Max-Planck-Institut
für Mathematik
in den Naturwissenschaften
Leipzig

Entwicklungen nach Exponentialsummen

(revised version: September 2010)

by

Wolfgang Hackbusch

Technical Report no.: 4 2005

Entwicklungen nach Exponentialsummen

Wolfgang Hackbusch
Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften
Inselstr. 22-26, D-04103 Leipzig, Germany.
wh@mis.mpg.de

Zusammenfassung

Es werden Approximationen verschiedener Funktionen durch Exponentialsummen (und eventuell zusätzliche Polynome) untersucht. Die Approximation ist optimal bezüglich der Maximumnorm gegebenfalls mit einer Gewichtsfunktion. Der Report enthält die erzielten Approximationsfehler. Zu den Koeffizienten der Approximanden gelangt man über `www.mis.mpg.de/scicomp/EXP_SUM/readme`.

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines zur Exponentialsummenapproximation

1.1 Exponentialsummen und Verallgemeinerungen

Der Approximationsansatz mit Exponentialsummen lautet

$$E_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \exp(-\alpha_j x) \qquad (\omega_j, \alpha_j \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

wobei im Allgemeinen an $\alpha_j > 0$ gedacht ist und x auf die nichtnegativen Zahlen beschränkt wird. Die Summanden sind in der Reihenfolge $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ angeordnet. Es gibt $2k$ freie Parameter. Die Menge der Exponentialsummen ist

$$\mathcal{E}_k := \{E_k \text{ aus (1.1) für alle } \omega_j, \alpha_j \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Der besondere Vorteil der Exponentialsummen besteht darin, dass $E_k(\sum_{i=1}^d x_i)$ separabel dargestellt werden kann (sogar mit k Termen unabhängig von d).

Eine Verallgemeinerung ist der Ansatz, der zusätzlich Polynome enthält:

$$EP_{qk} := P_{q,k} + E_{q,k}, \qquad P_{q,k}(x) := \sum_{i=0}^{q} \beta_i x^i, \quad E_{q,k} \text{ wie } E_k \text{ aus (1.1).} \tag{1.3}$$

Die Menge aller EP_{qk} ist

$$\mathcal{EP}_{qk} := \{EP_{qk} \text{ aus (1.3) für alle } \beta_i \in \mathbb{R} \text{ und } E_k \in \mathcal{E}_k\} \tag{1.4}$$

Im Falle $q = -1$ wird $EP_{-1,k}$ mit E_k identifiziert: $\mathcal{EP}_{-1,k} = \mathcal{E}_k$ $(P_{-1,k} = 0)$. Auch hier gilt, dass $EP_{qk}(\sum_{i=1}^d x_i)$ separabel dargestellt werden kann. Die Zahl der freien Parameter ist $q + 1 + 2k$.

1.2 Bestapproximation

Gegeben ein abgeschlossenes Intervall I, eine Funktion $f \in C(I)$ und eine Gewichtsfunktion $\gamma > 0$ lautet die Approximationsaufgabe:

$$\text{Finde } E_k^* \in \mathcal{E}_k, \text{ sodass} \qquad \max_{x \in I}\{\gamma(x)\,|E_k^*(x) - f(x)|\} = \min_{E_k \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in I}\{\gamma(x)\,|E_k(x) - f(x)|\} \tag{1.5}$$

bzw.

$$\text{Finde } EP_{qk}^* \in \mathcal{EP}_{qk}, \text{ sodass} \quad \max_{x \in I}\{\gamma(x)\left|EP_{qk}^*(x) - f(x)\right|\} = \min_{EP_{qk} \in \mathcal{EP}_{qk}} \max_{x \in I}\{\gamma(x)\,|EP_{qk}(x) - f(x)|\}. \tag{1.6}$$

Bei der Berechnung wird von der folgenden *Optimalitätsbedingung* Gebrauch gemacht: (a) Es gibt p Nullstellen $t_1, \ldots, t_p$ des Fehlers $\varepsilon(x) := E_k(x) - f(x)$ bzw. $\varepsilon(x) := EP_{qk}(x) - f(x)$ mit $p = 2k$ im Falle von $\mathcal{E}_k$ und $p = q+1+2k$ im Falle von $\mathcal{EP}_{qk}$. Führt man t_0 und t_{p+1} als Endpunkte des Intervalls $I = [t_0, t_{p+1}]$ ein, so muss (b) der betraglich maximale Fehler $\gamma(x)\,|\varepsilon(x)|$ in den Teilintervallen $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \ldots,$ $[t_{p-1}, t_p]$, $[t_p, t_{p+1}]$ mit $\max_{x \in I}\{\gamma(x)\,|\varepsilon(x)|\}$ übereinstimmen und hinsichtlich des Vorzeichens oszillieren (Äquioszillations- oder Alternantensatz).

Aus Teil (a) folgt, dass E_k (bzw. EP_{qk}) die Funktion f in den Stützstellen t_ν interpoliert. Für die numerische Berechnung verwendet man den Remez-Algorithmus, der nicht die Koeffizienten ω_j, α_j, sondern die (unbekannten) Stützstellen t_ν als zu bestimmende Größen verwendet.

Im Falle von (1.6) hat die optimale Lösung EP_{qk}^* den Polynomanteil $P_{q,k}^*$ und den Exponentialsummenanteil $E_{q,k}^*$.

1.3 Das halboffene Intervall $[A, \infty)$

Wenn $\gamma f \to 0$ für $x \to \infty$ und $\gamma(x) \exp(-\alpha_1 x) \to 0$ für $x \to \infty$, kann die Approximationsaufgabe (1.5) auch für das halboffene Intervall $I = [A, \infty)$ versucht werden. Aufgabe (1.6) ist im Allgemeinen für $I = [A, \infty)$ nicht sinnvoll.

1.4 Wavelet-Anwendungen

Zu den Polynombestandteilen $P_{q,k}^*$ und den Wavelets mit verschwindenden Momenten vergleiche man [3].

2 Approximation der Funktion $1/x$

In diesem Abschnitt ist $\gamma = 1$ die Gewichtsfunktion.

Für die Anwendung auf $1/\xi$ mit $\xi = \|\mathbf{x}\|$ (Euklidische Norm von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$) sei auf die Approximation von $1/\sqrt{x}$ verwiesen.

2.1 Normierung auf $I = [1, R]$

Da $1/x$ bei $x = 0$ nicht approximierbar ist, kann nur ein Intervall $I = [A, B] \subset (0, \infty]$ verwendet werden ($B = \infty$ ist zugelassen). Ist

$$\frac{1}{x} \approx E^*_{k,[A,B]}(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]} x)$$

die optimale Approximierende in $[A, B]$, so führt die Substitution $x = At$ $(1 \leq t \leq B/A)$ auf die Bestapproximation in $I' := [1, B/A]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{At} &\approx E^*_{k,[A,B]}(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]} x) \\ &= \frac{1}{A} E^*_{k,[1,B/A]}(t) \\ &= \frac{1}{A} \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[1,B/A]} \exp(-\alpha_{j,[1,B/A]} t). \end{aligned}$$

Damit reicht es, die Approximation in Intervallen $[1, R]$ $(1 < R \leq \infty)$ zu untersuchen. Für andere Intervalle verwendet man die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \omega_{j,[A,B]} &:= \frac{1}{A} \omega_{j,[1,B/A]}, \\ \alpha_{j,[A,B]} &:= \frac{1}{A} \alpha_{j,[1,B/A]}. \end{aligned}$$

Für die jeweils auftretenden Approximationsfehler gilt

$$\varepsilon_{j,[A,B]} = \frac{1}{A} \varepsilon_{j,[1,B/A]}.$$

2.2 Reine Exponentialsummenapproximation in $[1, R]$

Die Approximationen liegen für $k \in \{1, \ldots, 53\}$ und verschiedene Werte R des Intervallendes vor. Falls R hinreichend groß ist, gilt die Approximation nicht nur für $[1, R]$, sondern schon für $[1, \infty)$. Sei R^*_k der kleinste Wert, für den diese Eigenschaft zutrifft. In den folgenden Tabellen gibt für jedes k einen größten Wert R, der $R \geq R^*_k$ erfüllt. Die anderen R-Werte sind $< R^*_k$. Die für den letzten R-Wert angegebene Approximation gilt damit auch für alle größeren (nicht aufgeführten) R.

Für festes R verhält sich der Approximationsfehler $\varepsilon_k := \max_{x \in [1,R]} \{|E^*_k(x) - 1/x|\}$ in $[1, R]$ wie

$$\varepsilon_k \lesssim \mathcal{O}(\exp(-ck)).$$

Wählt man dagegen $R \geq R^*_k$, erhält man in $[1, \infty)$ das Konvergenzverhalten

$$\varepsilon_k \lesssim \mathcal{O}(\exp(-c\sqrt{k})).$$

Mehr zu den Konstanten c in [2].

Die zu den folgenden Tabellen gehörigen Werte der Koeffizienten ω_j, α_j aus (1.1) findet man im Verzeichnis

`www.mis.mpg.de/scicomp/EXP_SUM/1_x/`

(vgl. Text in `www.mis.mpg.de/scicomp/EXP_SUM/1_x/tabelle`).

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $1 \leq k \leq 7$.

R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
2E00	2.128E-02	2.080E-04	1.834E-06	1.542E-08	1.261E-10	1.012E-12	8.020E-15
3E00	4.358E-02	1.035E-03	2.223E-05	4.556E-07	9.088E-09	1.780E-10	3.444E-12
4E00	5.960E-02	2.191E-03	7.279E-05	2.311E-06	7.139E-08	2.167E-09	6.498E-11
5E00	7.075E-02	3.437E-03	1.500E-04	6.258E-06	2.543E-07	1.016E-08	4.007E-10
6E00	7.825E-02	4.659E-03	2.463E-04	1.246E-05	6.143E-07	2.976E-08	1.424E-09
7E00	8.288E-02	5.811E-03	3.553E-04	2.079E-05	1.185E-06	6.643E-08	3.677E-09
8E00	8.516E-02	6.878E-03	4.718E-04	3.098E-05	1.982E-06	1.246E-07	7.741E-09
9E00	8.556E-02	7.857E-03	5.924E-04	4.273E-05	3.004E-06	2.076E-07	1.417E-08
1E01	8.556E-02	8.752E-03	7.145E-04	5.577E-05	4.243E-06	3.173E-07	2.344E-08
2E01		1.448E-02	1.819E-03	2.169E-04	2.521E-05	2.880E-06	3.252E-07
3E01		1.699E-02	2.627E-03	3.795E-04	5.336E-05	7.379E-06	1.008E-06
4E01		1.784E-02	3.215E-03	5.230E-04	8.266E-05	1.285E-05	1.973E-06
5E01		1.785E-02	3.659E-03	6.469E-04	1.110E-04	1.872E-05	3.121E-06
6E01			4.001E-03	7.541E-04	1.377E-04	2.471E-05	4.382E-06
7E01			4.271E-03	8.474E-04	1.626E-04	3.066E-05	5.711E-06
8E01			4.485E-03	9.293E-04	1.858E-04	3.648E-05	7.077E-06
9E01			4.655E-03	1.002E-03	2.074E-04	4.213E-05	8.458E-06
1E02			4.789E-03	1.066E-03	2.274E-04	4.760E-05	9.841E-06
2E02			5.052E-03	1.456E-03	3.707E-04	9.217E-05	2.261E-05
3E02				1.628E-03	4.554E-04	1.235E-04	3.297E-05
4E02				1.695E-03	5.117E-04	1.467E-04	4.141E-05
5E02				1.700E-03	5.517E-04	1.649E-04	4.842E-05
6E02					5.811E-04	1.795E-04	5.438E-05
7E02					6.031E-04	1.915E-04	5.952E-05
8E02					6.193E-04	2.016E-04	6.401E-05
9E02					6.309E-04	2.102E-04	6.799E-05
1E03					6.385E-04	2.177E-04	7.153E-05
2E03					6.428E-04	2.570E-04	9.365E-05
3E03						2.646E-04	1.047E-04
4E03							1.110E-04
5E03							1.146E-04
6E03							1.162E-04
7E03							1.163E-04
R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $8 \leq k \leq 14$.

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
2E00	6.310E-17						
3E00	6.599E-14	1.255E-15	2.385E-17				
4E00	1.930E-12	5.690E-14	1.668E-15	4.879E-17			
5E00	1.566E-11	6.075E-13	2.344E-14	9.001E-16	3.453E-17		
6E00	6.750E-11	3.177E-12	1.487E-13	6.927E-15	3.215E-16		
7E00	2.017E-10	1.098E-11	5.948E-13	3.206E-14	1.722E-15	9.227E-17	
8E00	4.765E-10	2.912E-11	1.770E-12	1.071E-13	6.453E-15	3.878E-16	
9E00	9.584E-10	6.438E-11	4.300E-12	2.859E-13	1.893E-14	1.250E-15	8.240E-17
1E01	1.716E-09	1.248E-10	9.021E-12	6.492E-13	4.654E-14	3.326E-15	2.371E-16
2E01	3.640E-08	4.045E-09	4.470E-10	4.918E-11	5.389E-12	5.888E-13	6.414E-14
3E01	1.365E-07	1.836E-08	2.456E-09	3.270E-10	4.337E-11	5.735E-12	7.562E-13
4E01	3.003E-07	4.539E-08	6.822E-09	1.021E-09	1.522E-10	2.262E-11	3.352E-12
5E01	5.155E-07	8.456E-08	1.380E-08	2.241E-09	3.625E-10	5.847E-11	9.405E-12
6E01	7.701E-07	1.344E-07	2.333E-08	4.031E-09	6.939E-10	1.191E-10	2.038E-11
7E01	1.054E-06	1.933E-07	3.525E-08	6.398E-09	1.157E-09	2.085E-10	3.749E-11
8E01	1.361E-06	2.598E-07	4.932E-08	9.323E-09	1.756E-09	3.295E-10	6.169E-11
9E01	1.683E-06	3.325E-07	6.532E-08	1.278E-08	2.490E-09	4.836E-10	9.369E-11
1E02	2.016E-06	4.103E-07	8.303E-08	1.673E-08	3.357E-09	6.716E-10	1.340E-10
2E02	5.498E-06	1.327E-06	3.186E-07	7.613E-08	1.812E-08	4.301E-09	1.018E-09
3E02	8.724E-06	2.292E-06	5.986E-07	1.557E-07	4.032E-08	1.041E-08	2.681E-09
4E02	1.157E-05	3.209E-06	8.850E-07	2.430E-07	6.645E-08	1.812E-08	4.926E-09
5E02	1.407E-05	4.061E-06	1.165E-06	3.326E-07	9.463E-08	2.683E-08	7.587E-09
6E02	1.630E-05	4.848E-06	1.434E-06	4.221E-07	1.238E-07	3.618E-08	1.055E-08
7E02	1.829E-05	5.577E-06	1.691E-06	5.101E-07	1.533E-07	4.594E-08	1.372E-08
8E02	2.008E-05	6.252E-06	1.935E-06	5.960E-07	1.829E-07	5.593E-08	1.706E-08
9E02	2.172E-05	6.881E-06	2.167E-06	6.795E-07	2.122E-07	6.605E-08	2.050E-08
1E03	2.321E-05	7.468E-06	2.389E-06	7.605E-07	2.412E-07	7.623E-08	2.403E-08
2E03	3.341E-05	1.180E-05	4.140E-06	1.445E-06	5.025E-07	1.741E-07	6.017E-08
3E03	3.926E-05	1.456E-05	5.360E-06	1.963E-06	7.157E-07	2.601E-07	9.426E-08
4E03	4.316E-05	1.654E-05	6.284E-06	2.375E-06	8.936E-07	3.351E-07	1.253E-07
5E03	4.596E-05	1.804E-05	7.020E-06	2.715E-06	1.046E-06	4.013E-07	1.536E-07
6E03	4.807E-05	1.923E-05	7.626E-06	3.004E-06	1.178E-06	4.604E-07	1.794E-07
7E03	4.969E-05	2.021E-05	8.137E-06	3.254E-06	1.295E-06	5.138E-07	2.032E-07
1E04	5.271E-05	2.232E-05	9.296E-06	3.844E-06	1.582E-06	6.481E-07	2.648E-07
2E04	5.392E-05	2.546E-05	1.133E-05	4.975E-06	2.171E-06	9.429E-07	4.081E-07
3E04		2.611E-05	1.230E-05	5.583E-06	2.514E-06	1.127E-06	5.029E-07
4E04			1.282E-05	5.971E-06	2.748E-06	1.257E-06	5.731E-07
5E04			1.307E-05	6.242E-06	2.920E-06	1.357E-06	6.283E-07
6E04			1.312E-05	6.437E-06	3.053E-06	1.437E-06	6.735E-07
7E04				6.580E-06	3.159E-06	1.503E-06	7.114E-07
8E04				6.683E-06	3.246E-06	1.558E-06	7.440E-07
9E04				6.754E-06	3.318E-06	1.605E-06	7.723E-07
1E05				6.795E-06	3.379E-06	1.646E-06	7.973E-07
2E05				6.807E-06	3.630E-06	1.877E-06	9.491E-07
3E05					3.630E-06	1.966E-06	1.023E-06
4E05						1.984E-06	1.066E-06
5E05							1.092E-06
6E05							1.105E-06
7E05							1.108E-06
R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $15 \leq k \leq 21$.

R	$k = 15$	16	17	18	19	20	21
1E01	1.708E-17	5.136E-18					
2E01	6.972E-15	7.562E-16	8.202E-17				
3E01	9.947E-14	1.306E-14	1.711E-15	2.239E-16	2.938E-17		
4E01	4.956E-13	7.312E-14	1.077E-14	1.584E-15	2.326E-16	3.426E-17	
5E01	1.509E-12	2.417E-13	3.863E-14	6.165E-15	9.826E-16	1.565E-16	
6E01	3.479E-12	5.927E-13	1.008E-13	1.711E-14	2.902E-15	4.914E-16	8.327E-17
7E01	6.723E-12	1.203E-12	2.150E-13	3.834E-14	6.829E-15	1.215E-15	2.160E-16
8E01	1.152E-11	2.147E-12	4.004E-13	7.420E-14	1.376E-14	2.549E-15	4.717E-16
9E01	1.811E-11	3.492E-12	6.723E-13	1.292E-13	2.480E-14	4.754E-15	9.103E-16
1E02	2.667E-11	5.298E-12	1.050E-12	2.079E-13	4.110E-14	8.114E-15	1.600E-15
2E02	2.403E-10	5.663E-11	1.332E-11	3.128E-12	7.333E-13	1.717E-13	4.017E-14
3E02	6.888E-10	1.766E-10	4.519E-11	1.155E-11	2.946E-12	7.507E-13	1.910E-13
4E02	1.336E-09	3.616E-10	9.771E-11	2.636E-11	7.099E-12	1.910E-12	5.132E-13
5E02	2.140E-09	6.025E-10	1.693E-10	4.750E-11	1.331E-11	3.723E-12	1.040E-12
6E02	3.067E-09	8.902E-10	2.579E-10	7.459E-11	2.154E-11	6.213E-12	1.790E-12
7E02	4.091E-09	1.217E-09	3.613E-10	1.071E-10	3.170E-11	9.371E-12	2.767E-12
8E02	5.190E-09	1.576E-09	4.776E-10	1.445E-10	4.367E-11	1.318E-11	3.972E-12
9E02	6.349E-09	1.962E-09	6.052E-10	1.864E-10	5.732E-11	1.760E-11	5.400E-12
1E03	7.555E-09	2.371E-09	7.426E-10	2.322E-10	7.251E-11	2.261E-11	7.044E-12
2E03	2.074E-08	7.134E-09	2.450E-09	8.396E-10	2.874E-10	9.824E-11	3.354E-11
3E03	3.407E-08	1.229E-08	4.425E-09	1.590E-09	5.708E-10	2.046E-10	7.325E-11
4E03	4.673E-08	1.739E-08	6.461E-09	2.396E-09	8.873E-10	3.281E-10	1.212E-10
5E03	5.861E-08	2.232E-08	8.484E-09	3.220E-09	1.220E-09	4.617E-10	1.745E-10
6E03	6.972E-08	2.704E-08	1.046E-08	4.043E-09	1.560E-09	6.011E-10	2.313E-10
7E03	8.014E-08	3.154E-08	1.239E-08	4.858E-09	1.902E-09	7.438E-10	2.905E-10
8E03	8.993E-08	3.584E-08	1.425E-08	5.659E-09	2.244E-09	8.883E-10	3.513E-10
9E03	9.917E-08	3.995E-08	1.606E-08	6.445E-09	2.582E-09	1.033E-09	4.131E-10
1E04	1.079E-07	4.388E-08	1.780E-08	7.213E-09	2.918E-09	1.179E-09	4.755E-10
2E04	1.762E-07	7.587E-08	3.261E-08	1.399E-08	5.993E-09	2.564E-09	1.095E-09
3E04	2.238E-07	9.939E-08	4.404E-08	1.948E-08	8.602E-09	3.793E-09	1.671E-09
4E04	2.604E-07	1.180E-07	5.336E-08	2.409E-08	1.086E-08	4.886E-09	2.196E-09
5E04	2.898E-07	1.334E-07	6.124E-08	2.807E-08	1.284E-08	5.868E-09	2.678E-09
6E04	3.145E-07	1.465E-07	6.807E-08	3.157E-08	1.462E-08	6.761E-09	3.122E-09
7E04	3.356E-07	1.579E-07	7.409E-08	3.471E-08	1.623E-08	7.580E-09	3.535E-09
8E04	3.539E-07	1.679E-07	7.947E-08	3.754E-08	1.770E-08	8.337E-09	3.921E-09
9E04	3.702E-07	1.769E-07	8.433E-08	4.013E-08	1.906E-08	9.041E-09	4.283E-09
1E05	3.847E-07	1.850E-07	8.877E-08	4.251E-08	2.032E-08	9.700E-09	4.624E-09
2E05	4.770E-07	2.389E-07	1.193E-07	5.942E-08	2.955E-08	1.467E-08	7.274E-09
3E05	5.262E-07	2.694E-07	1.375E-07	6.997E-08	3.555E-08	1.803E-08	9.131E-09
4E05	5.577E-07	2.899E-07	1.501E-07	7.755E-08	3.997E-08	2.057E-08	1.057E-08
5E05	5.797E-07	3.048E-07	1.597E-07	8.339E-08	4.346E-08	2.260E-08	1.174E-08
6E05	5.959E-07	3.164E-07	1.672E-07	8.810E-08	4.631E-08	2.430E-08	1.273E-08
7E05	6.079E-07	3.256E-07	1.734E-07	9.202E-08	4.872E-08	2.574E-08	1.358E-08
8E05	6.169E-07	3.331E-07	1.785E-07	9.534E-08	5.079E-08	2.700E-08	1.433E-08
9E05	6.235E-07	3.393E-07	1.829E-07	9.822E-08	5.261E-08	2.812E-08	1.500E-08
1E06	6.280E-07	3.445E-07	1.867E-07	1.007E-07	5.421E-08	2.911E-08	1.560E-08
2E06	6.311E-07	3.658E-07	2.076E-07	1.157E-07	6.415E-08	3.548E-08	1.958E-08
3E06		3.659E-07	2.148E-07	1.227E-07	6.923E-08	3.893E-08	2.184E-08
4E06			2.155E-07	1.265E-07	7.240E-08	4.118E-08	2.336E-08
5E06				1.284E-07	7.454E-08	4.279E-08	2.448E-08
6E06				1.289E-07	7.603E-08	4.401E-08	2.535E-08

7E06					7.706E-08	4.495E-08	2.605E-08
8E06					7.773E-08	4.571E-08	2.662E-08
9E06					7.806E-08	4.631E-08	2.711E-08
1E07					7.811E-08	4.679E-08	2.752E-08
2E07						4.794E-08	2.955E-08
3E07							2.976E-08
R	$k = 15$	16	17	18	19	20	21

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $22 \leq k \leq 28$.

R	$k = 22$	23	24	25	26	27	28
8E01	8.733E-17						
9E01	1.742E-16						
1E02	3.153E-16	6.218E-17	2.010E-17				
2E02	9.385E-15	2.191E-15	5.111E-16	1.192E-16			
3E02	4.857E-14	1.234E-14	3.131E-15	7.939E-16	2.012E-16		
4E02	1.377E-13	3.693E-14	9.895E-15	2.649E-15	7.087E-16	1.896E-16	
5E02	2.905E-13	8.101E-14	2.278E-14	6.284E-15	1.749E-15	4.863E-16	1.353E-16
6E02	5.151E-13	1.481E-13	4.254E-14	1.221E-14	3.501E-15	1.003E-15	2.876E-16
7E02	8.162E-13	2.405E-13	7.080E-14	2.083E-14	6.122E-15	1.798E-15	5.280E-16
8E02	1.196E-12	3.597E-13	1.081E-13	3.246E-14	9.739E-15	2.920E-15	8.751E-16
9E02	1.655E-12	5.065E-13	1.549E-13	4.734E-14	1.446E-14	4.412E-15	1.346E-15
1E03	2.192E-12	6.813E-13	2.116E-13	6.566E-14	2.036E-14	6.309E-15	1.954E-15
2E03	1.144E-11	3.898E-12	1.327E-12	4.514E-13	1.534E-13	5.210E-14	1.769E-14
3E03	2.620E-11	9.359E-12	3.341E-12	1.192E-12	4.246E-13	1.512E-13	5.382E-14
4E03	4.472E-11	1.648E-11	6.071E-12	2.234E-12	8.214E-13	3.018E-13	1.108E-13
5E03	6.588E-11	2.485E-11	9.364E-12	3.526E-12	1.327E-12	4.987E-13	1.874E-13
6E03	8.892E-11	3.415E-11	1.310E-11	5.023E-12	1.924E-12	7.367E-13	2.818E-13
7E03	1.133E-10	4.417E-11	1.720E-11	6.692E-12	2.602E-12	1.011E-12	3.924E-13
8E03	1.388E-10	5.475E-11	2.159E-11	8.504E-12	3.347E-12	1.317E-12	5.175E-13
9E03	1.649E-10	6.578E-11	2.621E-11	1.044E-11	4.152E-12	1.651E-12	6.559E-13
1E04	1.916E-10	7.715E-11	3.103E-11	1.247E-11	5.009E-12	2.010E-12	8.061E-13
2E04	4.674E-10	1.993E-10	8.488E-11	3.612E-11	1.536E-11	6.528E-12	2.772E-12
3E04	7.350E-10	3.230E-10	1.418E-10	6.222E-11	2.727E-11	1.195E-11	5.229E-12
4E04	9.860E-10	4.422E-10	1.981E-10	8.870E-11	3.968E-11	1.774E-11	7.923E-12
5E04	1.221E-09	5.557E-10	2.528E-10	1.149E-10	5.218E-11	2.368E-11	1.074E-11
6E04	1.440E-09	6.636E-10	3.055E-10	1.405E-10	6.458E-11	2.966E-11	1.361E-11
7E04	1.647E-09	7.663E-10	3.562E-10	1.655E-10	7.679E-11	3.561E-11	1.651E-11
8E04	1.842E-09	8.641E-10	4.051E-10	1.897E-10	8.879E-11	4.152E-11	1.940E-11
9E04	2.026E-09	9.576E-10	4.521E-10	2.133E-10	1.005E-10	4.735E-11	2.229E-11
1E05	2.201E-09	1.047E-09	4.975E-10	2.362E-10	1.120E-10	5.310E-11	2.515E-11
2E05	3.602E-09	1.782E-09	8.804E-10	4.347E-10	2.144E-10	1.057E-10	5.206E-11
3E05	4.619E-09	2.334E-09	1.178E-09	5.939E-10	2.992E-10	1.506E-10	7.578E-11
4E05	5.422E-09	2.779E-09	1.423E-09	7.278E-10	3.719E-10	1.899E-10	9.692E-11
5E05	6.089E-09	3.154E-09	1.632E-09	8.439E-10	4.359E-10	2.250E-10	1.160E-10
6E05	6.658E-09	3.479E-09	1.816E-09	9.467E-10	4.932E-10	2.567E-10	1.335E-10
7E05	7.155E-09	3.765E-09	1.979E-09	1.039E-09	5.451E-10	2.858E-10	1.497E-10
8E05	7.596E-09	4.021E-09	2.126E-09	1.123E-09	5.928E-10	3.126E-10	1.647E-10
9E05	7.992E-09	4.253E-09	2.260E-09	1.200E-09	6.368E-10	3.375E-10	1.788E-10
1E06	8.351E-09	4.464E-09	2.384E-09	1.272E-09	6.777E-10	3.609E-10	1.920E-10
2E06	1.079E-08	5.936E-09	3.262E-09	1.791E-09	9.820E-10	5.381E-10	2.946E-10
3E06	1.223E-08	6.834E-09	3.815E-09	2.127E-09	1.185E-09	6.595E-10	3.667E-10

4E06	1.322E-08	7.471E-09	4.216E-09	2.376E-09	1.338E-09	7.525E-10	4.229E-10
5E06	1.397E-08	7.960E-09	4.528E-09	2.573E-09	1.460E-09	8.280E-10	4.691E-10
6E06	1.457E-08	8.353E-09	4.783E-09	2.735E-09	1.562E-09	8.916E-10	5.084E-10
7E06	1.505E-08	8.679E-09	4.997E-09	2.873E-09	1.650E-09	9.465E-10	5.425E-10
8E06	1.546E-08	8.956E-09	5.180E-09	2.992E-09	1.726E-09	9.947E-10	5.728E-10
9E06	1.580E-08	9.194E-09	5.340E-09	3.096E-09	1.793E-09	1.038E-09	5.998E-10
1E07	1.611E-08	9.404E-09	5.481E-09	3.190E-09	1.854E-09	1.076E-09	6.244E-10
2E07	1.780E-08	1.065E-08	6.349E-09	3.779E-09	2.246E-09	1.333E-09	7.905E-10
3E07	1.848E-08	1.124E-08	6.791E-09	4.094E-09	2.464E-09	1.480E-09	8.887E-10
4E07	1.868E-08	1.157E-08	7.067E-09	4.298E-09	2.609E-09	1.581E-09	9.571E-10
5E07		1.176E-08	7.254E-09	4.444E-09	2.715E-09	1.656E-09	1.009E-09
6E07		1.184E-08	7.385E-09	4.553E-09	2.797E-09	1.715E-09	1.050E-09
7E07		1.185E-08	7.478E-09	4.638E-09	2.863E-09	1.763E-09	1.084E-09
8E07			7.540E-09	4.705E-09	2.916E-09	1.803E-09	1.212E-09
9E07			7.575E-09	4.759E-09	2.961E-09	1.837E-09	1.138E-09
1E08			7.583E-09	4.802E-09	2.999E-09	1.866E-09	1.159E-09
2E08				4.898E-09	3.179E-09	2.028E-09	1.284E-09
3E08					3.190E-09	2.086E-09	1.341E-09
4E08						2.094E-09	1.371E-09
5E08							1.384E-09
6E08							1.385E-09
R	$k = 22$	23	24	25	26	27	28

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $29 \leq k \leq 35$.

R	$k = 29$	30	31	32	33	34	35
7E02	1.734E-16						
8E02	2.623E-16						
9E02	4.102E-16	1.251E-16					
1E03	6.048E-16	1.872E-16	6.218E-17				
2E03	5.999E-15	2.034E-15	6.893E-16	2.336E-16	7.931E-17		
3E03	1.914E-14	6.805E-15	2.418E-15	8.588E-16	3.050E-16	1.083E-16	
4E03	4.067E-14	1.492E-14	5.468E-15	2.003E-15	7.338E-16	2.687E-16	
5E03	7.036E-14	2.641E-14	9.905E-15	3.713E-15	1.392E-15	5.213E-16	1.954E-16
6E03	1.077E-13	4.117E-14	1.572E-14	6.002E-15	2.290E-15	8.735E-16	3.332E-16
7E03	1.522E-13	5.904E-14	2.288E-14	8.864E-15	3.432E-15	1.328E-15	5.141E-16
8E03	2.033E-13	7.983E-14	3.132E-14	1.229E-14	4.817E-15	1.887E-15	7.394E-16
9E03	2.604E-13	1.033E-13	4.099E-14	1.625E-14	6.439E-15	2.550E-15	1.010E-15
1E04	3.231E-13	1.294E-13	5.181E-14	2.073E-14	8.292E-15	3.315E-15	1.325E-15
2E04	1.176E-12	4.990E-13	2.115E-13	8.963E-14	3.796E-14	1.607E-14	6.800E-15
3E04	2.288E-12	1.000E-12	4.370E-13	1.909E-13	8.333E-14	3.636E-14	1.586E-14
4E04	3.537E-12	1.578E-12	7.037E-13	3.137E-13	1.397E-13	6.222E-14	2.769E-14
5E04	4.866E-12	2.204E-12	9.978E-13	4.515E-13	2.042E-13	9.230E-14	4.170E-14
6E04	6.242E-12	2.861E-12	1.311E-12	6.002E-13	2.747E-13	1.257E-13	5.746E-14
7E04	7.645E-12	3.539E-12	1.637E-12	7.570E-13	3.499E-13	1.616E-13	7.463E-14
8E04	9.062E-12	4.229E-12	1.973E-12	9.199E-13	4.287E-13	1.997E-13	9.298E-14
9E04	1.048E-11	4.929E-12	2.316E-12	1.087E-12	5.104E-13	2.395E-13	1.123E-13
1E05	1.191E-11	5.633E-12	2.663E-12	1.259E-12	5.945E-13	2.807E-13	1.325E-13
2E05	2.562E-11	1.261E-11	6.198E-12	3.046E-12	1.496E-12	7.344E-13	3.604E-13
3E05	3.809E-11	1.914E-11	9.611E-12	4.824E-12	2.420E-12	1.213E-12	6.080E-13
4E05	4.942E-11	2.519E-11	1.283E-11	6.531E-12	3.323E-12	1.690E-12	8.592E-13
5E05	5.981E-11	3.081E-11	1.440E-11	8.160E-12	4.197E-12	2.157E-12	1.108E-12

R	$k=29$	30	31	32	33	34	35
6E05	6.941E-11	3.606E-11	1.872E-11	9.714E-12	5.038E-12	2.612E-12	1.353E-12
7E05	7.836E-11	4.099E-11	2.143E-11	1.120E-11	5.849E-12	3.053E-12	1.593E-12
8E05	8.674E-11	4.565E-11	2.401E-11	1.262E-11	6.631E-12	3.482E-12	1.828E-12
9E05	9.464E-11	5.006E-11	2.647E-11	1.398E-11	7.385E-12	3.898E-12	2.057E-12
1E06	1.021E-10	5.426E-11	2.882E-11	1.530E-11	8.114E-12	4.303E-12	2.281E-12
2E06	1.612E-10	8.812E-11	4.815E-11	2.630E-11	1.435E-11	7.830E-12	4.270E-12
3E06	2.038E-10	1.132E-10	6.281E-11	3.484E-11	1.931E-11	1.070E-11	5.926E-12
4E06	2.375E-10	1.333E-10	7.477E-11	4.191E-11	2.348E-11	1.315E-11	7.359E-12
5E06	2.656E-10	1.503E-10	8.495E-11	4.800E-11	2.710E-11	1.530E-11	8.631E-12
6E06	2.897E-10	1.649E-10	9.383E-11	5.335E-11	3.032E-11	1.722E-11	9.778E-12
7E06	3.107E-10	1.779E-10	1.017E-10	5.815E-11	3.322E-11	1.897E-11	1.083E-11
8E06	3.295E-10	1.895E-10	1.089E-10	6.250E-11	3.587E-11	2.057E-11	1.179E-11
9E06	3.465E-10	2.000E-10	1.153E-10	6.649E-11	3.831E-11	2.206E-11	1.269E-11
1E07	3.619E-10	2.096E-10	1.213E-10	7.018E-11	4.057E-11	2.344E-11	1.354E-11
2E07	4.683E-10	2.772E-10	1.640E-10	9.694E-11	5.727E-11	3.382E-11	1.996E-11
3E07	5.329E-10	3.193E-10	1.911E-10	1.144E-10	6.837E-11	4.086E-11	2.440E-11
4E07	5.787E-10	3.496E-10	2.110E-10	1.273E-10	7.674E-11	4.624E-11	2.784E-11
5E07	6.140E-10	3.733E-10	2.267E-10	1.376E-10	8.347E-11	5.060E-11	3.066E-11
6E07	6.424E-10	3.925E-10	2.396E-10	1.462E-10	8.909E-11	5.428E-11	3.305E-11
7E07	6.660E-10	4.086E-10	2.505E-10	1.534E-10	9.392E-11	5.745E-11	3.513E-11
8E07	6.861E-10	4.225E-10	2.599E-10	1.598E-10	9.814E-11	6.025E-11	3.697E-11
9E07	7.035E-10	4.346E-10	2.682E-10	1.654E-10	1.019E-10	6.274E-11	3.861E-11
1E08	7.188E-10	4.452E-10	2.755E-10	1.704E-10	1.053E-10	6.499E-11	4.011E-11
2E08	8.110E-10	5.114E-10	3.221E-10	2.027E-10	1.274E-10	8.005E-11	5.026E-11
3E08	8.566E-10	5.457E-10	3.472E-10	2.206E-10	1.401E-10	8.884E-11	5.631E-11
4E08	8.840E-10	5.675E-10	3.635E-10	2.326E-10	1.487E-10	9.493E-11	6.057E-11
5E08	9.019E-10	5.826E-10	3.753E-10	2.414E-10	1.551E-10	9.953E-11	6.383E-11
6E08	9.135E-10	5.937E-10	3.842E-10	2.482E-10	1.601E-10	1.032E-10	6.644E-11
7E08	9.203E-10	6.020E-10	3.912E-10	2.536E-10	1.642E-10	1.062E-10	6.860E-11
8E08	9.227E-10	6.083E-10	3.969E-10	2.581E-10	1.676E-10	1.087E-10	7.044E-11
9E08	9.227E-10	6.130E-10	4.015E-10	2.619E-10	1.705E-10	1.109E-10	7.203E-11
1E09		6.162E-10	4.053E-10	2.651E-10	1.730E-10	1.128E-10	7.343E-11
2E09		6.188E-10	4.177E-10	2.814E-10	1.870E-10	1.238E-10	8.181E-11
3E09				2.837E-10	1.925E-10	1.289E-10	8.593E-11
4E09					1.938E-10	1.316E-10	8.842E-11
5E09						1.329E-10	9.004E-11
6E09						1.331E-10	9.109E-11
7E09							9.171E-11
8E09							9.194E-11
9E09							9.194E-11

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $36 \le k \le 42$.

R	$k=36$	37	38	39	40	41	42
1E08	2.474E-11						
2E08	3.153E-11						
3E08	3.567E-11						
4E08	3.862E-11						
5E08	4.090E-11						
6E08	4.275E-11						
7E08	4.429E-11						
8E08	4.561E-11						
9E08	4.676E-11						
1E09	4.777E-11	3.105E-11	2.018E-11	1.310E-11	8.501E-12	5.515E-12	3.576E-12
2E09	5.400E-11	3.561E-11	2.346E-11	1.545E-11	1.017E-11	6.688E-12	4.397E-12
3E09	5.719E-11	3.802E-11	2.526E-11	1.676E-11	1.112E-11	7.372E-12	4.884E-12
4E09	5.921E-11	3.959E-11	2.645E-11	1.765E-11	1.177E-11	7.846E-12	5.227E-12
5E09	6.061E-11	4.071E-11	2.731E-11	1.830E-11	1.226E-11	8.205E-12	5.488E-12
6E09	6.163E-11	4.156E-11	2.798E-11	1.882E-11	1.264E-11	8.491E-12	5.698E-12
7E09	6.239E-11	4.222E-11	2.851E-11	1.923E-11	1.296E-11	8.726E-12	5.873E-12
8E09	6.296E-11	4.275E-11	2.894E-11	1.957E-11	1.322E-11	8.925E-12	6.021E-12
9E09	6.337E-11	4.318E-11	2.931E-11	1.986E-11	1.345E-11	9.096E-12	6.149E-12
1E10	6.365E-11	4.353E-11	2.962E-11	2.011E-11	1.364E-11	9.246E-12	6.262E-12
2E10	6.382E-11	4.452E-11	3.110E-11	2.147E-11	1.476E-11	1.013E-11	6.943E-12
3E10			3.121E-11	2.194E-11	1.525E-11	1.055E-11	7.284E-12
4E10				2.197E-11	1.548E-11	1.079E-11	7.494E-12
5E10					1.554E-11	1.094E-11	7.635E-12
6E10						1.102E-11	7.733E-12
7E10						1.104E-11	7.801E-12
8E10							7.845E-12
9E10							7.866E-12
1E11							7.869E-12
R	$k=36$	37	38	39	40	41	42

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $43 \le k \le 49$

R	$k=43$	44	45	46	47	48	49
1E11	5.591E-12	3.938E-12	2.766E-12	1.940E-12	1.360E-12	9.524E-13	6.667E-13
2E11	5.633E-12	4.047E-12	2.902E-12	2.063E-12	1.462E-12	1.035E-12	7.317E-13
3E11			2.919E-12	2.107E-12	1.507E-12	1.074E-12	7.639E-13
4E11				2.113E-12	1.529E-12	1.096E-12	7.837E-13
5E11					1.534E-12	1.110E-12	7.969E-13
6E11						1.117E-12	8.060E-13
7E11						1.118E-12	8.121E-13
8E11							8.158E-13
9E11							8.172E-13
1E12							8.172E-13
R	$k=43$	44	45	46	47	48	49

Tabelle zur Approximation von $1/x$ für $50 \leq k \leq 55$

R	$k = 50$	51	52	53	54	55	56
2E08	4.429E-14						
3E08	5.718E-14						
4E08	6.780E-14						
5E08	7.692E-14						
7E08	9.218E-14						
1E09	1.103E-13						
2E09	1.515E-13						
3E09	1.790E-13						
4E09	1.998E-13						
5E09	2.167E-13						
6E09	2.309E-13						
7E09	2.432E-13						
1E10	2.724E-13						
2E10	3.314E-13						
3E10	3.911E-13						
4E10	3.911E-13						
5E10	4.100E-13						
7E10	4.380E-13						
1E11	4.664E-13	3.262E-13	2.280E-13	1.594E-13	1.113E-13	7.776E-14	5.429E-14
2E11	5.171E-13	3.652E-13	2.578E-13	1.819E-13	1.283E-13	9.051E-14	6.380E-14
3E11	5.430E-13	3.857E-13	2.738E-13	1.943E-13	1.378E-13	9.772E-14	6.927E-14
4E11	5.594E-13	3.989E-13	2.843E-13	2.025E-13	1.442E-13	1.027E-13	7.304E-14
5E11	5.708E-13	4.084E-13	2.919E-13	2.086E-13	1.490E-13	1.063E-13	7.588E-14
6E11	5.792E-13	4.155E-13	2.978E-13	2.133E-13	1.527E-13	1.092E-13	7.814E-14
7E11	5.855E-13	4.210E-13	3.024E-13	2.170E-13	1.557E-13	1.116E-13	8.000E-14
8E11	5.903E-13	4.255E-13	3.062E-13	2.202E-13	1.582E-13	1.136E-13	8.157E-14
9E11	5.940E-13	4.291E-13	3.094E-13	2.228E-13	1.603E-13	1.153E-13	8.292E-14
1E12	5.966E-13	4.321E-13	3.120E-13	2.251E-13	1.622E-13	1.168E-13	8.410E-14
2E12	5.992E-13	4.407E-13	3.245E-13	2.371E-13	1.726E-13	1.254E-13	9.110E-14
3E12			3.251E-13	2.405E-13	1.768E-13	1.294E-13	9.448E-14
4E12				2.405E-13	1.784E-13	1.315E-13	9.648E-14
5E12					1.784E-13	1.325E-13	9.775E-14
6E12						1.327E-13	9.853E-14
7E12							9.892E-14
8E12							9.897E-14
R	$k = 50$	51	52	53	54	55	56

2.3 Gemischte Exponentialsummenapproximation in $[1, R]$

Wegen der Wavelet-Anwendungen ist die Hinzunahme eines polynomialen Anteils empfehlenswert (vgl. [3]). Die Approximationsfehler lauten für die verschiedenen Polynomgrade wie folgt.

2.3.1 Polynomgrad $q = 0$

Approximation durch $\alpha_0 + E_k(x)$ liefert die folgenden Fehler:

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
2	2.500E-01	2.427E-03	2.139E-05	1.798E-07	1.470E-09	1.180E-11	9.349E-14	7.341E-16
3		7.751E-03	1.661E-04	3.402E-06	6.783E-08	1.329E-09	2.570E-11	4.923E-13
4		1.322E-02	4.374E-04	1.387E-05	4.282E-07	1.299E-08	3.895E-10	1.157E-11
5		1.812E-02	7.864E-04	3.276E-05	1.330E-06	5.310E-08	2.094E-09	8.181E-11
7		2.595E-02	1.575E-03	9.194E-05	5.236E-06	2.932E-07	1.622E-08	8.896E-10
10	4.500E-01	3.388E-02	2.746E-03	2.137E-04	1.623E-05	1.213E-06	8.955E-08	6.554E-09
100	4.950E-01	5.613E-02	1.128E-02	2.471E-03	5.237E-04	1.093E-04	2.255E-05	4.615E-06

2.3.2 Polynomgrad $q = 1$

Bei $q = 1$ liegen zwei freie Parameter vor. Die folgenden Daten zeigen, dass stattdessen die zwei Parameter, die beim Übergang von k zu $k + 1$ hinzukommen, effizienter sind.

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
2	4.289E-02	3.121E-04	2.446E-06	1.928E-08	1.513E-10	1.181E-12	**	
5	1.528E-01	5.197E-03	2.006E-04	7.838E-06	3.056E-07	1.186E-08	4.582E-10	1.762E-11
10	2.338E-01	1.347E-02	9.627E-04	7.014E-05	5.111E-06	3.712E-07	2.685E-08	1.934E-09
100	4.050E-01	4.087E-02	7.095E-03	1.397E-03	2.809E-04	5.664E-05	1.141E-05	2.294E-06

3 Approximation der Funktion $1/\sqrt{x}$

Auch hier ist $\gamma = 1$ die Gewichtsfunktion.

Eine spezielle Anwendung findet diese Funktion bei $1/\xi$ mit $\xi = \|\mathbf{x}\|$, da hier $1/\sqrt{t}$ mit $t := \sum_{i=1}^{d} x_i^2$ auszuwerten ist.

3.1 Normierung auf $I = [1, R]$

Sei wieder $\frac{1}{\sqrt{x}} \approx E^*_{k,[A,B]}(x) = \sum_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]} x)$ die Bestapproximation auf $[A, B] \subset (0, \infty]$. Die Substitution $x = At$ zeigt die Transformationsregeln

$$\omega_{j,[A,B]} = \frac{1}{\sqrt{A}} \omega_{j,[1,B/A]}, \qquad \alpha_{j,[A,B]} = \frac{1}{A} \alpha_{j,[1,B/A]}, \qquad \varepsilon_{j,[A,B]} = \frac{1}{\sqrt{A}} \varepsilon_{j,[1,B/A]}.$$

Anstelle von B/A wird der Parameter $R > 1$ verwendet.

3.2 Reine Exponentialsummenapproximation in $[1, R]$

Die Approximationen liegen für $k \in \{1, \ldots, 51\}$ und verschiedene Werte R des Intervallendes vor. Wie bei $1/x$ gibt es ein R^*_k, sodass für alle $R \in [R^*_k, \infty]$ die gleiche Approximierende in $[1, \infty]$ vorliegt. Die zugehörigen Werte der Koeffizienten ω_j, α_j aus (1.1) findet man im Verzeichnis

`www.mis.mpg.de/scicomp/EXP_SUM/1_sqrtx/`

(vgl. Text in `www.mis.mpg.de/scicomp/EXP_SUM/1_sqrtx/tabelle`).

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $1 \le k \le 7$

R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
2E00	1.260E-02	9.287E-05	6.839E-07	5.035E-09	3.707E-11	2.729E-13	–
3E00	2.853E-02	5.132E-04	9.225E-06	1.658E-07	2.980E-09	5.356E-11	9.627E-13
4E00	4.214E-02	1.174E-03	3.267E-05	9.100E-07	2.535E-08	7.063E-10	1.968E-11
5E00	5.354E-02	1.957E-03	7.162E-05	2.624E-06	9.618E-08	3.526E-09	1.293E-10
7E00	7.147E-02	3.643E-03	1.867E-04	9.598E-06	4.937E-07	2.540E-08	1.307E-09
1E01	9.057E-02	6.096E-03	4.165E-04	2.856E-05	1.960E-06	1.346E-07	9.251E-09
2E01	1.238E-01	1.247E-02	1.303E-03	1.364E-04	1.430E-05	1.501E-06	1.576E-07
3E01	1.369E-01	1.682E-02	2.128E-03	2.694E-04	3.418E-05	4.341E-06	5.516E-07
4E01	1.399E-01	2.002E-02	2.847E-03	4.048E-04	5.772E-05	8.238E-06	1.176E-06
5E01	–	2.251E-02	3.472E-03	5.358E-04	8.288E-05	1.284E-05	1.989E-06
7E01	–	2.624E-02	4.508E-03	7.775E-04	1.344E-04	2.326E-05	4.027E-06
1E02	–	3.004E-02	5.696E-03	1.091E-03	2.092E-04	4.018E-05	7.722E-06
2E02	–	3.659E-02	8.140E-03	1.851E-03	4.208E-04	9.580E-05	2.183E-05
3E02	–	3.949E-02	9.574E-03	2.366E-03	5.854E-04	1.449E-04	3.594E-05
4E02	–	4.071E-02	1.057E-02	2.751E-03	7.190E-04	1.879E-04	4.918E-05
5E02	–	4.087E-02	1.131E-02	3.057E-03	8.311E-04	2.259E-04	6.147E-05
7E02	–	–	1.239E-02	3.523E-03	1.012E-03	2.907E-04	8.357E-05
1E03	–	–	1.344E-02	4.016E-03	1.217E-03	3.687E-04	1.118E-04
2E03	–	–	1.508E-02	4.938E-03	1.635E-03	5.435E-04	1.806E-04
3E03	–	–	1.555E-02	5.440E-03	1.882E-03	6.561E-04	2.286E-04
4E03	–	–	1.556E-02	5.772E-03	2.056E-03	7.390E-04	2.657E-04
5E03	–	–	–	6.013E-03	2.188E-03	8.042E-04	2.960E-04
7E03	–	–	–	6.342E-03	2.381E-03	9.030E-04	3.435E-04
1E04	–	–	–	6.631E-03	2.576E-03	1.007E-03	3.958E-04
2E04	–	–	–	6.834E-03	2.918E-03	1.203E-03	4.998E-04
3E04	–	–	–	–	3.088E-03	1.311E-03	5.603E-04

R	k = 1	2	3	4	5	6	7
4E04	–	–	–	–	3.189E-03	1.383E-03	6.025E-04
5E04	–	–	–	–	3.252E-03	1.436E-03	6.344E-04
6E04	–	–	–	–	3.287E-03	1.478E-03	6.600E-04
7E04	–	–	–	–	3.297E-03	1.511E-03	6.812E-04
1E05	–	–	–	–	–	1.583E-03	7.285E-04
2E05	–	–	–	–	–	1.688E-03	8.121E-04
3E05	–	–	–	–	–	1.702E-03	8.547E-04
4E05	–	–	–	–	–	–	8.813E-04
5E05	–	–	–	–	–	–	8.992E-04
6E05	–	–	–	–	–	–	9.115E-04
7E05	–	–	–	–	–	–	9.197E-04
8E05	–	–	–	–	–	–	9.242E-04
9E05	–	–	–	–	–	–	9.254E-04
R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $8 \leq k \leq 14$

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
7E00	6.728E-11	3.463E-12	–	–	–	–	–
8E00	1.653E-10	9.548E-12	–	–	–	–	–
9E00	3.441E-10	2.185E-11	–	–	–	–	–
1E01	6.356E-10	4.368E-11	3.002E-12	2.065E-13	1.421E-14	–	–
2E01	1.656E-08	1.740E-09	1.828E-10	1.921E-11	2.018E-12	–	–
3E01	7.012E-08	8.915E-09	1.134E-09	1.442E-10	1.834E-11	–	–
4E01	1.681E-07	2.402E-08	3.432E-09	4.906E-10	7.014E-11	–	–
5E01	3.085E-07	4.784E-08	7.420E-09	1.151E-09	1.786E-10	2.772E-11	–
6E01	4.867E-07	8.030E-08	1.325E-08	2.187E-09	3.611E-10	5.961E-11	–
7E01	6.978E-07	1.209E-07	2.097E-08	3.635E-09	6.304E-10	1.093E-10	–
8E01	9.372E-07	1.691E-07	3.053E-08	5.513E-09	9.955E-10	1.798E-10	3.247E-11
9E01	1.201E-06	2.242E-07	4.189E-08	7.826E-09	1.462E-09	2.733E-10	5.108E-11
1E02	1.485E-06	2.856E-07	5.494E-08	1.057E-08	2.035E-09	3.916E-10	7.538E-11
2E02	4.979E-06	1.136E-06	2.592E-07	5.915E-08	1.350E-08	3.083E-09	7.038E-10
3E02	8.915E-06	2.213E-06	5.493E-07	1.364E-07	3.388E-08	8.415E-09	2.090E-09
4E02	1.288E-05	3.374E-06	8.844E-07	2.319E-07	6.079E-08	1.594E-08	4.181E-09
5E02	1.674E-05	4.562E-06	1.244E-06	3.391E-07	9.246E-08	2.522E-08	6.878E-09
6E02	2.047E-05	5.749E-06	1.615E-06	4.540E-07	1.276E-07	3.588E-08	1.009E-08
7E02	2.405E-05	6.922E-06	1.993E-06	5.742E-07	1.654E-07	4.767E-08	1.374E-08
8E02	2.748E-05	8.074E-06	2.373E-06	6.978E-07	2.052E-07	6.036E-08	1.776E-08
9E02	3.077E-05	9.201E-06	2.752E-06	8.237E-07	2.465E-07	7.380E-08	2.209E-08
1E03	3.393E-05	1.030E-05	3.129E-06	9.509E-07	2.890E-07	8.784E-08	2.670E-08
2E03	6.004E-05	1.998E-05	6.652E-06	2.215E-06	7.378E-07	2.458E-07	8.189E-08
3E03	7.970E-05	2.780E-05	9.705E-06	3.388E-06	1.183E-06	4.133E-07	1.444E-07
4E03	9.556E-05	3.439E-05	1.238E-05	4.460E-06	1.607E-06	5.791E-07	2.087E-07
5E03	1.089E-04	4.010E-05	1.477E-05	5.444E-06	2.007E-06	7.400E-07	2.729E-07
6E03	1.204E-04	4.514E-05	1.693E-05	6.354E-06	2.385E-06	8.953E-07	3.362E-07
7E03	1.306E-04	4.968E-05	1.891E-05	7.201E-06	2.743E-06	1.045E-06	3.982E-07
8E03	1.397E-04	5.380E-05	2.073E-05	7.994E-06	3.083E-06	1.189E-06	4.587E-07
9E03	1.479E-04	5.759E-05	2.243E-05	8.740E-06	3.407E-06	1.328E-06	5.179E-07
1E04	1.555E-04	6.108E-05	2.401E-05	9.445E-06	3.716E-06	1.462E-06	5.755E-07
2E04	2.080E-04	8.653E-05	3.601E-05	1.499E-05	6.245E-06	2.602E-06	1.084E-06
3E04	2.404E-04	1.031E-04	4.422E-05	1.898E-05	8.147E-06	3.498E-06	1.503E-06
4E04	2.637E-04	1.154E-04	5.052E-05	2.212E-05	9.690E-06	4.246E-06	1.861E-06
5E04	2.818E-04	1.252E-04	5.565E-05	2.473E-05	1.100E-05	4.892E-06	2.177E-06

6E04	2.965E-04	1.334E-04	5.998E-05	2.698E-05	1.214E-05	5.464E-06	2.460E-06
7E04	3.089E-04	1.403E-04	6.373E-05	2.894E-05	1.315E-05	5.978E-06	2.718E-06
8E04	3.195E-04	1.464E-04	6.703E-05	3.070E-05	1.406E-05	6.446E-06	2.955E-06
9E04	3.289E-04	1.517E-04	6.999E-05	3.228E-05	1.490E-05	6.876E-06	3.175E-06
1E05	3.372E-04	1.565E-04	7.266E-05	3.373E-05	1.566E-05	7.274E-06	3.380E-06
2E05	3.896E-04	1.878E-04	9.069E-05	4.378E-05	2.114E-05	1.021E-05	4.930E-06
3E05	4.182E-04	2.057E-04	1.014E-04	4.999E-05	2.465E-05	1.215E-05	5.995E-06
4E05	4.374E-04	2.179E-04	1.089E-04	5.449E-05	2.725E-05	1.363E-05	6.818E-06
5E05	4.515E-04	2.272E-04	1.147E-04	5.800E-05	2.932E-05	1.482E-05	7.493E-06
6E05	4.625E-04	2.345E-04	1.194E-04	6.087E-05	3.103E-05	1.582E-05	8.066E-06
7E05	4.715E-04	2.406E-04	1.233E-04	6.329E-05	3.250E-05	1.668E-05	8.565E-06
8E05	4.789E-04	2.458E-04	1.266E-04	6.538E-05	3.377E-05	1.744E-05	9.008E-06
9E05	4.851E-04	2.502E-04	1.295E-04	6.722E-05	3.490E-05	1.812E-05	9.405E-06
1E06	4.905E-04	2.541E-04	1.321E-04	6.886E-05	3.591E-05	1.873E-05	9.767E-06
2E06	5.190E-04	2.777E-04	1.482E-04	7.936E-05	4.257E-05	2.284E-05	1.225E-05
3E06	5.243E-04	2.895E-04	1.568E-04	8.519E-05	4.639E-05	2.528E-05	1.377E-05
4E06	–	2.968E-04	1.625E-04	8.915E-05	4.904E-05	2.700E-05	1.487E-05
5E06	–	3.016E-04	1.667E-04	9.211E-05	5.104E-05	2.833E-05	1.572E-05
6E06	–	3.048E-04	1.700E-04	9.446E-05	5.265E-05	2.940E-05	1.642E-05
7E06	–	3.066E-04	1.726E-04	9.638E-05	5.398E-05	3.029E-05	1.701E-05
8E06	–	3.072E-04	1.747E-04	9.800E-05	5.511E-05	3.106E-05	1.752E-05
9E06	–	–	1.765E-04	9.939E-05	5.609E-05	3.173E-05	1.797E-05
1E07	–	–	1.780E-04	1.006E-04	5.696E-05	3.232E-05	1.836E-05
2E07	–	–	1.850E-04	1.078E-04	6.229E-05	3.606E-05	2.092E-05
3E07	–	–	1.852E-04	1.113E-04	6.508E-05	3.809E-05	2.234E-05
4E07	–	–	–	1.132E-04	6.690E-05	3.945E-05	2.332E-05
5E07	–	–	–	1.142E-04	6.820E-05	4.046E-05	2.404E-05
6E07	–	–	–	1.144E-04	6.918E-05	4.124E-05	2.462E-05
7E07	–	–	–	–	6.995E-05	4.188E-05	2.510E-05
8E07	–	–	–	–	7.056E-05	4.242E-05	2.550E-05
9E07	–	–	–	–	7.104E-05	4.287E-05	2.585E-05
1E08	–	–	–	–	7.143E-05	4.327E-05	2.615E-05
2E08	–	–	–	–	7.219E-05	4.548E-05	2.798E-05
3E08	–	–	–	–	–	4.630E-05	2.890E-05
4E08	–	–	–	–	–	4.640E-05	2.947E-05
5E08	–	–	–	–	–	–	2.985E-05
6E08	–	–	–	–	–	–	3.010E-05
7E08	–	–	–	–	–	–	3.025E-05
8E08	–	–	–	–	–	–	3.032E-05
9E08	–	–	–	–	–	–	3.032E-05
R	$k=8$	9	10	11	12	13	14

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $15 \leq k \leq 21$

R	$k=15$	16	17	18	19	20	21
1E02	1.451E-11	–	–	–	–	–	–
2E02	1.607E-10	3.669E-11	–	–	–	–	–
3E02	5.194E-10	1.290E-10	–	–	–	–	–
4E02	1.097E-09	2.876E-10	7.546E-11	–	–	–	–
5E02	1.876E-09	5.119E-10	1.396E-10	–	–	–	–
6E02	2.837E-09	7.979E-10	2.244E-10	–	–	–	–
7E02	3.959E-09	1.141E-09	3.290E-10	9.483E-11	–	–	–
8E02	5.224E-09	1.537E-09	4.522E-10	1.331E-10	–	–	–

9E02	6.615E-09	1.981E-09	5.932E-10	1.776E-10	–	–	–
1E03	8.119E-09	2.468E-09	7.506E-10	2.283E-10	6.941E-11	2.111E-11	–
2E03	2.729E-08	9.094E-09	3.031E-09	1.010E-09	3.367E-10	1.122E-10	–
3E03	5.045E-08	1.763E-08	6.160E-09	2.153E-09	7.524E-10	2.630E-10	9.192E-11
4E03	7.523E-08	2.712E-08	9.778E-09	3.525E-09	1.271E-09	4.584E-10	1.653E-10
5E03	1.007E-07	3.713E-08	1.370E-08	5.053E-09	1.864E-09	6.879E-10	2.538E-10
6E03	1.262E-07	4.741E-08	1.781E-08	6.689E-09	2.513E-09	9.440E-10	3.546E-10
7E03	1.517E-07	5.783E-08	2.204E-08	8.403E-09	3.203E-09	1.221E-09	4.656E-10
8E03	1.770E-07	6.830E-08	2.636E-08	1.017E-08	3.927E-09	1.516E-09	5.851E-10
9E03	2.020E-07	7.877E-08	3.072E-08	1.199E-08	4.676E-09	1.824E-09	7.117E-10
1E04	2.266E-07	8.919E-08	3.512E-08	1.383E-08	5.445E-09	2.144E-09	8.444E-10
2E04	4.519E-07	1.884E-07	7.852E-08	3.274E-08	1.365E-08	5.691E-09	2.373E-09
3E04	6.455E-07	2.773E-07	1.192E-07	5.120E-08	2.200E-08	9.457E-09	4.065E-09
4E04	8.158E-07	3.577E-07	1.568E-07	6.877E-08	3.016E-08	1.323E-08	5.801E-09
5E04	9.686E-07	4.311E-07	1.919E-07	8.542E-08	3.803E-08	1.693E-08	7.538E-09
6E04	1.108E-06	4.989E-07	2.247E-07	1.012E-07	4.561E-08	2.055E-08	9.258E-09
7E04	1.236E-06	5.621E-07	2.557E-07	1.163E-07	5.291E-08	2.407E-08	1.095E-08
8E04	1.355E-06	6.213E-07	2.850E-07	1.307E-07	5.995E-08	2.750E-08	1.262E-08
9E04	1.466E-06	6.771E-07	3.128E-07	1.445E-07	6.676E-08	3.085E-08	1.425E-08
1E05	1.571E-06	7.300E-07	3.393E-07	1.578E-07	7.334E-08	3.410E-08	1.586E-08
2E05	2.382E-06	1.151E-06	5.563E-07	2.689E-07	1.300E-07	6.284E-08	3.038E-08
3E05	2.958E-06	1.460E-06	7.205E-07	3.557E-07	1.756E-07	8.668E-08	4.280E-08
4E05	3.412E-06	1.708E-06	8.550E-07	4.281E-07	2.143E-07	1.073E-07	5.375E-08
5E05	3.790E-06	1.917E-06	9.699E-07	4.908E-07	2.483E-07	1.257E-07	6.361E-08
6E05	4.114E-06	2.099E-06	1.071E-06	5.464E-07	2.788E-07	1.423E-07	7.264E-08
7E05	4.399E-06	2.260E-06	1.161E-06	5.965E-07	3.066E-07	1.576E-07	8.098E-08
8E05	4.653E-06	2.405E-06	1.243E-06	6.424E-07	3.321E-07	1.717E-07	8.876E-08
9E05	4.884E-06	2.537E-06	1.318E-06	6.846E-07	3.557E-07	1.849E-07	9.607E-08
1E06	5.094E-06	2.658E-06	1.387E-06	7.239E-07	3.778E-07	1.972E-07	1.030E-07
2E06	6.575E-06	3.528E-06	1.894E-06	1.017E-06	5.459E-07	2.931E-07	1.574E-07
3E06	7.506E-06	4.090E-06	2.230E-06	1.216E-06	6.628E-07	3.614E-07	1.971E-07
4E06	8.189E-06	4.509E-06	2.484E-06	1.368E-06	7.540E-07	4.155E-07	2.290E-07
5E06	8.728E-06	4.844E-06	2.689E-06	1.493E-06	8.293E-07	4.606E-07	2.559E-07
6E06	9.173E-06	5.124E-06	2.862E-06	1.599E-06	8.938E-07	4.996E-07	2.792E-07
7E06	9.552E-06	5.364E-06	3.012E-06	1.692E-06	9.503E-07	5.339E-07	3.000E-07
8E06	9.882E-06	5.574E-06	3.144E-06	1.774E-06	1.001E-06	5.648E-07	3.187E-07
9E06	1.017E-05	5.760E-06	3.262E-06	1.847E-06	1.046E-06	5.927E-07	3.358E-07
1E07	1.043E-05	5.928E-06	3.368E-06	1.914E-06	1.088E-06	6.184E-07	3.516E-07
2E07	1.214E-05	7.051E-06	4.093E-06	2.376E-06	1.380E-06	8.013E-07	4.654E-07
3E07	1.312E-05	7.710E-06	4.529E-06	2.661E-06	1.563E-06	9.186E-07	5.399E-07
4E07	1.380E-05	8.174E-06	4.841E-06	2.867E-06	1.698E-06	1.006E-06	5.959E-07
5E07	1.431E-05	8.529E-06	5.083E-06	3.029E-06	1.805E-06	1.076E-06	6.412E-07
6E07	1.473E-05	8.817E-06	5.280E-06	3.162E-06	1.893E-06	1.134E-06	6.791E-07
7E07	1.507E-05	9.057E-06	5.446E-06	3.275E-06	1.969E-06	1.184E-06	7.119E-07
8E07	1.536E-05	9.263E-06	5.589E-06	3.372E-06	2.035E-06	1.228E-06	7.408E-07
9E07	1.561E-05	9.442E-06	5.714E-06	3.458E-06	2.093E-06	1.267E-06	7.666E-07
1E08	1.583E-05	9.601E-06	5.826E-06	3.535E-06	2.145E-06	1.302E-06	7.900E-07
2E08	1.721E-05	1.060E-05	6.539E-06	4.035E-06	2.491E-06	1.537E-06	9.486E-07
3E08	1.794E-05	1.114E-05	6.935E-06	4.319E-06	2.691E-06	1.676E-06	1.044E-06
4E08	1.841E-05	1.151E-05	7.205E-06	4.515E-06	2.831E-06	1.775E-06	1.113E-06
5E08	1.876E-05	1.178E-05	7.407E-06	4.664E-06	2.938E-06	1.851E-06	1.166E-06
6E08	1.903E-05	1.199E-05	7.568E-06	4.782E-06	3.024E-06	1.913E-06	1.210E-06
7E08	1.924E-05	1.216E-05	7.700E-06	4.880E-06	3.096E-06	1.965E-06	1.247E-06
8E08	1.941E-05	1.231E-05	7.811E-06	4.964E-06	3.157E-06	2.009E-06	1.278E-06

9E08	1.955E-05	1.243E-05	7.907E-06	5.036E-06	3.211E-06	2.048E-06	1.306E-06
1E09	1.967E-05	1.254E-05	7.991E-06	5.100E-06	3.258E-06	2.082E-06	1.331E-06
2E09	2.011E-05	1.316E-05	8.501E-06	5.493E-06	3.554E-06	2.302E-06	1.491E-06
3E09	–	1.342E-05	8.759E-06	5.701E-06	3.714E-06	2.423E-06	1.581E-06
4E09	–	1.351E-05	8.920E-06	5.837E-06	3.821E-06	2.505E-06	1.643E-06
5E09	–	1.352E-05	9.029E-06	5.936E-06	3.901E-06	2.566E-06	1.690E-06
6E09	–	–	9.104E-06	6.012E-06	3.963E-06	2.614E-06	1.727E-06
7E09	–	–	9.155E-06	6.072E-06	4.013E-06	2.654E-06	1.757E-06
8E09	–	–	9.185E-06	6.122E-06	4.055E-06	2.688E-06	1.783E-06
9E09	–	–	9.195E-06	6.163E-06	4.091E-06	2.717E-06	1.806E-06
1E10	–	–	–	6.197E-06	4.123E-06	2.742E-06	1.825E-06
2E10	–	–	–	6.325E-06	4.301E-06	2.894E-06	1.947E-06
3E10	–	–	–	–	4.375E-06	2.970E-06	2.010E-06
4E10	–	–	–	–	4.395E-06	3.017E-06	2.051E-06
5E10	–	–	–	–	–	3.047E-06	2.081E-06
6E10	–	–	–	–	–	3.067E-06	2.104E-06
7E10	–	–	–	–	–	3.079E-06	2.122E-06
8E10	–	–	–	–	–	3.083E-06	2.136E-06
9E10	–	–	–	–	–	–	2.147E-06
1E11	–	–	–	–	–	–	2.157E-06
2E11	–	–	–	–	–	–	2.181E-06
R	$k = 15$	16	17	18	19	20	21

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $22 \leq k \leq 28$

R	$k = 22$	23	24	25	26	27	28
5E03	9.366E-11	–	–	–	–	–	–
6E03	1.332E-10	5.006E-11	–	–	–	–	–
7E03	1.775E-10	6.773E-11	–	–	–	–	–
8E03	2.259E-10	8.719E-11	–	–	–	–	–
9E03	2.777E-10	1.083E-10	–	–	–	–	–
1E04	3.326E-10	1.310E-10	–	–	–	–	–
2E04	9.896E-10	4.127E-10	1.721E-10	–	–	–	–
3E04	1.747E-09	7.510E-10	3.228E-10	1.388E-10	5.966E-11	–	–
4E04	2.544E-09	1.116E-09	4.895E-10	2.147E-10	9.420E-11	–	–
5E04	3.356E-09	1.495E-09	6.655E-10	2.964E-10	1.320E-10	5.877E-11	–
6E04	4.172E-09	1.880E-09	8.517E-10	3.817E-10	1.720E-10	7.753E-11	–
7E04	4.984E-09	2.268E-09	1.032E-09	4.696E-10	2.137E-10	9.726E-11	4.427E-11
8E04	5.789E-09	2.656E-09	1.219E-09	5.593E-10	2.566E-10	1.178E-10	5.404E-11
9E04	9.603E-09	3.044E-09	1.407E-09	6.501E-10	3.004E-10	1.389E-10	6.418E-11
1E05	7.374E-09	3.429E-09	1.595E-09	7.417E-10	3.450E-10	1.604E-10	7.462E-11
2E05	1.469E-08	7.103E-09	3.435E-09	1.661E-09	8.032E-10	3.884E-10	1.878E-10
3E05	2.113E-08	1.044E-08	5.153E-09	2.545E-09	1.257E-09	6.207E-10	3.065E-10
4E05	2.692E-08	1.348E-08	6.753E-09	3.382E-09	1.694E-09	8.487E-10	4.252E-10
5E05	3.220E-08	1.630E-08	8.251E-09	4.177E-09	2.115E-09	1.071E-09	5.420E-10
6E05	3.708E-08	1.893E-08	9.663E-09	4.933E-09	2.519E-09	1.286E-09	6.565E-10
7E05	4.163E-08	2.140E-08	1.100E-08	5.655E-09	2.907E-09	1.495E-09	7.686E-10
8E05	4.590E-08	2.373E-08	1.227E-08	6.347E-09	3.283E-09	1.698E-09	8.781E-10
9E05	4.993E-08	2.595E-08	1.349E-08	7.012E-09	3.645E-09	1.895E-09	9.851E-10
1E06	5.376E-08	2.807E-08	1.466E-08	7.653E-09	3.996E-09	2.087E-09	1.090E-09
2E06	8.455E-08	4.541E-08	2.439E-08	1.310E-08	7.038E-09	3.781E-09	2.031E-09
3E06	1.075E-07	5.864E-08	3.199E-08	1.745E-08	9.518E-09	5.193E-09	2.833E-09
4E06	1.262E-07	6.956E-08	3.834E-08	2.114E-08	1.165E-08	6.424E-09	3.542E-09

5E06	1.421E-07	7.896E-08	4.387E-08	2.438E-08	1.354E-08	7.526E-09	4.182E-09
6E06	1.561E-07	8.727E-08	4.879E-08	2.728E-08	1.525E-08	8.530E-09	4.770E-09
7E06	1.686E-07	9.474E-08	5.325E-08	2.993E-08	1.682E-08	9.455E-09	5.315E-09
8E06	1.799E-07	1.016E-07	5.733E-08	3.237E-08	1.827E-08	1.032E-08	5.825E-09
9E06	1.903E-07	1.078E-07	6.111E-08	3.463E-08	1.963E-08	1.112E-08	6.305E-09
1E07	1.999E-07	1.137E-07	6.463E-08	3.675E-08	2.090E-08	1.189E-08	6.760E-09
2E07	2.703E-07	1.570E-07	9.123E-08	5.301E-08	3.080E-08	1.789E-08	1.040E-08
3E07	3.173E-07	1.865E-07	1.096E-07	6.446E-08	3.790E-08	2.228E-08	1.310E-08
4E07	3.531E-07	2.092E-07	1.240E-07	7.348E-08	4.355E-08	2.581E-08	1.530E-08
5E07	3.822E-07	2.279E-07	1.359E-07	8.101E-08	4.830E-08	2.881E-08	1.718E-08
6E07	4.068E-07	2.437E-07	1.460E-07	8.749E-08	5.243E-08	3.142E-08	1.883E-08
7E07	4.282E-07	2.576E-07	1.549E-07	9.321E-08	5.608E-08	3.374E-08	2.030E-08
8E07	4.471E-07	2.699E-07	1.629E-07	9.834E-08	5.937E-08	3.584E-08	2.164E-08
9E07	4.641E-07	2.809E-07	1.701E-07	1.030E-07	6.237E-08	3.777E-08	2.287E-08
1E08	4.795E-07	2.910E-07	1.767E-07	1.073E-07	6.513E-08	3.954E-08	2.401E-08
2E08	5.855E-07	3.614E-07	2.231E-07	1.377E-07	8.505E-08	5.252E-08	3.243E-08
3E08	6.506E-07	4.054E-07	2.526E-07	1.574E-07	9.809E-08	6.114E-08	3.811E-08
4E08	6.978E-07	4.376E-07	2.744E-07	1.721E-07	1.079E-07	6.770E-08	4.247E-08
5E08	7.349E-07	4.630E-07	2.918E-07	1.839E-07	1.159E-07	7.304E-08	4.604E-08
6E08	7.653E-07	4.841E-07	3.062E-07	1.937E-07	1.226E-07	7.755E-08	4.907E-08
7E08	7.911E-07	5.020E-07	3.186E-07	2.022E-07	1.283E-07	8.147E-08	5.172E-08
8E08	8.136E-07	5.177E-07	3.294E-07	2.097E-07	1.335E-07	8.495E-08	5.408E-08
9E08	8.333E-07	5.316E-07	3.391E-07	2.163E-07	1.380E-07	8.807E-08	5.620E-08
1E09	8.510E-07	5.440E-07	3.478E-07	2.223E-07	1.422E-07	9.090E-08	5.813E-08
2E09	9.665E-07	6.263E-07	4.059E-07	2.630E-07	1.705E-07	1.105E-07	7.161E-08
3E09	1.033E-06	6.742E-07	4.403E-07	2.875E-07	1.877E-07	1.226E-07	8.005E-08
4E09	1.078E-06	7.078E-07	4.646E-07	3.050E-07	2.002E-07	1.314E-07	8.626E-08
5E09	1.113E-06	7.336E-07	4.834E-07	3.186E-07	2.099E-07	1.383E-07	9.118E-08
6E09	1.141E-06	7.543E-07	4.987E-07	3.297E-07	2.179E-07	1.441E-07	9.526E-08
7E09	1.164E-06	7.716E-07	5.115E-07	3.390E-07	2.247E-07	1.490E-07	9.875E-08
8E09	1.184E-06	7.865E-07	5.225E-07	3.471E-07	2.306E-07	1.532E-07	1.018E-07
9E09	1.201E-06	7.994E-07	5.322E-07	3.543E-07	2.358E-07	1.570E-07	1.045E-07
1E10	1.216E-06	8.109E-07	5.407E-07	3.606E-07	2.405E-07	1.604E-07	1.069E-07
2E10	1.311E-06	8.831E-07	5.954E-07	4.015E-07	2.708E-07	1.826E-07	1.231E-07
3E10	1.361E-06	9.225E-07	6.257E-07	4.246E-07	2.881E-07	1.955E-07	1.327E-07
4E10	1.395E-06	9.491E-07	6.463E-07	4.404E-07	3.001E-07	2.046E-07	1.394E-07
5E10	1.419E-06	9.688E-07	6.618E-07	4.523E-07	3.093E-07	2.115E-07	1.446E-07
6E10	1.439E-06	9.844E-07	6.741E-07	4.619E-07	3.166E-07	2.171E-07	1.488E-07
7E10	1.454E-06	9.971E-07	6.842E-07	4.698E-07	3.227E-07	2.217E-07	1.524E-07
8E10	1.467E-06	1.008E-06	6.927E-07	4.765E-07	3.279E-07	2.257E-07	1.554E-07
9E10	1.478E-06	1.017E-06	7.001E-07	4.823E-07	3.325E-07	2.292E-07	1.581E-07
1E11	1.488E-06	1.025E-06	7.066E-07	4.874E-07	3.365E-07	2.323E-07	1.604E-07
2E11	1.540E-06	1.073E-06	7.459E-07	5.190E-07	3.614E-07	2.518E-07	1.755E-07
3E11	1.556E-06	1.095E-06	7.662E-07	5.357E-07	3.749E-07	2.625E-07	1.839E-07
4E11	1.556E-06	1.108E-06	7.791E-07	5.467E-07	3.838E-07	2.697E-07	1.896E-07
5E11	–	1.116E-06	7.882E-07	5.547E-07	3.905E-07	2.750E-07	1.938E-07
6E11	–	1.118E-06	7.949E-07	5.609E-07	3.957E-07	2.793E-07	1.972E-07
7E11	–	1.118E-06	8.000E-07	5.659E-07	3.999E-07	2.827E-07	2.000E-07
8E11	–	–	8.038E-07	5.700E-07	4.034E-07	2.856E-07	2.024E-07
9E11	–	–	8.065E-07	5.734E-07	4.064E-07	2.882E-07	2.044E-07
1E12	–	–	8.084E-07	5.763E-07	4.091E-07	2.904E-07	2.062E-07
2E12	–	–	8.095E-07	5.895E-07	4.241E-07	3.035E-07	2.172E-07
3E12	–	–	–	5.898E-07	4.304E-07	3.100E-07	2.228E-07
4E12	–	–	–	–	4.324E-07	3.140E-07	2.265E-07

5E12	–	–	–	–	4.325E-07	3.165E-07	2.291E-07
6E12	–	–	–	–	–	3.181E-07	2.311E-07
7E12	–	–	–	–	–	3.189E-07	2.326E-07
8E12	–	–	–	–	–	3.189E-07	2.338E-07
9E12	–	–	–	–	–	–	2.347E-07
1E13	–	–	–	–	–	–	2.354E-07
2E13	–	–	–	–	–	–	2.365E-07
R	$k = 22$	23	24	25	26	27	28

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $29 \leq k \leq 35$

R	$k = 29$	30	31	32	33	34	35
1E06	5.692E-10	2.972E-10	1.552E-10	8.108E-11	4.235E-11	–	–
2E06	1.091E-09	5.862E-10	3.149E-10	1.692E-10	9.091E-11	–	–
3E06	1.546E-09	8.433E-10	4.601E-10	2.510E-10	1.370E-10	7.474E-11	4.078E-11
4E06	1.953E-09	1.077E-09	5.936E-10	3.273E-10	1.805E-10	9.951E-11	5.487E-11
5E06	2.324E-09	1.291E-09	7.177E-10	3.989E-10	2.217E-10	1.232E-10	6.847E-11
6E06	2.667E-09	1.492E-09	8.342E-10	4.665E-10	2.609E-10	1.459E-10	8.161E-11
7E06	2.988E-09	1.680E-09	9.442E-10	5.308E-10	2.984E-10	1.678E-10	9.432E-11
8E06	3.289E-09	1.857E-09	1.049E-09	5.922E-10	3.344E-10	1.888E-10	1.066E-10
9E06	3.574E-09	2.026E-09	1.148E-09	6.510E-10	3.690E-10	2.092E-10	1.186E-10
1E07	3.845E-09	2.187E-09	1.244E-09	7.076E-10	4.025E-10	2.289E-10	1.302E-10
2E07	6.042E-09	3.511E-09	2.040E-09	1.186E-09	6.891E-10	4.005E-10	2.328E-10
3E07	7.703E-09	4.529E-09	2.663E-09	1.566E-09	9.210E-10	5.416E-10	3.185E-10
4E07	9.070E-09	5.376E-09	3.187E-09	1.889E-09	1.120E-09	6.640E-10	3.937E-10
5E07	1.024E-08	6.110E-09	3.644E-09	2.173E-09	1.296E-09	7.732E-10	4.612E-10
6E07	1.128E-08	6.762E-09	4.053E-09	2.429E-09	1.456E-09	8.726E-10	5.230E-10
7E07	1.222E-08	7.351E-09	4.424E-09	2.662E-09	1.602E-09	9.641E-10	5.802E-10
8E07	1.307E-08	7.890E-09	4.765E-09	2.877E-09	1.737E-09	1.049E-09	6.337E-10
9E07	1.385E-08	8.389E-09	5.081E-09	3.078E-09	1.864E-09	1.129E-09	6.839E-10
1E08	1.458E-08	8.854E-09	5.377E-09	3.265E-09	1.983E-09	1.204E-09	7.315E-10
2E08	2.003E-08	1.237E-08	7.638E-09	4.717E-09	2.914E-09	1.800E-09	1.112E-09
3E08	2.375E-08	1.481E-08	9.230E-09	5.754E-09	3.587E-09	2.236E-09	1.394E-09
4E08	2.664E-08	1.671E-08	1.049E-08	6.578E-09	4.127E-09	2.590E-09	1.625E-09
5E08	2.902E-08	1.829E-08	1.153E-08	7.271E-09	4.584E-09	2.890E-09	1.822E-09
6E08	3.105E-08	1.965E-08	1.244E-08	7.872E-09	4.982E-09	3.153E-09	1.996E-09
7E08	3.284E-08	2.085E-08	1.324E-08	8.405E-09	5.337E-09	3.389E-09	2.152E-09
8E08	3.443E-08	2.192E-08	1.395E-08	8.885E-09	5.657E-09	3.602E-09	2.294E-09
9E08	3.586E-08	2.289E-08	1.461E-08	9.323E-09	5.950E-09	3.798E-09	2.424E-09
1E09	3.717E-08	2.377E-08	1.521E-08	9.726E-09	6.221E-09	3.979E-09	2.545E-09
2E09	4.642E-08	3.009E-08	1.951E-08	1.265E-08	8.200E-09	5.317E-09	3.447E-09
3E09	5.229E-08	3.415E-08	2.231E-08	1.457E-08	9.519E-09	6.219E-09	4.063E-09
4E09	5.663E-08	3.718E-08	2.441E-08	1.603E-08	1.053E-08	6.913E-09	4.540E-09
5E09	6.010E-08	3.961E-08	2.611E-08	1.721E-08	1.135E-08	7.482E-09	4.933E-09
6E09	6.299E-08	4.165E-08	2.754E-08	1.821E-08	1.205E-08	7.966E-09	5.269E-09
7E09	6.546E-08	4.340E-08	2.878E-08	1.908E-08	1.265E-08	8.390E-09	5.564E-09
8E09	6.764E-08	4.494E-08	2.987E-08	1.985E-08	1.319E-08	8.767E-09	5.827E-09
9E09	6.957E-08	4.632E-08	3.084E-08	2.054E-08	1.368E-08	9.107E-09	6.065E-09
1E10	7.131E-08	4.756E-08	3.172E-08	2.116E-08	1.412E-08	9.417E-09	6.282E-09
2E10	8.304E-08	5.600E-08	3.777E-08	2.548E-08	1.718E-08	1.159E-08	7.820E-09
3E10	9.003E-08	6.110E-08	4.147E-08	2.814E-08	1.910E-08	1.297E-08	8.801E-09
4E10	9.502E-08	6.476E-08	4.414E-08	3.009E-08	2.051E-08	1.398E-08	9.531E-09
5E10	9.889E-08	6.762E-08	4.624E-08	3.162E-08	2.162E-08	1.479E-08	1.012E-08

6E10	1.020E-07	6.996E-08	4.797E-08	3.289E-08	2.255E-08	1.546E-08	1.060E-08
7E10	1.047E-07	7.194E-08	4.943E-08	3.397E-08	2.334E-08	1.604E-08	1.102E-08
8E10	1.070E-07	7.366E-08	5.071E-08	3.491E-08	2.403E-08	1.655E-08	1.139E-08
9E10	1.090E-07	7.517E-08	5.183E-08	3.574E-08	2.465E-08	1.700E-08	1.172E-08
1E11	1.108E-07	7.652E-08	5.284E-08	3.649E-08	2.520E-08	1.741E-08	1.202E-08
2E11	1.223E-07	8.529E-08	5.945E-08	4.144E-08	2.889E-08	2.014E-08	1.404E-08
3E11	1.288E-07	9.029E-08	6.327E-08	4.434E-08	3.107E-08	2.177E-08	1.526E-08
4E11	1.333E-07	9.375E-08	6.594E-08	4.638E-08	3.262E-08	2.294E-08	1.614E-08
5E11	1.367E-07	9.638E-08	6.798E-08	4.794E-08	3.381E-08	2.385E-08	1.682E-08
6E11	1.394E-07	9.849E-08	6.962E-08	4.921E-08	3.479E-08	2.459E-08	1.738E-08
7E11	1.416E-07	1.002E-07	7.099E-08	5.027E-08	3.560E-08	2.521E-08	1.786E-08
8E11	1.435E-07	1.017E-07	7.216E-08	5.119E-08	3.631E-08	2.575E-08	1.827E-08
9E11	1.451E-07	1.030E-07	7.319E-08	5.199E-08	3.693E-08	2.623E-08	1.863E-08
1E12	1.465E-07	1.042E-07	7.409E-08	5.269E-08	3.748E-08	2.665E-08	1.896E-08
2E12	1.555E-07	1.114E-07	7.979E-08	5.719E-08	4.100E-08	2.939E-08	2.107E-08
3E12	1.602E-07	1.152E-07	8.290E-08	5.968E-08	4.297E-08	3.094E-08	2.228E-08
4E12	1.633E-07	1.178E-07	8.500E-08	6.137E-08	4.432E-08	3.202E-08	2.313E-08
5E12	1.656E-07	1.197E-07	8.656E-08	6.264E-08	4.534E-08	3.283E-08	2.377E-08
6E12	1.673E-07	1.212E-07	8.780E-08	6.364E-08	4.615E-08	3.348E-08	2.429E-08
7E12	1.687E-07	1.224E-07	8.881E-08	6.447E-08	4.682E-08	3.402E-08	2.472E-08
8E12	1.699E-07	1.234E-07	8.966E-08	6.517E-08	4.739E-08	3.448E-08	2.508E-08
9E12	1.709E-07	1.243E-07	9.039E-08	6.578E-08	4.789E-08	3.487E-08	2.540E-08
1E13	1.717E-07	1.250E-07	9.103E-08	6.631E-08	4.832E-08	3.523E-08	2.569E-08
2E13	1.760E-07	1.294E-07	9.487E-08	6.954E-08	5.100E-08	3.742E-08	2.746E-08
3E13	1.763E-07	1.313E-07	9.677E-08	7.121E-08	5.241E-08	3.859E-08	2.843E-08
4E13	–	1.321E-07	9.793E-08	7.229E-08	5.334E-08	3.937E-08	2.908E-08
5E13	–	1.321E-07	9.869E-08	7.306E-08	5.402E-08	3.995E-08	2.956E-08
6E13	–	–	9.917E-08	7.364E-08	5.455E-08	4.040E-08	2.994E-08
7E13	–	–	9.943E-08	7.408E-08	5.497E-08	4.077E-08	3.025E-08
8E13	–	–	9.947E-08	7.443E-08	5.532E-08	4.108E-08	3.051E-08
9E13	–	–	–	7.471E-08	5.561E-08	4.134E-08	3.073E-08
1E14	–	–	–	7.492E-08	5.586E-08	4.157E-08	3.093E-08
2E14	–	–	–	7.523E-08	5.707E-08	4.287E-08	3.210E-08
3E14	–	–	–	–	5.714E-08	4.341E-08	3.267E-08
4E14	–	–	–	–	–	4.358E-08	3.301E-08
5E14	–	–	–	–	–	–	3.322E-08
6E14	–	–	–	–	–	–	3.334E-08
7E14	–	–	–	–	–	–	3.336E-08
R	$k = 29$	30	31	32	33	34	35

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $36 \leq k \leq 42$

R	$k = 36$	37	38	39	40	41	42
1E15	2.562E-08	1.949E-08	1.479E-08	1.122E-08	8.507E-09	6.455E-09	4.899E-09
2E15	2.564E-08	1.978E-08	1.518E-08	1.158E-08	8.830E-09	6.732E-09	5.134E-09
3E15	–	–	1.531E-08	1.175E-08	8.992E-09	6.876E-09	5.258E-09
4E15	–	–	1.531E-08	1.185E-08	9.094E-09	6.969E-09	5.340E-09
5E15	–	–	–	1.189E-08	9.162E-09	7.036E-09	5.400E-09
6E15	–	–	–	1.189E-08	9.209E-09	7.086E-09	5.446E-09
7E15	–	–	–	–	9.241E-09	7.125E-09	5.483E-09
8E15	–	–	–	–	9.259E-09	7.156E-09	5.513E-09
9E15	–	–	–	–	9.264E-09	7.181E-09	5.539E-09
1E16	–	–	–	–	9.264E-09	7.201E-09	5.561E-09

2E16	–	–	–	–	–	7.240E-09	5.668E-09
3E16	–	–	–	–	–	–	5.675E-09
R	$k = 36$	37	38	39	40	41	42

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $43 \leq k \leq 49$

R	$k = 43$	44	45	46	47	48	49
1E16	4.289E-09	3.308E-09	2.551E-09	1.969E-09	1.519E-09	1.173E-09	9.055E-10
2E16	4.404E-09	3.413E-09	2.645E-09	2.049E-09	1.588E-09	1.231E-09	9.548E-10
3E16	4.450E-09	3.464E-09	2.692E-09	2.091E-09	1.625E-09	1.263E-09	9.815E-10
4E16	4.461E-09	3.494E-09	2.722E-09	2.118E-09	1.649E-09	1.283E-09	9.993E-10
5E16	–	3.510E-09	2.742E-09	2.138E-09	1.666E-09	1.299E-09	1.013E-09
6E16	–	3.517E-09	2.757E-09	2.153E-09	1.680E-09	1.311E-09	1.023E-09
7E16	–	3.517E-09	2.767E-09	2.164E-09	1.691E-09	1.320E-09	1.031E-09
8E16	–	–	2.775E-09	2.174E-09	1.700E-09	1.329E-09	1.039E-09
9E16	–	–	2.779E-09	2.181E-09	1.707E-09	1.336E-09	1.045E-09
1E17	–	–	2.780E-09	2.188E-09	1.714E-09	1.342E-09	1.050E-09
2E17	–	–	–	2.203E-09	1.747E-09	1.376E-09	8.095E-07
3E17	–	–	–	–	1.750E-09	1.390E-09	1.097E-09
4E17	–	–	–	–	–	1.394E-09	1.106E-09
5E17	–	–	–	–	–	–	1.111E-09
6E17	–	–	–	–	–	–	1.113E-09
7E17	–	–	–	–	–	–	1.113E-09
R	$k = 43$	44	45	46	47	48	49

Tabelle zur Approximation von $1/\sqrt{x}$ für $50 \leq k \leq 56$

R	$k = 50$	51	52	53	54	55	56
1E18	8.901E-10	7.099E-10	5.636E-10	4.471E-10	3.546E-10	2.813E-10	2.232E-10
2E18	–	7.138E-10	5.731E-10	4.574E-10	3.643E-10	2.901E-10	2.309E-10
3E18	–	–	5.736E-10	4.613E-10	3.689E-10	2.944E-10	2.349E-10
4E18	–	–	–	4.619E-10	3.714E-10	2.971E-10	2.375E-10
5E18	–	–	–	–	3.726E-10	2.989E-10	2.393E-10
6E18	–	–	–	–	3.727E-10	3.002E-10	2.406E-10
7E18	–	–	–	–	–	3.009E-10	2.417E-10
8E18	–	–	–	–	–	3.013E-10	2.425E-10
9E18	–	–	–	–	–	3.013E-10	2.431E-10
R	$k = 50$	51	52	53	54	55	56

3.3 Gemischte Polynom-Exponentialsummen-Approximation in $[1, R]$

Wegen der Wavelet-Anwendungen ist die Hinzunahme eines polynomialen Anteils empfehlenswert (vgl. [3]). Die Approximationsfehler lauten für die verschiedenen Polynomgrade wie folgt.

3.3.1 Polynomgrad $q = 0$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	3.419E-01	2.347E-02	1.592E-03	1.090E-04	7.482E-06	5.138E-07	3.529E-08	2.425E-09
2E01		3.902E-02	4.029E-03	4.214E-04	4.416E-05	4.633E-06	4.864E-07	5.109E-08
3E01		4.768E-02	5.988E-03	7.568E-04	9.594E-05	1.218E-05	1.547E-06	1.967E-07
4E01		5.327E-02	7.566E-03	1.073E-03	1.528E-04	2.180E-05	3.113E-06	4.446E-07
5E01		5.724E-02	8.868E-03	1.363E-03	2.107E-04	3.261E-05	5.053E-06	7.833E-07
6E01		6.025E-02	9.969E-03	1.628E-03	2.677E-04	4.409E-05	7.266E-06	1.198E-06
7E01		6.264E-02	1.092E-02	1.871E-03	3.232E-04	5.589E-05	9.677E-06	1.676E-06
8E01		6.459E-02	1.174E-02	2.094E-03	3.767E-04	6.784E-05	1.223E-05	2.206E-06
9E01		6.623E-02	1.247E-02	2.301E-03	4.282E-04	7.979E-05	1.489E-05	2.779E-06
1E02	4.500E-01	6.762E-02	1.312E-02	2.493E-03	4.777E-04	9.168E-05	1.761E-05	3.386E-06
2E02		7.538E-02	1.718E-02			2.008E-04		
3E02						2.912E-04		
5E02		8.254E-02	2.154E-02			4.330E-04		
7E02						5.421E-04		
1E03	4.842E-01	8.624E-02	2.400E-02	7.333E-03	2.217E-03	6.695E-04	2.030E-04	6.158E-05
2E03		8.889E-02	2.584E-02			9.435E-04		
3E03						1.114E-03		
5E03		9.128E-02	2.755E-02			1.331E-03		
7E03						1.471E-03		
1E04	4.950E-01	9.248E-02	2.844E-02	1.044E-02	4.094E-03	1.615E-03	6.326E-04	2.480E-04
1E05	4.984E-01	9.449E-02	2.994E-02	1.164E-02	5.029E-03	2.294E-03	1.068E-03	4.969E-04

3.3.2 Polynomgrad $q = 1$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	1.378E-01	7.636E-03	4.862E-04	3.214E-05	2.157E-06	1.459E-07	9.913E-09	6.754E-10
2E01		1.570E-02	1.524E-03	1.537E-04	1.575E-05	1.628E-06	1.690E-07	1.760E-08
3E01		2.124E-02	2.494E-03	3.038E-04	3.766E-05	4.709E-06	5.916E-07	7.456E-08
4E01		2.534E-02	3.342E-03	4.570E-04	6.364E-05	8.939E-06	1.262E-06	1.787E-07
5E01		2.856E-02	4.082E-03	6.052E-04	9.143E-05	1.393E-05	2.135E-06	3.281E-07
6E01		3.118E-02	4.733E-03	7.462E-04	1.199E-04	1.943E-05	3.167E-06	5.178E-07
7E01		3.339E-02	5.313E-03	8.795E-04	1.483E-04	2.526E-05	4.324E-06	7.426E-07
8E01		3.529E-02	5.833E-03	1.005E-03	1.765E-04	3.129E-05	5.577E-06	9.974E-07
9E01		3.695E-02	6.304E-03	1.124E-03	2.042E-04	3.745E-05	6.906E-06	1.278E-06
1E02	3.073E-01	3.842E-02	6.734E-03	1.237E-03	2.312E-04	4.367E-05	8.294E-06	1.581E-06
2E02		4.765E-02	9.678E-03	2.106E-03		1.043E-04		
3E02				2.700E-03		1.580E-04		
4E02				3.146E-03				
5E02		5.836E-02	1.356E-02	3.502E-03		2.466E-04		
7E02				4.046E-03		3.178E-04		
1E03	4.070E-01	6.520E-02	1.629E-02	4.625E-03	1.360E-03	4.037E-04	1.207E-04	3.626E-05
2E03		7.096E-02	1.873E-02	5.722E-03		5.971E-04		
3E03				6.330E-03		7.227E-04		
4E03				6.742E-03		8.154E-04		
5E03		7.708E-02	2.148E-02	7.049E-03		8.887E-04		
7E03				7.491E-03		1.000E-03		
1E04	4.563E-01	8.074E-02	2.320E-02	7.931E-03	2.930E-03	1.118E-03	4.317E-04	1.674E-04

3.3.3 Polynomgrad $q = 2$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	6.125E-02	2.807E-03	1.640E-04	1.030E-05	6.684E-07	4.414E-08	2.946E-09	1.979E-10
2E01		7.179E-03	6.370E-04	6.098E-05	6.040E-06	6.093E-07	6.213E-08	6.381E-09
3E01		1.075E-02	1.149E-03	1.328E-04	1.591E-05	1.940E-06	2.394E-07	2.975E-08
4E01		1.367E-02	1.635E-03	2.120E-04	2.851E-05	3.908E-06	5.416E-07	7.563E-08
5E01		1.611E-02	2.083E-03	2.929E-04	4.270E-05	6.349E-06	9.549E-07	1.447E-07
6E01		1.821E-02	2.495E-03	3.728E-04	5.779E-05	9.137E-06	1.462E-06	2.356E-07
7E01		2.004E-02	2.874E-03	4.506E-04	7.334E-05	1.218E-05	2.046E-06	3.463E-07
8E01		2.166E-02	3.225E-03	5.260E-04	8.909E-05	1.540E-05	2.694E-06	4.748E-07
9E01		2.312E-02	3.550E-03	5.987E-04	1.049E-04	1.875E-05	3.394E-06	6.190E-07
1E02	2.263E-01	2.443E-02	3.853E-03	6.687E-04	1.206E-04	2.220E-05	4.138E-06	7.771E-07
2E02		3.329E-02	6.092E-03	1.246E-03	2.657E-04	5.790E-05	1.278E-05	2.845E-06
3E02		3.846E-02	7.552E-03	1.671E-03	3.870E-04	9.163E-05	2.199E-05	5.323E-06
4E02		4.207E-02	8.630E-03	2.007E-03	4.899E-04	1.223E-04	3.097E-05	7.911E-06
5E02		4.481E-02	9.481E-03	2.285E-03	5.790E-04	1.503E-04	3.954E-05	1.050E-05
6E02		4.699E-02	1.018E-02	2.521E-03	6.576E-04	1.758E-04	4.767E-05	1.305E-05
7E02		4.881E-02	1.078E-02	2.726E-03	7.280E-04	1.993E-04	5.538E-05	1.553E-05
8E02		5.035E-02	1.129E-02	2.907E-03	7.917E-04	2.212E-04	6.269E-05	1.794E-05
9E02		5.169E-02	1.174E-02	3.070E-03	8.499E-04	2.415E-04	6.965E-05	2.028E-05
1E03	3.586E-01	5.286E-02	1.215E-02	3.217E-03	9.035E-04	2.606E-04	7.629E-05	2.255E-05
2E03		6.009E-02	1.474E-02			4.052E-04		
3E03						5.037E-04		
5E03		6.823E-02	1.791E-02			6.393E-04		
7E03						7.341E-04		
1E04	4.319E-01	7.332E-02	2.003E-02	6.491E-03	2.283E-03	8.378E-04	3.146E-04	1.197E-04

3.3.4 Polynomgrad $q = 3$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	2.832E-02	1.108E-03	5.920E-05	3.513E-06	2.191E-07	1.406E-08	9.172E-10	6.055E-11
2E01		3.519E-03	2.850E-04	2.576E-05	2.451E-06	2.401E-07	2.394E-08	2.415E-09
3E01		5.816E-03	5.666E-04	6.180E-05	7.109E-06	8.419E-07	1.015E-07	1.239E-08
4E01		7.856E-03	8.559E-04	1.047E-04	1.352E-05	1.799E-06	2.437E-07	3.342E-08
5E01		9.663E-03	1.138E-03	1.508E-04	2.111E-05	3.046E-06	4.478E-07	6.663E-08
6E01		1.128E-02	1.407E-03	1.981E-04	2.948E-05	4.524E-06	7.072E-07	1.136E-07
7E01		1.273E-02	1.663E-03	2.457E-04	3.837E-05	6.182E-06	1.015E-06	1.687E-07
8E01		1.405E-02	1.906E-03	2.928E-04	4.759E-05	7.981E-06	1.364E-06	2.361E-07
9E01		1.526E-02	2.136E-03	3.392E-04	5.702E-05	9.891E-06	1.749E-06	3.132E-07
1E02	1.708E-01	1.637E-02	2.354E-03	3.847E-04	6.657E-05	1.189E-05	2.164E-06	3.991E-07
2E02		2.431E-02	4.076E-03	7.837E-04	1.602E-04	3.384E-05	7.296E-06	1.594E-06
3E02		2.927E-02	5.287E-03	1.100E-03	2.439E-04	5.596E-05	1.311E-05	3.114E-06
4E02		3.284E-02	6.219E-03	1.360E-03	3.177E-04	7.686E-05	1.899E-05	4.759E-06
5E02		3.562E-02	6.977E-03	1.581E-03	3.835E-04	9.638E-05	2.475E-05	6.447E-06
6E02		3.788E-02	7.614E-03	1.774E-03	4.427E-04	1.146E-04	3.032E-05	8.137E-06
7E02		3.978E-02	8.164E-03	1.944E-03	4.966E-04	1.317E-04	3.568E-05	9.811E-06
8E02		4.141E-02	8.647E-03	2.098E-03	5.462E-04	1.477E-04	4.083E-05	1.146E-05
9E02		4.283E-02	9.077E-03	2.236E-03	5.920E-04	1.628E-04	4.579E-05	1.307E-05
1E03	3.206E-01	4.410E-02	9.464E-03	2.364E-03	6.346E-04	1.771E-04	5.056E-05	1.465E-05
5E03		6.144E-02	1.536E-02	4.528E-03	1.446E-03	4.836E-04	1.662E-04	5.813E-05
1E04	4.119E-01	6.750E-02	1.770E-02	5.497E-03	1.857E-03	6.583E-04	2.404E-04	8.946E-05
5E04		7.823E-02	2.223E-02	7.566E-03	2.824E-03	1.112E-03	4.533E-04	1.890E-04
1E05	4.582E-01	8.159E-02	2.376E-02	8.328E-03	3.211E-03	1.310E-03	5.542E-04	2.401E-04
5E05		8.717E-02	2.643E-02	9.746E-03	3.983E-03	1.732E-03	7.848E-04	3.655E-04
1E06	4.805E-01	8.884E-02	2.726E-02	1.021E-02	4.252E-03	1.889E-03	8.761E-04	4.182E-04
5E06		9.155E-02	2.864E-02	1.101E-02	4.735E-03	2.186E-03	1.057E-03	5.288E-04
1E07	4.909E-01	9.234E-02	2.905E-02	1.125E-02	4.888E-03	2.284E-03	1.121E-03	5.695E-04

3.3.5 Polynomgrad $q = 4$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	1.340E-02	4.581E-04	2.246E-05	1.257E-06	7.517E-08	4.669E-09	2.971E-10	1.922E-11
2E01		1.802E-03	1.339E-04	1.141E-05	1.041E-06	9.871E-08	9.596E-09	9.485E-10
3E01		3.279E-03	2.931E-04	3.015E-05	3.323E-06	3.810E-07	4.480E-08	5.357E-09
4E01		4.696E-03	4.698E-04	5.419E-05	6.705E-06	8.634E-07	1.140E-07	1.532E-08
5E01		6.017E-03	6.509E-04	8.135E-05	1.091E-05	1.524E-06	2.184E-07	3.183E-08
6E01		7.240E-03	8.307E-04	1.103E-04	1.573E-05	5.268E-06	3.559E-07	5.518E-08
7E01		8.373E-03	1.007E-03	1.402E-04	2.099E-05	3.272E-06	5.236E-07	8.526E-08
8E01		9.426E-03	1.177E-03	1.706E-04	2.657E-05	4.313E-06	7.184E-07	1.218E-07
9E01		1.041E-02	1.343E-03	2.011E-04	3.239E-05	5.439E-06	9.372E-07	1.644E-07
1E02	1.308E-01	1.133E-02	1.502E-03	2.316E-04	3.839E-05	6.635E-06	1.177E-06	2.126E-07
2E02		1.823E-02	2.836E-03	5.148E-04	1.008E-04	2.061E-05	4.330E-06	9.262E-07
3E02		2.281E-02	3.836E-03	1.452E-03	1.603E-04	3.560E-05	8.125E-06	1.889E-06
4E02		2.621E-02	4.635E-03	9.593E-04	2.148E-04	5.028E-05	1.210E-05	2.969E-06
5E02		2.891E-02	5.301E-03	1.138E-03	2.645E-04	6.434E-05	1.610E-05	4.104E-06
6E02		3.114E-02	5.872E-03	1.297E-03	3.103E-04	7.772E-05	2.003E-05	5.262E-06
7E02		3.304E-02	6.371E-03	1.440E-03	3.526E-04	9.044E-05	2.388E-05	6.426E-06
8E02		3.468E-02	6.815E-03	1.569E-03	3.919E-04	1.025E-04	2.762E-05	7.585E-06
9E02		3.613E-02	7.214E-03	1.689E-03	4.287E-04	1.141E-04	3.126E-05	8.733E-06
1E03	2.889E-01	3.742E-02	7.576E-03	1.799E-03	4.633E-04	1.251E-04	3.479E-05	9.867E-06
5E03		5.589E-02	1.341E-02	3.794E-03	1.168E-03	3.786E-04	1.267E-04	4.336E-05
1E04	3.944E-01	6.264E-02	1.586E-02	4.751E-03	1.551E-03	5.336E-04	1.899E-04	6.912E-05
5E04		7.494E-02	2.080E-02	6.899E-03	2.507E-03	9.623E-04	3.830E-04	1.563E-04
1E05	4.496E-01	7.888E-02	2.253E-02	7.724E-03	2.909E-03	1.159E-03	4.795E-04	2.035E-04
5E05		8.549E-02	2.562E-02	9.305E-03	3.739E-03	1.597E-03	7.102E-04	3.248E-04
1E06	4.764E-01	8.749E-02	2.659E-02	9.837E-03	4.037E-03	1.766E-03	8.052E-04	3.780E-04
2E06		8.909E-02					8.942E-04	4.297E-04
3E06								4.587E-04
4E06		9.038E-02					9.756E-04	4.785E-04
5E06		9.074E-02	2.823E-02	1.076E-02	4.586E-03	2.093E-03	1.000E-03	4.935E-04
6E06							1.019E-03	
7E06							1.035E-03	
8E06							1.049E-03	
9E06							1.060E-03	
1E07	4.890E-01	9.170E-02	2.871E-02	1.105E-02	4.765E-03	2.205E-03	1.070E-03	5.374E-04

3.3.6 Polynomgrad $q = 5$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	6.439E-03	1.956E-04	8.846E-06	4.673E-07	2.676E-08	1.607E-09	9.957E-11	
2E01		9.515E-04	6.524E-05	5.249E-06	4.585E-07	4.204E-08		
3E01		1.902E-03	1.571E-04	1.526E-05	1.611E-06	1.786E-07		
4E01		2.885E-03	2.669E-04	2.909E-05	3.447E-06	4.293E-07		
5E01	5.935E-02	3.845E-03	3.852E-04	4.550E-05	5.847E-06	7.896E-07		
6E01		4.766E-03	5.070E-04	6.364E-05	8.693E-06	1.248E-06		
7E01		5.642E-03	6.294E-04	8.292E-05	1.189E-05	1.793E-06		
8E01		6.474E-03	7.511E-04	1.030E-04	1.537E-05	2.412E-06		
9E01		7.263E-03	8.711E-04	1.235E-04	1.906E-05			
1E02	1.011E-01	8.014E-03	9.889E-04	1.442E-04	2.292E-05	3.832E-06	6.618E-07	1.169E-07
2E02		1.393E-02	2.027E-03	3.491E-04	6.559E-05	1.297E-05		
3E02		1.807E-02	2.854E-03	5.334E-04	1.088E-04	2.338E-05		
4E02		2.124E-02	3.537E-03	6.966E-04	1.498E-04	3.395E-05		
5E02	2.150E-01	2.380E-02	4.119E-03	8.424E-04	1.882E-04	4.431E-05		
6E02		2.595E-02	4.626E-03	9.742E-04	2.241E-04			
7E02		2.779E-02	5.075E-03	1.094E-03	2.578E-04	6.405E-05		
8E02		2.941E-02	5.478E-03	1.205E-03	2.895E-04			
9E02		3.084E-02	5.844E-03	1.307E-03	3.195E-04			
1E03	2.617E-01	3.213E-02	6.179E-03	1.403E-03	3.479E-04	9.103E-05	2.466E-05	6.843E-06
2E03			8.528E-03		5.724E-04	1.636E-04		
3E03						2.193E-04		
5E03		5.120E-02	1.184E-02	3.234E-03	9.644E-04	3.037E-04		
7E03						3.676E-04		
1E04	3.786E-01	5.846E-02	1.434E-02	4.164E-03	1.320E-03	4.422E-04	1.536E-04	5.477E-05
5E04		7.202E-02	1.958E-02	6.346E-03				
1E05	4.418E-01	7.645E-02	2.146E-02	7.214E-03	2.662E-03		4.217E-04	1.758E-04
5E05		8.397E-02	2.489E-02	8.921E-03				
1E06	4.726E-01	8.626E-02	2.599E-02	9.509E-03	3.853E-03		7.471E-04	
5E06	4.839E-01	9.000E-02	2.785E-02					
1E07	4.872E-01	9.110E-02	2.841E-02	1.088E-02	4.655E-03			

3.3.7 Polynomgrad $q = 6$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
1E01	3.127E-03	8.560E-05	3.588E-06	1.792E-07	9.827E-09	5.703E-10	3.435E-11
2E01		5.137E-04	3.270E-05	2.489E-06	2.082E-07	1.845E-08	
3E01		1.127E-03	8.657E-05	7.959E-06	8.050E-07	8.625E-08	
4E01		1.808E-03	1.558E-04	1.608E-05	1.826E-06	2.198E-07	
5E01		2.505E-03	2.339E-04	2.618E-05	3.226E-06	4.212E-07	
6E01		3.195E-03				6.868E-07	
7E01		3.870E-03	4.034E-04	5.041E-05	6.934E-06	1.011E-06	
8E01		4.523E-03				1.388E-06	
9E01		5.155E-03				1.811E-06	
1E02	7.866E-02	5.763E-03	6.662E-04	9.229E-05	1.408E-05	2.276E-06	
2E02		1.079E-02	1.479E-03	2.427E-04	4.382E-05	8.391E-06	
3E02						1.577E-05	
4E02						2.352E-05	
5E02		1.980E-02	3.254E-03	6.369E-04	1.371E-04	3.130E-05	
6E02						3.897E-05	
7E02		2.361E-02				4.648E-05	
8E02						5.379E-05	
9E02						6.089E-05	
1E03	2.379E-01	2.782E-02	5.110E-03	1.114E-03	2.669E-04	6.780E-05	
2E03		3.623E-02	7.316E-03	1.749E-03	4.585E-04	1.274E-04	
3E03						1.747E-04	
4E03						2.142E-04	
5E03		4.715E-02	1.055E-02	2.792E-03	8.088E-04	2.482E-04	
6E03						2.782E-04	
7E03						3.051E-04	
8E03						3.294E-04	
9E03						3.518E-04	
1E04	3.643E-01	5.478E-02	1.307E-02	3.689E-03	1.139E-03	3.724E-04	

3.3.8 Polynomgrad $q = 7$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
1E01	1.531E-03	3.816E-05	1.490E-06	7.049E-08	3.704E-09	2.077E-10	1.216E-11
2E01	7.531E-03	2.822E-04	1.677E-05	1.210E-06	9.703E-08	8.308E-09	7.432E-10
3E01	1.506E-02	6.788E-04	4.874E-05	4.252E-06	4.125E-07	4.272E-08	4.623E-09
4E01	2.276E-02	1.150E-03	9.281E-05	9.097E-06	9.914E-07	1.154E-07	1.403E-08
5E01	3.021E-02	1.656E-03	1.450E-04	1.542E-05	1.824E-06	2.303E-07	3.038E-08
6E01		2.173E-03				3.872E-07	5.434E-08
7E01	4.390E-02	2.691E-03	2.636E-04	3.134E-05	4.141E-06	5.841E-07	8.609E-08
8E01		3.203E-03				8.180E-07	1.255E-07
9E01		3.706E-03				1.086E-06	1.724E-07
1E02	6.153E-02	4.197E-03	4.571E-04	6.033E-05	8.846E-06	1.384E-06	2.264E-07
2E02	1.033E-01	8.443E-03	1.097E-03	1.720E-04	2.991E-05	5.550E-06	1.076E-06
3E02	1.310E-01	1.173E-02		2.844E-04		1.087E-05	2.291E-06
4E02		1.439E-02		3.905E-04		1.664E-05	3.702E-06
5E02	1.675E-01	1.661E-02	2.604E-03	4.895E-04	1.018E-04	2.256E-05	5.220E-06
6E02		1.853E-02				2.850E-05	6.798E-06
7E02	1.917E-01	2.020E-02	3.359E-03	6.683E-04		3.439E-05	8.406E-06
8E02		2.169E-02				4.019E-05	1.003E-05
9E02		2.303E-02				4.588E-05	1.165E-05
1E03	2.169E-01	2.425E-02	4.272E-03	8.981E-04	2.084E-04	5.146E-05	1.326E-05
2E03	2.633E-01	3.254E-02	6.332E-03	1.464E-03	3.728E-04	1.009E-04	2.850E-05
3E03	2.882E-01	3.747E-02				1.414E-04	4.186E-05
4E03		4.094E-02				1.758E-04	5.367E-05
5E03	3.169E-01	4.359E-02	9.465E-03	2.433E-03	6.868E-04	2.058E-04	6.429E-05
6E03		4.573E-02				2.325E-04	7.394E-05
7E03	3.342E-01	4.750E-02		2.841E-03	8.288E-04	2.566E-04	8.281E-05
8E03		4.902E-02				2.787E-04	
9E03		5.034E-02				2.989E-04	
1E04	3.510E-01	5.150E-02	1.197E-02	3.294E-03	9.935E-04	3.178E-04	1.059E-04

3.3.9 Polynomgrad $q = 8$

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6
1E01		1.727E-05	6.309E-07	2.834E-08	1.428E-09	7.737E-11	4.403E-12
2E01		1.572E-04	8.756E-06			3.825E-09	3.326E-10
3E01			2.793E-05			2.163E-08	
4E01			5.626E-05			6.188E-08	
5E01		1.108E-03	9.137E-05			1.286E-07	
7E01			1.750E-04			3.446E-07	
1E02		3.088E-03	3.183E-04			8.593E-07	
2E02		6.666E-03	8.236E-04			3.741E-06	
3E02			1.296E-03			7.626E-06	
4E02						1.198E-05	
5E02		1.403E-02	2.106E-03			1.654E-05	
6E02						2.120E-05	
7E02			2.776E-03			2.587E-05	
8E02						3.052E-05	
9E02						3.512E-05	
1E03		2.126E-02	3.603E-03			3.966E-05	
2E03		2.935E-02	5.522E-03			8.105E-05	
3E03						1.159E-04	
4E03						1.461E-04	
5E03		4.044E-02	8.538E-03			1.727E-04	
6E03						1.966E-04	
7E03			9.730E-03			2.183E-04	
1E04		4.855E-02	1.102E-02			2.739E-04	

4 Approximation der Funktion $\exp(-\lambda\sqrt{x})/\sqrt{x}$

Nach Substitution von x durch $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ ($\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$) ergibt sich die Funktion $\exp(-\lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|)/\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, die bis auf den Faktor $1/4\pi$ die Fundamentallösung von $\Delta - \lambda^2$ ($\lambda > 0$) darstellt.

Im Folgenden werden Exponentialentwicklungen für die Funktion $\exp(-\sqrt{x})/\sqrt{x}$ (d.h. für $\lambda = 1$) angegeben, die im Intervall $[a,\infty)$ eine Bestapproximation darstellen. Die Umrechnung auf $\exp(-\lambda\sqrt{x})/\sqrt{x}$ mit $\lambda \neq 0$ lautet wie folgt.

Bemerkung 4.1 *Sei* $E^*_{k,A,\lambda}(x) = \sum_{j=1}^k \omega_{j,A,\lambda}\exp(-\alpha_{j,A,\lambda}x)$ *die Bestapproximation von* $\exp(-\lambda\sqrt{x})/\sqrt{x}$ *auf* $[A,\infty)$ *mit* $A > 0$ *und dem Fehler* $\varepsilon_{k,A,\lambda}$. *Die Koeffizienten ergeben sich als*

$$\omega_{j,A,\lambda} = \lambda\omega_{j,A\lambda^2,1}, \qquad \alpha_{j,A,\lambda} = \lambda^2\alpha_{j,A\lambda^2,1} \qquad (1 \leq j \leq k),$$

wobei $\omega_{j,A\lambda^2,1}$ *und* $\alpha_{j,A\lambda^2,1}$ *zu* $\lambda = 1$ *(d.h.* $\exp(-\sqrt{x})/\sqrt{x}$*) und dem Intervall* $[a,\infty)$ *mit* $a = A\lambda^2$ *gehören. Die Beziehung zwischen den Fehlern ist*

$$\varepsilon_{k,A,\lambda} = \lambda\,\varepsilon_{k,A\lambda^2,1}.$$

Die Fehler $\varepsilon_{k,a,1}$ sind in den nachfolgenden Tabellen für verschiedene k, a angegeben.

a	$k=1$	2	3	4	5	6	7
1.0000	1.897E-02	2.299E-03	3.648E-04	6.726E-05	1.370E-05	3.003E-06	6.967E-07
0.5000	4.292E-02	5.934E-03	1.061E-03	2.181E-04	4.920E-05	1.187E-05	3.019E-06
0.3000	7.299E-02	1.100E-02	2.126E-03	4.700E-04	1.135E-04	2.919E-05	7.892E-06
0.2000	1.075E-01	1.724E-02	3.529E-03	8.224E-04	2.087E-04	5.629E-05	1.592E-05
0.1000	1.966E-01	3.471E-02	7.757E-03	1.963E-03	5.382E-04	1.563E-04	4.744E-05
0.0500	1.801E-01	6.510E-02	1.572E-02	4.278E-03	1.257E-03	3.899E-04	1.261E-04

a	$k=8$	9
1.0000	1.692E-07	4.268E-08
0.5000	8.005E-07	2.198E-07
0.3000	2.220E-06	6.452E-07
0.2000	4.676E-06	1.417E-06
0.1000	1.492E-05	4.830E-06
0.0500	4.216E-05	1.449E-05

5 Approximation der Funktion $\sqrt{x}$

5.1 Normierung auf $[r, 1]$

Sei $\sqrt{x} \approx E^*_{k,[A,B]}(x) = \sum_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]}x)$ die Bestapproximation auf $[A, B] \subset [0, \infty)$. Die Substitution $x = Bt$ $(A/B \le t \le 1)$ zeigt die Transformationsregeln

$$\omega_{j,[A,B]} = \sqrt{B}\omega_{j,[A/B,1]}, \qquad \alpha_{j,[A,B]} := \frac{1}{B}\alpha_{j,[A/B,1]}, \qquad \varepsilon_{j,[A,B]} = \sqrt{B}\varepsilon_{j,[A/B,1]}.$$

Für A/B wird der Parameter r verwendet. Der Hintergrund für die Wahl von $[r, 1]$ statt $[1, R]$ als Referenzintervall ist die Tatsache, dass die Approximierende für den Grenzfall $r \to 0$ (aber nicht für $R \to \infty$) existiert.

Die reine Exponentialsummenapproximation ergibt Ausdrücke (1.1) mit $\alpha_1 < 0$, aber $\alpha_i > 0$ für alle $2 \le i \le k$. Es ergeben sich die folgenden Fehler in $[r, 1]$.

Tabelle zur Approximation von $\sqrt{x}$ für $1 \le k \le 7$.

r	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
0.0	2.100E-01	2.999E-02	8.119E-03	2.893E-03	1.201E-03	5.511E-04	2.720E-04
1E-3		2.240E-02	4.216E-03	9.351E-04			
2E-3		1.996E-02	3.382E-03	6.732E-04			
3E-3		1.830E-02	2.884E-03	5.334E-04			
4E-3		1.702E-02	2.534E-03	4.425E-04			
5E-3		1.598E-02	2.268E-03	3.775E-04			
6E-3		1.510E-02	2.056E-03	3.282E-04			
7E-3		1.434E-02	1.881E-03	2.893E-04			
8E-3		1.366E-02	1.733E-03	2.578E-04			
9E-3		1.306E-02	1.607E-03	2.317E-04			
1E-2	1.624E-01	1.252E-02	1.497E-03	2.097E-04	3.171E-05	5.028E-06	8.230E-07
2E-2	1.449E-01	8.928E-03	8.597E-04	9.688E-05			
3E-2	1.322E-01	6.904E-03	5.694E-04	5.491E-05			
4E-2	1.222E-01	5.561E-03	4.040E-04	3.431E-05			
5E-2	1.137E-01	4.593E-03	2.989E-04	2.274E-05			
6E-2	1.063E-01	3.860E-03	2.276E-04	1.569E-05			
7E-2	9.985E-02	3.286E-03	1.770E-04	1.115E-05			
8E-2	9.405E-02	2.825E-03	1.398E-04	8.099E-06			
9E-2	8.880E-02	2.449E-03	1.119E-04	5.989E-06			
1E-1	8.400E-02	2.136E-03	9.052E-05	4.494E-06	2.418E-07	1.366E-08	7.967E-10
2E-1	5.117E-02	6.645E-04	1.489E-05	3.931E-07			
3E-1	3.244E-02	2.399E-04	3.114E-06	4.784E-08			
4E-1	2.046E-02	8.842E-05	6.777E-07	6.161E-09			
5E-1	1.248E-02	3.103E-05	1.376E-07	7.253E-10			
6E-1	7.132E-03	9.658E-06	2.343E-08				
7E-1	3.625E-03	2.398E-06	2.848E-09				
8E-1	1.470E-03	3.809E-07	1.775E-10				
9E-1	3.378E-04	1.953E-08	2.031E-12				

Tabelle zur Approximation von $\sqrt{x}$ für $8 \leq k \leq 14$.

r	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
0.0	1.420E-04	7.752E-05	4.391E-05	2.565E-05	1.539E-05	9.450E-06	5.920E-06
1E-6		4.083E-05					
1E-5		2.181E-05					
1E-4		7.292E-06					
1E-3		1.034E-06					
1E-2	1.378E-07	2.348E-08					
2E-2		3.684E-09					
3E-2		9.632E-10					
4E-2		3.200E-10					
5E-2		1.227E-10					
6E-2		5.183E-11					
7E-2		2.349E-11					
8E-2		1.123E-11					
1E-1	4.757E-11	2.890E-12					

r	$k = 15$	16	17	18	19	20	21
0.0	3.776E-06	2.448E-06	1.610E-06	1.073E-06	7.235E-07	4.933E-07	3.399E-07

r	$k = 22$	23	24	25	26	27	28
0.0	2.363E-07	1.658E-07	1.173E-07	8.357E-08	5.999E-08	4.335E-08	3.153E-08

r	$k = 29$	30	31	32	33	34	35
0.0	2.306E-08	1.697E-08	1.255E-08	9.334E-09	6.974E-09	5.235E-09	3.947E-09
1E-16							3.603E-09
1E-15							3.237E-09
1E-14							2.706E-09
1E-13							2.061E-09
2E-13							1.858E-09
3E-13							1.739E-09
4E-13							1.656E-09
5E-13							1.591E-09
1E-12							1.395E-09
5E-12							1.169E-09

5.2 Nichtstandard-Approximation in $I = [0, 1]$

Die bisherige Approximation erhält die Nullstelle von $\sqrt{x}$ bei $x = 0$ nicht. Diese Eigenschaft lässt sich erzwingen durch den Ansatz

$$\sqrt{x} \approx xE_k(x) = x \times \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_j \exp(-\alpha_j x),$$

der zu Lösungen mit $\omega_j, \alpha_j > 0$ für alle $1 \leq j \leq k$ führt.

Die Transformation $x = Bt$ von $t \in [0, 1]$ auf $x \in [0, B]$ beweist die Umformung

$$\omega_{j,[0,B]} = \frac{1}{\sqrt{B}} \omega_{j,[0,1]}, \qquad \alpha_{j,[0,B]} = \frac{1}{B} \alpha_{j,[0,1]}, \qquad \varepsilon_{j,[0,B]} = \sqrt{B} \varepsilon_{j,[0,1]}.$$

Die Fehler in $[0, 1]$ sind:

$k = 1$	2	3	4	5	6	7
9.241E-02	2.952E-02	1.167E-02	5.255E-03	2.583E-03	1.353E-03	7.443E-04

$k = 8$	9	10	11	12	13	14
4.259E-04	2.517E-04	1.528E-04	9.503E-05	6.030E-05	3.896E-05	2.558E-05

$k = 15$	16	17	18	19	20	21
1.704E-05	1.149E-05	7.848E-06	5.416E-06	3.775E-06	2.656E-06	1.884E-06

$k = 22$	23	24	25	26	27	28
1.347E-06	9.708E-07	7.042E-07	5.142E-07	3.778E-07	2.792E-07	2.074E-07

$k = 29$	30	31	32	33	34	35
1.549E-07	1.163E-07	8.766E-08	6.640E-08	5.050E-08	3.857E-08	2.957E-08

$k = 36$	37	38	39	40	41	42	43
2.276E-08	1.758E-08	1.362E-08	1.059E-08	8.260E-09	6.463E-09	5.071E-09	3.991E-09

Verzichtet man auf die exakte Nullstelle der Approximation bei $x = 0$, ist die folgende Approximation ($\alpha = 1/2$) günstiger.

6 Approximation der Funktion x^α in $I = [0, 1]$

Die Funktion x^α $(0 < \alpha < 1)$ in $[0, 1]$ kann in Exponentialsummen entwickelt werden, wenn mindestens der konstante Term auftritt (d.h., $q \geq 0$).

Polynomgrad $q = 0$

α	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
0.2	1.366E-01	5.665E-02	2.778E-02	1.528E-02	9.052E-03	5.644E-03	3.655E-03
0.3	1.026E-01	3.397E-02	1.463E-02	7.165E-03	3.825E-03	2.171E-03	1.291E-03
0.4	7.398E-02	2.089E-02	7.910E-03	3.481E-03	1.689E-03	8.798E-04	4.837E-04
0.5	5.218E-02	1.275E-02	4.292E-03	1.709E-03	7.602E-04	3.662E-04	1.875E-04
0.6	3.573E-02	7.603E-03	2.285E-03	8.278E-04	3.394E-04	1.521E-04	7.296E-05
0.7105	2.205E-02	4.027E-03	1.071E-03	3.518E-04	1.326E-04	5.516E-05	2.470E-05
0.8	1.351E-02	2.173E-03	5.249E-04	1.598E-04	5.645E-05	2.216E-05	9.414E-06
0.9	5.951E-03	8.264E-04	1.797E-04	5.037E-05	1.659E-05	6.120E-06	2.459E-06

α	$k = 8$	9	10	11
0.2	2.437E-03	1.662E-03	1.155E-03	8.147E-04
0.3	7.968E-04	5.067E-04	3.304E-04	2.201E-04
0.4	2.776E-04	1.650E-04	1.010E-04	6.336E-05
0.5	1.007E-04	5.630E-05	3.251E-05	1.931E-05
0.6	3.688E-05	1.947E-05	1.066E-05	6.018E-06
0.7105	1.173E-05	5.839E-06	3.025E-06	1.621E-06
0.8	4.258E-06	2.027E-06	1.006E-06	5.186E-07
0.9	1.056E-06	4.792E-07	2.276E-07	1.123E-07

Anmerkung: Aus technischen Gründen wird die Bestimmung des Maximums nur über das Intervall [1E-16,1] durchgeführt, sodass die Maxima über [0,1] größer ausfallen können.

7 Approximation der Funktion $\exp(-\sqrt{x})$

Die Funktion $\exp(-\sqrt{t})$ eignet sich für das Einsetzen von $t = \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$:

$$\exp(-\|\mathbf{x}\|) \approx \sum\nolimits_{j=1}^k \omega_j \exp\left(-\alpha_j \sum_{i=1}^d x_i^2\right).$$

Die Funktion $\exp(-\sqrt{x})$ ist in $[0, \infty]$ stetig, ist aber in $x = 0$ nicht analytisch.

Die Approximation wird in $[0, R]$ wie auch in $[A, B]$ für $A > 0$ vorgenommen (eine Normierung auf ein Referenzintervall ist nicht möglich).

Im Folgenden werden verschiedene Gewichtsfunktionen verwendet.

7.1 Approximation in $[0, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

Fehler sind für $0 \leq k \leq 40$ und verschiedene $R \in \{1, 2, \ldots, 300\}$ den folgenden Tabellen zu entnehmen:

R	$k = 1$	2	3	4	5	6
1E00	8.664E-02	1.936E-02	6.114E-03	2.331E-03	1.007E-03	4.744E-04
2E00	1.042E-01	2.471E-02	8.023E-03	3.107E-03	1.354E-03	6.421E-04
3E00	1.103E-01	2.792E-02	9.261E-03	3.629E-03	1.593E-03	7.596E-04
4E00	1.107E-01	3.005E-02	1.016E-02	4.023E-03	1.777E-03	8.511E-04
5E00	.	3.150E-02	1.085E-02	4.335E-03	1.927E-03	9.261E-04
7E00	.	3.294E-02	1.181E-02	4.803E-03	2.157E-03	1.044E-03
8E00	.	3.306E-02				
1E01	.	.	1.259E-02	5.262E-03	2.397E-03	1.172E-03
2E01	.	.	1.281E-02	5.708E-03	2.758E-03	1.392E-03
3E01	.	.	.	.	2.784E-03	1.450E-03
4E01	.	.	.	.	.	.

R	$k = 7$	8	9	10	11	12	13
1E00	2.387E-04	1.265E-04	6.983E-05	3.992E-05	2.350E-05	1.419E-05	8.759E-06
2E00	3.247E-04	1.726E-04	9.562E-05	5.480E-05	3.233E-05	1.955E-05	1.209E-05
3E00	3.855E-04	2.056E-04	1.141E-04	6.554E-05	3.873E-05	2.346E-05	1.452E-05
4E00	4.334E-04	2.317E-04	1.289E-04	7.413E-05	4.387E-05	2.660E-05	1.648E-05
5E00	4.729E-04	2.534E-04	1.412E-04	8.136E-05	4.820E-05	2.926E-05	1.815E-05
7E00	5.360E-04	2.884E-04	1.612E-04	9.313E-05	5.530E-05	3.363E-05	2.089E-05
1E01	6.056E-04	3.275E-04	1.839E-04	1.066E-04	6.348E-05	3.871E-05	2.410E-05
2E01	7.346E-04	4.033E-04	2.291E-04	1.341E-04	8.048E-05	4.941E-05	3.094E-05
3E01	7.868E-04	4.393E-04	2.524E-04	1.490E-04	9.005E-05	5.560E-05	3.499E-05
4E01	7.938E-04	4.523E-04	2.640E-04	1.574E-04	9.584E-05	5.951E-05	3.762E-05
5E01		4.525E-04	2.666E-04	1.612E-04	9.910E-05	6.195E-05	3.936E-05
6E01				1.615E-04	1.002E-04	6.322E-05	4.043E-05
7E01						6.343E-05	4.089E-05
8E01							4.091E-05

R	$k = 14$	15	16	17	18	19	20
8E01	2.681E-05	1.781E-05	1.194E-05	8.081E-06	5.524E-06	3.811E-06	2.652E-06
9E01	.	1.783E-05					
1E02	.	.	1.202E-05	8.194E-06	5.645E-06	3.917E-06	2.739E-06
2E02	.	.	.	.	5.649E-06	3.934E-06	2.765E-06

R	$k = 21$	22	23	24	25	26	27
2E02	1.960E-06	1.400E-06	1.008E-06	7.308E-07	5.333E-07	3.915E-07	2.891E-07

R	$k=28$	29	30	31	32	33	34
2E02	2.147E-07	1.603E-07	1.202E-07	9.060E-08	6.859E-08	5.213E-08	3.975E-08
3E02						5.215E-08	3.981E-08

R	$k=35$	36	37	38	39	40
3E02	3.051E-08	2.347E-08	1.812E-08	1.404E-08	1.091E-08	8.507E-09

7.2 Approximation in $[0, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = \sqrt{x}$

Beim Einsetzen von $t = \|\mathbf{x}\|^2$ in $\exp(-\sqrt{t})$ bedeutet das Gewicht $\gamma(t) = \sqrt{t}$, dass

$$\left[\exp(-\|\mathbf{x}\|) - \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_j \exp\left(-\alpha_j \sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\right] \|\mathbf{x}\|$$

in $\|\mathbf{x}\| \in [0, R]$ minimiert wird.

Die Fehler lauten:

R	$k=5$	6
50	8.063E-04	3.326E-04
60	8.298E-04	3.517E-04
70	8.307E-04	3.618E-04
80	.	3.634E-04

R	$k=7$	8	9	10	11	12	13
70	1.623E-04	7.534E-05	3.620E-05	1.796E-05	9.168E-06	4.804E-06	2.576E-06
80	1.668E-04	7.846E-05	3.803E-05	1.899E-05	9.745E-06	5.129E-06	2.761E-06
90	1.681E-04	8.049E-05	3.941E-05	1.982E-05	1.023E-05	5.405E-06	2.920E-06
100	.	8.141E-05	4.037E-05	2.046E-05	1.062E-05	5.637E-06	3.057E-06
200	.	8.145E-05	4.100E-05	2.132E-05	1.141E-05	6.258E-06	3.509E-06

R	$k=14$	15	16	17	18	19	20
200	2.007E-06	1.169E-06	6.893E-07	4.104E-07	2.470E-07	1.502E-07	9.227E-08
300	.	.	6.916E-07	4.154E-07	2.529E-07	1.559E-07	9.725E-08

R	$k=21$	22	23	24	25
3E02	6.132E-08	3.905E-08			
4E02	.	.	2.511E-08	1.629E-08	1.065E-08

7.3 Approximation in $[0, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = x^{1/4}$

Beim Einsetzen von $t = \|\mathbf{x}\|^2$ in $\exp(-\sqrt{t})$ bedeutet das Gewicht $\gamma(t) = t^{1/4}$, dass

$$\left[\exp(-\|\mathbf{x}\|) - \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_j \exp\left(-\alpha_j \sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\right] \sqrt{\|\mathbf{x}\|}$$

in $\|\mathbf{x}\| \in [0, R]$ minimiert wird.

Die Fehler lauten:

R	$k=5$	6
5E01	1.210E-03	
6E01		5.722E-04

R	$k=7$	8	9	10	11	12	13
7E01	2.855E-04						
8E01		1.488E-04	8.038E-05				
1E02				4.477E-05			
2E02					2.560E-05	1.498E-05	8.945E-06

R	$k=14$	15	16	17	18	19	20
2E02	5.440E-06	3.363E-06	2.110E-06	1.342E-06	8.641E-07	5.628E-07	3.704E-07

7.4 Approximation in $[0.1, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

Da keine Normierung auf einen Anfangspunkt r im Intervall $I = [r, R]$ möglich ist, wird hier alternativ $r = 0.1$ gewählt. Fehler sind für $0 \leq k \leq 13$ und verschiedene $R \in \{5, \dots, 300\}$ den folgenden Tabellen zu entnehmen:

R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
5E00		6.686E-03	8.098E-04				
6E00	5.678E-02						
1E01	.	9.693E-03	1.553E-03	2.530E-04	4.232E-05	7.217E-06	
2E01	.	1.034E-02	2.262E-03	4.638E-04	9.475E-05	1.957E-05	
3E01	.	.	2.344E-03	5.713E-04	1.315E-04		
4E01	.	.	.	5.980E-04	1.540E-04		
5E01	.	.	.	.	1.642E-04	4.357E-05	
6E01	.	.	.	.	1.648E-04		
7E01	.	.	.	.	.	4.804E-05	
9E01	.	.	.	.	.	.	1.462E-05

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
1E02	4.571E-06	1.386E-06	4.138E-07	1.229E-07	3.647E-08	1.081E-08	3.206E-09
2E02	4.608E-06	1.494E-06	4.967E-07	1.686E-07	5.829E-08	1.992E-08	6.687E-09
3E02	.	.	.	.	5.831E-08	2.050E-08	7.311E-09

7.5 Approximation in $[0.2, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
1E02							7.108E-10

7.6 Approximation in $[0.5, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
1E02							5.805E-11

7.7 Approximation in $[0.7, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

R	$k = 8$	9	10	11	12	13	14
1E02							1.911E-11

7.8 Approximation in $[1, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

Die Fehler sind für $0 \leq k \leq 13$ und verschiedene $R \in \{2, \dots, 400\}$ den folgenden Tabellen zu entnehmen:

R	$k = 1$	2	3	4	5	6	7
2E00	2.680E-03						
5E00	1.229E-02	3.526E-04	1.054E-05				
1E01	1.823E-02	1.153E-03	6.776E-05	4.065E-06	2.483E-07	1.538E-08	9.632E-10
2E01	1.831E-02	2.107E-03					
3E01	.	2.234E-03					
5E01	.	.	3.561E-04	6.020E-05	9.211E-06	1.383E-06	2.068E-07
7E01	.	.	.	6.585E-05			
9E01	.	.	.	.	1.344E-05		
1E02	.	.	.	.	.	2.843E-06	5.612E-07
2E02	.	.	.	.	.	2.951E-06	6.855E-07

R	$k=8$	9	10	11	12	13	14
1E02	1.083E-07	2.071E-08	3.946E-09	7.500E-10	1.423E-10	2.697E-11	5.108E-12
2E02	1.666E-07	4.184E-08	1.011E-08	2.379E-09	5.538E-10	1.282E-10	2.953E-11
3E02	.	4.208E-08	1.097E-08	2.943E-09	7.978E-10	2.091E-10	5.386E-11
4E02	.	.	.	.	8.089E-10	2.272E-10	6.500E-11
5E02	.	.	.	.	.	.	6.508E-11

7.9 Approximation in $[2, R]$ mit dem Gewicht $\gamma = 1$

R	$k=1$	2	3	4	5	6	7
1E01	9.266E-03		9.465E-06	3.076E-07	1.013E-08	3.376E-10	1.136E-11
2E01	.	8.136E-04	5.255E-05		2.127E-07	1.361E-08	8.744E-10
3E01	.	1.039E-03	9.668E-05				
4E01	.	1.048E-03	1.280E-04				
5E01	.	.	1.438E-04	1.771E-05	2.052E-06	2.348E-07	2.674E-08
6E01	.	.	1.457E-04				
9E01	.	.	.	2.379E-05			
1E02	.	.	.	.	4.262E-06	7.043E-07	1.116E-07
2E02	.	.	.	.	4.327E-06	8.520E-07	1.785E-07

R	$k=8$	9
1E02	1.744E-08	2.705E-09
2E02	3.897E-08	8.091E-09
3E02	3.930E-08	9.023E-09

8 Approximation der Funktion $\log(x)$

8.1 Normierung des Intervalles

Im Folgenden wird der Ansatz (1.3) verwendet, wobei mindestens der Polynomgrad $q = 0$ vorliegen soll, d.h. der Exponentialsummenansatz ist mindestens um die konstante Funktion ergänzt.

Ist

$$\log(x) \approx \sum_{i=0}^{q} \beta_{i,[A,B]} x^i + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]} x) \qquad \text{in } [A,B]$$

die Bestapproximation, so liefert die Transformation $x = At$ $(1 \le t \le B/A)$

$$\begin{aligned} \log(t) &\approx -\log(A) + \sum_{i=0}^{q} \beta_{i,[A,B]} A^i t^i + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[A,B]} \exp(-\alpha_{j,[A,B]} At) \\ &= \sum_{i=0}^{q} \beta_{i,[1,B/A]} t^i + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \omega_{j,[1,B/A]} \exp(-\alpha_{j,[1,B/A]} t) \qquad \text{in } [1, B/A]. \end{aligned}$$

Damit lauten die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} &\beta_{0,[A,B]} = \beta_{0,[1,B/A]} + \log(A), && \beta_{i,[A,B]} = A^{-i} \beta_{i,[1,B/A]} \quad (1 \le i \le q)\,, \\ &\omega_{j,[A,B]} = \omega_{j,[1,B/A]}, && \alpha_{j,[A,B]} = \tfrac{1}{A} \alpha_{j,[1,B/A]}, \\ &\varepsilon_{j,[A,B]} = \varepsilon_{j,[1,B/A]}, \end{aligned}$$

und jedes Intervall $[A, B] \subset (0, \infty)$ lässt sich auf $[1, R]$ zurückführen.

Ausgeschlossen von der vorherigen Betrachtung ist das Intervall $[0, R]$, das nur in Verbindung mit einer Gewichtsfunktion γ verwendet werden kann, für die $\gamma(x) \log(x) \to 0$ $(x \to 0)$ gilt (vgl. §8.4).

8.2 Approximation von $\log(x)$ in $[1, R]$ mit $\gamma = 1$

Wie oben bemerkt, ist $q \ge 0$ notwendig, um auf $[1, R]$ als Referenzintervall zu transformieren.

8.2.1 Polynomgrad $q = 1$

Die Wahl $q = 1$ scheint sich stabilisierend auf die Exponentialsummenapproximation auszuwirken. Die Fehler lauten

R	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
1E01	3.095E-01	1.490E-02	8.248E-04	4.877E-05	2.987E-06	1.869E-07	1.187E-08	7.625E-10
2E01	5.025E-01	3.737E-02	3.154E-03	2.853E-04	2.671E-05	2.556E-06	2.483E-07	2.438E-08
5E01	8.038E-01	8.809E-02	1.100E-02	1.468E-03	2.030E-04	2.869E-05	4.115E-06	5.966E-07
1E02	1.057E+00	1.423E-01	2.216E-02	3.665E-03	6.287E-04	1.102E-04	1.961E-05	3.528E-06
1E03	1.991E+00	4.058E-01	1.009E-01	2.642E-02	7.150E-03	1.980E-03	5.567E-04	1.582E-04
1E04	2.995E+00						3.806E-03	1.401E-03
1E05	4.035E+00							5.806E-03

R	$k=8$	9	10	11	12	13	14
1E01	4.936E-11						
2E01	2.414E-09						
5E01	8.722E-08						
1E02	6.398E-07	1.168E-07	2.143E-08	3.948E-09	7.301E-10		
1E03	4.533E-05	1.307E-05	3.789E-06	1.103E-06	3.222E-07	9.442E-08	2.774E-08
1E04	5.198E-04	1.941E-04	7.287E-05	2.747E-05	1.039E-05	3.944E-06	1.501E-06
1E05	2.544E-03	1.122E-03	4.973E-04	2.214E-04	9.892E-05	4.433E-05	1.992E-05
1E06	7.802E-03	3.863E-03	1.923E-03	9.613E-04	4.823E-04	2.427E-04	1.224E-04
1E07			5.262E-03	2.865E-03	1.565E-03	8.580E-04	4.715E-04
1E08			1.148E-02	6.674E-03	3.894E-03	2.279E-03	1.337E-03
1E09			2.143E-02	1.312E-02	8.061E-03	4.968E-03	3.071E-03
1E10							6.057E-03

8.2.2 Polynomgrad $q = 0$

Die Wahl $q = 0$ ist möglich:

R	$k=1$	2
1E01	5.674E-02	3.146E-03
2E01	1.159E-01	9.738E-03
5E01	2.283E-01	2.792E-02
1E02	3.344E-01	5.051E-02
1E03	7.619E-01	1.852E-01

8.2.3 Polynomgrad $q = 2$

Ein höherer Polynomgrad als $q = 1$ ist möglich, aber weniger optimal.

R	$k=1$	5	9	13
1E03	2.677E-01	1.172E-03		5.383E-08
1E04				2.559E-06
1E05			7.997E-04	3.124E-05
1E06			2.917E-03	1.812E-04
1E07				6.682E-04
1E08				1.833E-03
1E09				4.101E-03

8.2.4 Polynomgrad $q = 3$

R	$k=13$
1E03	3.163E-08
1E04	1.710E-06
1E05	2.267E-05
1E06	1.392E-04
1E07	5.354E-04

8.3 Nichtstandard-Approximation von $\log(x)$ in $[1, R]$

Die bisherige Approximation von $\log(x)$ erhält die Nullstelle bei $x = 1$ nicht. Will man dies erreichen, kann anstelle von $\log(x)$ die Funktion

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x-1}$$

in $[1, R]$ approximiert werden: $f(x) \approx E_k(x)$. Anschließend erhalt man die Approximation

$$\log(x) \approx (x-1)\, E_k(x).$$

Zusammen mit der Gewichtsfunktion $\gamma(x) = x$, erhält man die Fehlerabschätzung

$$|\log(x) - (x-1)\, E_k(x)| = (x-1)\, |f(x) - E_k(x)| \leq \frac{x-1}{x} \varepsilon_k < \varepsilon_k \qquad \text{in } [1, R],$$

wobei ε_k der Fehler aus der folgenden Tabelle ist:

R	$k=4$	7	9	10
1E01			3.000E-11	
2E01			1.292E-09	
5E01			3.847E-08	
1E02			2.371E-07	
2E02			9.516E-07	
3E02			1.845E-06	
4E02			2.793E-06	
5E02	2.454E-03		3.746E-06	
1E03			8.155E-06	
2E03			1.501E-05	
3E03			2.012E-05	
5E03	3.226E-03	1.970E-04	2.752E-05	
1E04			3.861E-05	1.539E-05
2E04			4.982E-05	
3E04			5.514E-05	

8.4 Approximation von $\log(x)$ in $[0, 1]$ mit Gewichtsfunktion

Wenn $[0, 1]$ durch $[\varepsilon, 1]$ $(\varepsilon > 0)$ ersetzt werden kann, empfiehlt sich die Darstellung von $\log(x) = \log(\varepsilon) + \log(x/\varepsilon)$ mit $\log(x/\varepsilon) = \log(t)$ für $1 \leq t \leq R := 1/\varepsilon$ gemäß §8.3.

8.4.1 Gewichtsfunktion $\gamma(x) = x^c$

Die reine Exponentialsummenapproximation ist kaum erfolgreich, wie man der folgenden Tabelle entnimmt:

k	c	Fehler
1	0.5	1.079E-01
2	0.1	7.994E-01
3	0.1	4.873E-01
4	0.1	3.200E-01
5	0.1	2.209E-01
6	0.1	1.581E-01
7	0.1	1.164E-01

Für $k \geq 2$ scheint die Wahl $c = 1/2$ keine Approximation zu erlauben.

8.4.2 Gewichtsfunktion $\gamma(x) = 1/\left(x + \log^2(x)\right)$

Da kleine c in $\gamma(x) = x^c$ besser zu sein scheinen, wird die Gewichtsfunktion $\gamma = 1/\left(x + \log^2(x)\right)$ mit noch schwächerer Nullstelle versucht. Aber lediglich

$$k = 1 \qquad \text{Fehler} = 9.732\text{E-02}$$

ist erreichbar.

9 Approximation der Funktion $x^2 \exp(-x^4)$ in $I = [0, \infty)$

Eine die Koaleszenz beschreibende Kernfunktion der Populationsbilanzgleichungen führt auf die Funktion

$$f(x) := x^2 \exp(-x^4) \qquad \text{in } [0, \infty),$$

die so zu entwickeln ist, dass sich $f(x+y)$ separabel approximieren lässt. Beispielsweise können die Fälle $x \in I_1 = [0, a]$ und $x \in I_2 = [a, \infty)$ bzw. $y \in I_1, I_2$ unterschieden werden. Für $x, y \in I_1$ ist $x + y \in [0, 2a]$, sonst gilt $x + y \in [a, \infty)$. Die Wahl $a = 1/2$ ist hier angemessen.

9.1 Approximation in $[0, R]$ $(R = 2a)$

Die Fehler der Polynomapproximation vom Grad q in $[0, R]$ lauten wie folgt:

	$q = 1$	2	3	4	5	6
$R = 1.0$	7.228E-2	5.576E-2	8.661E-3	3.296E-3	1.484E-3	1.908E-4
$R = 0.9$	3.816E-2	3.795E-2	7.444E-3	9.781E-4	6.879E-4	1.342E-4
$R = 0.8$	3.812E-2	2.247E-2	5.145E-3	3.954E-4	2.403E-4	6.398E-5
$R = 0.7$	3.811E-2	1.146E-2	2.888E-3	3.338E-4	5.791E-5	2.211E-5
$R = 0.6$	3.489E-2	4.944E-3	1.320E-3	1.906E-4	7.106E-6	5.596E-6
$R = 0.5$	2.766E-2	1.743E-3	4.811E-4	7.778E-5	3.606E-6	9.975E-7

	$q = 7$	8	9	10	11	12
$R = 1.0$	7.510E-5	2.709E-5	2.917E-6	1.097E-6	3.758E-7	3.872E-8
$R = 0.9$	1.291E-5	8.503E-6	1.590E-6	9.599E-8	7.725E-8	1.499E-8
$R = 0.8$	4.285E-6	1.728E-6	4.883E-7	4.399E-8	8.461E-9	2.821E-9
$R = 0.7$	2.417E-6	1.755E-7	9.497E-8	1.371E-8	3.583E-10	2.898E-10
$R = 0.6$	7.603E-7	3.396E-8	1.115E-8	2.262E-9	1.580E-10	1.252E-11
$R = 0.5$	1.504E-7	1.163E-8	5.675E-10	2.133E-10	2.020E-11	5.755E-13

9.2 Approximation in $[1/2, \infty)$

Da $f(x)$ für $x \to \infty$ sehr schnell fällt, kann das Intervall $[0, \infty)$ auf $[0, x_{\max}]$ beschränkt werden und für $x > x_{\max}$ durch null ersetzt werden: Die Werte von f sind:

x	1.7	1.8	1.9	2.0
$f(x)$	6.82E-4	8.94E-5	7.90E-6	4.5E-7

Eine Approximation in $[1/2, \infty)$ oder $[1/2, x_{\max}]$ mit Exponentialsummen ist mit dem Remez-Algorithmus nicht möglich. Stattdessen wird nach der Substitution

$$t = \exp(-\alpha x), \qquad \text{d.h.} \quad x = -\frac{\log(t)}{\alpha}$$

eine Polynomapproximation von

$$F(t) := f\left(-\frac{\log(t)}{\alpha}\right) = \left(\frac{\log(t)}{\alpha}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{\log(t)}{\alpha}\right)^4\right) \qquad \text{für } t \in [\mathrm{e}^{-\alpha x_{\max}}, \mathrm{e}^{-\alpha/2}]$$

vorgenommen. Eine Polynomapproximation $F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{q} \beta_\nu t^\nu$ liefert nach Rücksubstitution $f(x) \approx \sum_{\nu=0}^{q} \beta_\nu \exp(-\nu\alpha x)$. Dies stimmt mit der Exponentialsumme $E_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \exp(-\alpha_j x)$ aus (1.1) mit

$$k = q + 1, \quad \omega_j = \beta_{j-1}, \quad \alpha_j = (j-1)\,\alpha \quad \text{für } j = 1, \ldots, k$$

überein.

Für $x_{\max} = 1.7$ lauten die Fehler der Polynomapproximation $F(t) \approx \sum_{\nu=0}^{q} \beta_\nu t^\nu$ und die zugehörigen optimalen Werte[1] α wie folgt:

q	2	3	4	5	6	7	8
α	1.9035	3.18	1.0352795	1.7137	0.6517267	1.10222	1.4486
Fehler	4.558E-2	2.815E-2	9.594E-3	5.363E-3	1.640E-3	8.497E-4	4.844E-4

Die Vorzeichen der Koeffizienten β_ν sind jeweils für [un]gerade ν gleich. Im Falle $q = 11$ mit $\alpha = 1.2494632$ lautet das t-Intervall beispielsweise $[\mathrm{e}^{-\alpha x_{\max}}, \mathrm{e}^{-\alpha/2}] \approx [0.120, 0.535]$.

Für Genauigkeiten besser als 7E-4 ist $x_{\max} = 1.8$ vorzuziehen. Die entsprechenden Werte sind

q	8	9	10	11	12
α	1.588	0.897002911	1.159877	1.379994	1.5685
Fehler	8.179E-4	2.263E-4	1.267E-4	7.530E-5	4.697E-5

Für Genauigkeiten besser als 8E-5 empfiehlt sich $x_{\max} = 1.9$:

q	12	13	14	15	16
α	1.6782	1.17241	1.32965	1.469035	1.593975
Fehler	9.083E-5	2.209E-5	1.353E-5	8.599E-6	5.635E-6

Für Genauigkeiten besser als 8E-6 ist $x_{\max} = 2.0$ einzusetzen:

q	17	18	19
α	1.796375	1.8986	2.6087
Fehler	8.303E-6	5.907E-6	1.866E-5

Literatur

[1] D. Braess: *Nonlinear Approximation Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[2] D. Braess und W. Hackbusch. *Approximation of $1/x$ by exponential sums in* $[1, \infty)$. IMA J. Numer. Anal., **25**:685–697, 2005.

[3] W. Hackbusch: *Approximation of $1/\|x - y\|$ by exponentials for wavelet applications.* Computing, **76**:359–366, 2006.

[1] Für $q = 3$ liefern kleine α bessere Werte (z.B. $\alpha = 0.0001$, Fehler: 2.314E-2), aber die numerische Auslöschung wächst mit $\alpha \to 0$.