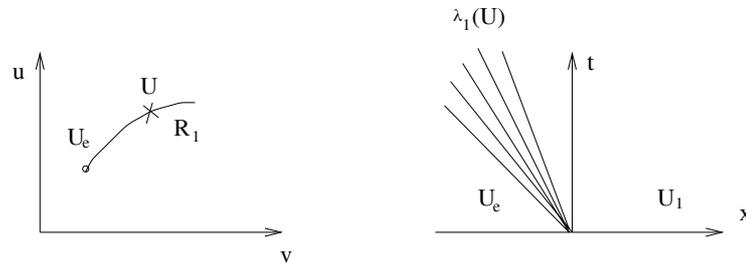


ABBILDUNG 11

Für die Vorwärts-Verdünnungswelle erhält man analog

$$u - u_\ell = - \int_{v_\ell}^v \sqrt{-p'(y)} dy \equiv R_2(v, U_\ell),$$

das qualitative Verhalten ist in Abb.12 dargestellt.

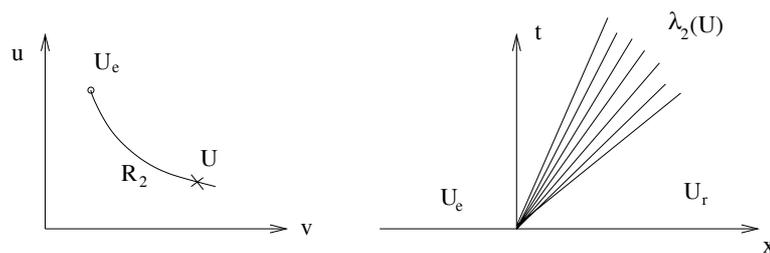
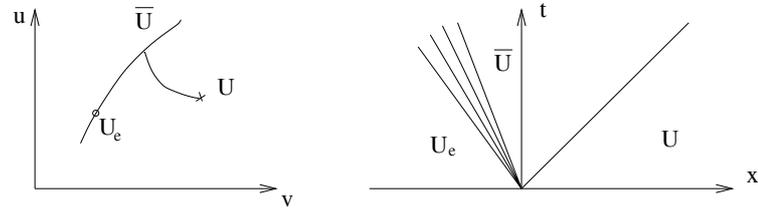


ABBILDUNG 12

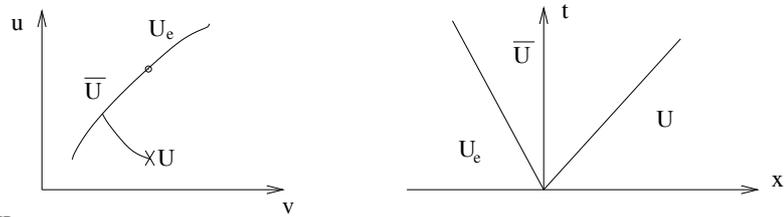
Trägt man die erhaltenen Schock- und Verdünnungswellenlösungen in einem gemeinsamen Diagramm in der  $uv$ -Ebene auf, fügen sich die Kurven  $S_1$  und  $R_1$  sowie  $R_2$  und  $S_2$  tatsächlich jeweils zu einer  $C^1$ -Kurve zusammen. Aus Zeitgründen verzichten wir aber darauf, dies nachzurechnen.

Falls  $U$  auf einer dieser Kurven liegt, können wir das Riemann-Problem durch einen fundamentalen Schock oder eine Verdünnungswelle lösen. Liegt  $U$  dagegen nicht auf einer dieser Kurven, so können wir eine Lösung des Riemann-Problems konstruieren, indem wir zwei fundamentale Lösungen "zusammenfügen". Diese Konstruktion wird am einfachsten durch die Zeichnungen in Abb.13 erklärt: Durch genaue Rechnung kann man mit Hilfe einer Stetigkeitsmethode zeigen, dass diese Konstruktion tatsächlich eine eindeutige Lösung des Riemannproblems liefert.

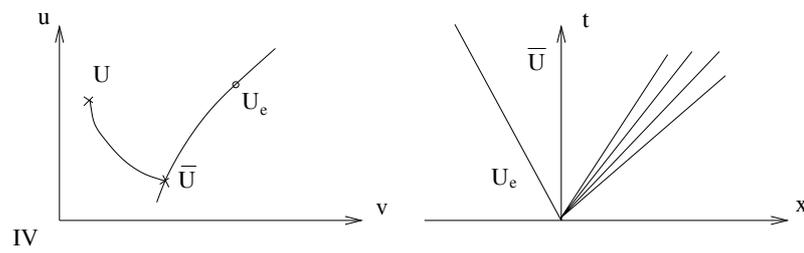
I



II



III



IV

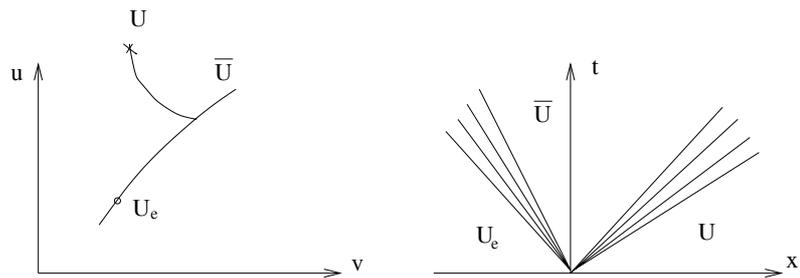


ABBILDUNG 13

## 3.5. Riemann-Koordinaten.

Wir wollen nun kurz eine Methode behandeln, mit der sich die Bildung von Singularitäten bei Systemen von **zwei Gleichungen** untersuchen läßt. Wir betrachten also für  $U = U(u, v)$ ,  $F(u) = (f, g)$  das System

$$U_t + dF(U)U_x = 0 \quad (152)$$

**Definition 3.5.1.** *Das System (152) heißt streng hyperbolisch, falls die Matrix  $dF(U)$  für alle  $U$  zwei verschiedene reelle Eigenwerte  $\lambda(U) < \mu(U)$  besitzt.*

Wir nehmen im folgenden an, dass unser System streng hyperbolisch ist. Da  $dF$  i.a. nicht Hermitesch ist, müssen wir zwischen den Links- und Rechts-Eigenvektoren von  $dF$  unterscheiden; wir bezeichnen sie mit  $\ell_{\mu, \lambda}$  bzw.  $r_{\mu, \lambda}$ , also

$$\begin{aligned} dF r_\lambda &= \mu r_\lambda, & dF r_\mu &= \mu r_\mu \\ \ell_\lambda dF &= \lambda \ell_\lambda, & \ell_\mu dF &= \mu \ell_\mu. \end{aligned}$$

**Definition 3.5.2.** *Funktionen  $w(U)$  und  $z(U)$  heißen die zu  $r_x$  bzw.  $r_\mu$  gehörenden **Riemann-Invarianten**, falls  $\nabla w, \nabla z \neq 0$  und*

$$\nabla w \cdot r_\lambda = 0 = \nabla z \cdot r_\mu.$$

Für ein streng hyperbolisches System lassen sich immer Riemann-Invarianten konstruieren. Dazu betrachten wir die Integralkurven  $\Gamma_\lambda$  und  $\Gamma_\mu$  von  $r_\lambda$  bzw.  $r_\mu$ . Zu (beliebig gewählten)  $\mu_0$  und  $\lambda_0$  wählen wir eine monoton steigende Funktion  $w$  auf  $\Gamma_{\mu_0}$  und setzen  $w$  längs der Kurven  $\Gamma_\lambda$  konstant fort; analog sei  $z$  eine monotone Funktion auf  $\Gamma_{\lambda_0}$  und setzen längs  $\Gamma_\mu$  konstant fort.

Der folgende Satz zeigt, dass man  $(w, z)$  als neue Koordinaten verwenden kann. Diese werden Riemann-Koordinaten genannt.

**Satz 3.5.3.** *Die Abbildung  $(u, v) \rightarrow (w, z)$  hat Höchststrang und ist in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet injektiv.*

**Beweis.** Aus der Definition der Riemann-Invarianten und der Tatsache, dass  $r_\lambda$  und  $r_\mu$  linear unabhängig sind, folgt, dass  $\nabla w$  und  $\nabla z$  linear unabhängig sind. Also hat die Abbildung  $(u, v) \rightarrow (w, z)$  Höchststrang. Für den Beweis der Injektivität muß man ausschließen, dass sich  $\Gamma_\mu$  und  $\Gamma_\lambda$  mehr als einmal schneiden, siehe Abb.14

In diesem Fall wäre  $\Gamma_\mu$  tangential zu einer der Kurven  $\Gamma_{\lambda'}$ , was aber der linearen Unabhängigkeit von  $r_\mu$  und  $r_{\lambda'}$  in  $P$  widerspricht.  $\square$

Wir führen nun einen weiteren wichtigen Begriff ein.

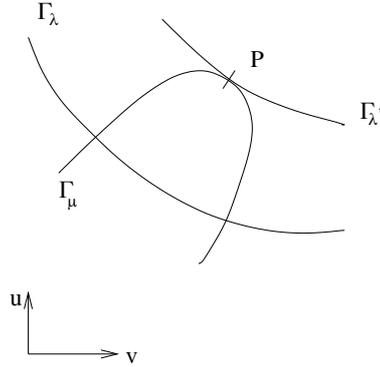


ABBILDUNG 14

**Definition 3.5.4.** Der charakteristische Eigenwert  $\lambda$  (oder  $\mu$ ) ist **echt nichtlinear**, falls  $\nabla\lambda \cdot r_\lambda \neq 0$  (bzw.  $\nabla\mu \cdot r_\mu \neq 0$ ).

In vielen Anwendungen kann diese Bedingung leicht überprüft werden und ist tatsächlich erfüllt. In Riemann-Koordinaten nimmt diese Bedingung eine besonders einfache Form an:

**Lemma 3.5.5.** Der Eigenwert  $\mu$  (oder  $\lambda$ ) ist echt nichtlinear, falls  $\mu_w \neq 0$  ( $\lambda_z \neq 0$ ).

**Beweis.** Sei  $T : (u, v) \rightarrow (w, z)$  die Transformation in Riemann-Koordinaten. Da  $T$  Höchststrang besitzt, ist  $k \equiv \det dT \neq 0$  und

$$\begin{pmatrix} u_w & u_z \\ v_w & v_z \end{pmatrix} = d(T^{-1}) = (dT)^{-1} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} z_v & -w_v \\ -z_u & w_u \end{pmatrix}.$$

Nach Definition der Riemann-Invarianten ist  $\nabla z = (z_u, z_v) \perp r_\mu$  und folglich

$$r_\mu = c(z_v, -z_u)$$

mit  $c \neq 0$ . Damit können wir  $\nabla_\mu \cdot r_\mu$  berechnen,

$$\nabla_\mu \cdot r_\mu = c \nabla_\mu(z_v, -z_u) = c \cdot k \nabla_\mu(u_w, v_w) = ck\mu w.$$

□

Als nächstes wollen wir die Gleichung in Riemann-Koordinaten transformieren. Dazu bemerken wir zunächst, dass  $\ell_\mu$  und  $r_\lambda$  orthogonal sind, da

$$\mu \ell_\mu r_\lambda = \ell_\mu (dF) r_\lambda = \lambda \ell_\mu r_\lambda.$$

Folglich können wir aus der Gleichung für Riemanninvarianten  $\nabla_w \cdot r_\mu = 0$  schließen, dass  $\nabla_w \sim \ell_\mu$  ist. Daraus erhalten wir, dass

$$\nabla w(dF) = \mu \nabla w \tag{153}$$

Analog gilt

$$\nabla z(dF) = \lambda \nabla z.$$

Wir multiplizieren nun die Differentialgleichung  $U_t + dF(U)U_x$  von links mit  $\nabla w$  und wenden (153) an,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_w U_t + \nabla_w dF(U)U_x = \nabla_w U_t + \mu \nabla_w U_x \\ &= w_t + \mu w_x. \end{aligned}$$

Wir erhalten so das Gleichungssystem

$$w_t + \mu(w, z)w_x = 0 \quad (154)$$

$$z_t + \lambda(w, z)z_x = 0 \quad (155)$$

Dieses System ist wesentlich einfacher als (152), weil die erste bzw. zweite Gleichung nur Ableitungen von  $w$  bzw.  $z$  enthält. Die Gleichungen (154) und (155) gehen auf Riemann zurück. Allerdings ist Vorsicht geboten: die Sprungbedingungen und die Lax-Bedingungen bleiben bei der Transformation der Gleichungen  $(u, v) \rightarrow (w, z)$  i.a. *nicht* erhalten. Deswegen kann (154) *nur für klassische Lösungen* verwendet werden. Die Bedeutung von (154) und (155) liegt darin, dass sich damit die Bildung von Schocks und Singularitäten untersuchen lässt. Dies wird durch das folgende Theorem illustriert.

**Theorem 3.5.6.** *Nehme an, dass der charakteristische Eigenwert  $\mu$  echt nichtlinear ist,  $\nabla_\mu \cdot r_\mu > 0$ . Außerdem sollen die Anfangswerte die folgenden Bedingungen erfüllen:*

- (i)  $w(0, x)$  und  $z(0, x)$  sind glatt und beschränkt.
- (ii) Es gibt ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $w_x(0, x) > 0$ .

*Dann wird  $w_x(t, \cdot)$  nach endlicher Zeit singulär.*

**Beweis.** Nehme umgekehrt an, dass die Lösung für alle Zeiten  $C^1$  ist. Dann können wir mit Riemann-Koordinaten arbeiten. Gemäß Lemma 4.5.5 ist  $\mu_w > 0$ , Differenzieren von (154) nach  $x$  liefert außerdem

$$w_{tx} + \mu w_{xx} + \mu_w w_x^2 + \mu_z w_x z_x = 0. \quad (156)$$

Diese Gleichung enthält nur  $w_x$  und dessen Ableitungen; wir setzen  $r = w_x$ . Außerdem führen wir die Richtungsableitungen

$$' \equiv \partial_t + \mu \partial_x \quad \text{und} \quad \cdot \equiv \partial_t + \lambda \partial_x$$

ein. Dann läßt sich (156) in der Form

$$r' + \mu_w r^2 + \mu_z r z_x = 0 \quad (157)$$

schreiben. Die Gleichung (155) liefert dagegen, dass  $\dot{z} = 0$  und

$$z' = z_t + \mu z_x = \dot{z} + (\mu - \lambda)z_x = (\mu - \lambda)z_x.$$

Lösen wir diese nach  $z_x$  auf und setzen in (157) ein, erhalten wir

$$r' + \mu_w r^2 + \frac{\mu z}{\mu - \lambda} z' r = 0$$

Um diese Gleichung zu lösen, transformieren wir zunächst den linearen letzten Term weg. Dazu wählen wir eine Funktion  $a = a(w, z)$  mit

$$a_z = \frac{\mu z}{\mu - \lambda}.$$

Dann ist

$$r' + \mu_w r^2 + a' r = 0,$$

und der Ansatz

$$p = r e^a$$

liefert die Gleichung

$$p' + k p^2 = 0 \quad \text{mit} \quad k = \mu_w e^{-a}.$$

Diese Gleichung kann durch Separation und Integration längs Charakteristiken gelöst werden,

$$p(t, x) = \frac{p(0, x)}{1 - p(0, x)K(t)} \quad \text{mit} \quad K(t) = \int_0^t k(s) ds, \quad (158)$$

wobei im letzten Integral längs des Vektorfeldes  $\partial_t + \mu \partial_x$  integriert wird. Nach Voraussetzung sind  $w$  und  $z$  zur Zeit  $t$  beschränkt. Da  $w$  und  $z$  längs der Integralkurven der Vektorfelder  $\partial_t + \mu \partial_x$  bzw.  $\partial_t + \lambda \partial_x$  konstant sind, sind die Funktionen  $w$  und  $z$  für alle Zeiten beschränkt. Also ist

$$k \geq k_0 \equiv \inf_{w, z} \mu_w e^{-a} > 0$$

und folglich

$$K(t) \nearrow, \quad K(0) = 0, \quad K(t) \geq k_0 t. \quad (159)$$

Nach Voraussetzung gibt es ein  $x$  mit  $r(0, x) > 0$  und somit  $p(0, x) > 0$ . Mit Hilfe von (159) folgt, dass der Nenner von (158) nach endlicher Zeit eine Nullstelle besitzt. Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

*Danksagung:* Den Hörern der Vorlesung danke ich für zahlreiche Anregungen und Korrekturen. Frau Eva Rütz bin ich sehr dankbar für das sorgfältige Tippen des Manuskripts und das Erstellen der Zeichnungen.

## LITERATUR

- [1] F. John, "Partial Differential Equations", vierte Auflage, Springer (1982)
- [2] J. Smoller, "Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations", zweite Auflage, Springer (1994)
- [3] A. Rendall, Skript zur Vorlesung "Nichtlineare Hyperbolische Gleichungen", [www.aei-potsdam.mpg.de/~rendall/vorlesung1.html](http://www.aei-potsdam.mpg.de/~rendall/vorlesung1.html) (1998)
- [4] J. Shatah, M. Struwe, "Geometric Wave Equations", Courant Lecture Notes in Mathematics, AMS (2000)
- [5] E. Stein, "Harmonic Analysis", Princeton University Press (1993)
- [6] M. Taylor, "Partial Differential Equations III", Springer (1997)

NWF I – Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg,  
Germany,  
`Felix.Finster@mathematik.uni-regensburg.de`